Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen ...

Königlich Sächsische Gesellschaft der ...

Digitized by Google

Library of the University of Michigan

Bought with the income

of the

Ford - Messer

Bequest

AS
182
.S14

Digitized by Google

BERICHTE

83680

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH - PHYSISCHE CLASSE.

EINUNDVIERZIGSTER BAND.

1889.

MIT VIER TAFELN UND DREI FIGUREN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

Digitized by Google

INHALT.

Seite

Schenk, Bemerkungen über einige Pflanzenreste aus den triasischen und liasischen Bildungen der Umgebung des Comersees. (Mit einer Tafel) 1

Mittheilung über das Möbius-Archiv 14

C. Neumann, Ueber das Malfatti'sche Problem. (Mit einem Holzschnitt) 22

W. Scheibner, Zur Reduction elliptischer, hyperelliptischer und Abel'scher Integrale. Das Abel'sche Theorem für einfache und Doppelintegrale. 31

G. Wiedemann, Magnetische Untersuchungen. (Mit einer Tafel). 57

Herm. Credner, Das vogtländische Erdbeben vom 26. December 1888. (Mit einer Übersichtskarte). 76

W. Scheibner, Ueber den Zusammenhang der Thetafunctionen mit den elliptischen Integralen 86

Martin Krause, Ueber einige Differentialbeziehungen im Gebiete der doppelt periodischen Functionen dritter Art 110

E. Drechsel, Zur Kenntniss der Spaltungsproducte des Caseïns. Vorläufige Mittheilung 117

A. Mayer, Zur Theorie des gewöhnlichen Maximums und Minimums. (Mit einer Figur). 122

Sophus Lie, Die infinitesimalen Berührungstransformationen der Mechanik 145

Friedrich Engel, Zur Invariantentheorie der Systeme von Pfaff'schen Gleichungen. Vorgelegt von A. Mayer 157

E. Study, Complexe Zahlen und Transformationsgruppen. Vorgelegt von S. Lie 177

Friedrich Schur, Ueber die canonische Form der Parametergruppe. Vorgelegt von S. Lie. 229

J. Wislicenus, Ueber die chemische Wirkung der in einer Kohlenstoffkette an das erste Atom gebundenen Elemente auf das fünfte. 232

J. Wislicenus, Vorläufige Mittheilung über Fünferring-Ketone. . 237

W. Scheibner, Ueber den Zusammenhang der Thetafunctionen mit den elliptischen Integralen. (Fortsetzung z. S. 109). . . . 245

Sophus Lie, Reduction einer Transformationsgruppe auf ihre canonische Form. 277

Digitized by Google

Seite

G. Scheffers, Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen. (Mit einer Figur.) Vorgelegt von S. Lie. 290

A. Mayer, Ueber die Maxima und Minima impliciter Functionen und die Reciprocitätsgesetze in der Theorie des gewöhnlichen Maximums und Minimums 308

Sophus Lie, Ueber irreducible Berührungstransformationsgruppen 320

Paul Flechsig, Ueber eine neue Färbungsmethode des centralen Nervensystems und deren Ergebnisse bezüglich des Zusammenhanges von Ganglienzellen und Nervenfasern. (Mit einer Tafel). 328

W. Scheibner, Ueber die Differentialgleichungen der elliptischen Modulfunctionen und Invarianten 334

Prof. Pfeffer, Mittheilungen über die im botanischen Institut angestellten Untersuchungen des Herrn P. Eschenhagen betreffend den Einfluss der Concentration des Nährmediums auf das Wachsthum der Schimmelpilze 343

Martin Krause, Zur Theorie der doppelt periodischen Functionen zweiter und dritter Art. 347

J. Thomae, Ueber Curven, deren Punkten mehrere Parameterwerthe entsprechen 365

W. G. Hankel, Die galvanische Kette. 378

G. Scheffers, Ueber die Berechnung von Zahlensystemen 400

Digitized by Google

Protector der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

SEINE MAJESTÄT DER KÖNIG.

Ehrenmitglied.

Seine Excellenz der Staatsminister des Cultus und öffentlichen Unterrichts *Carl Friedrich von Gerber*.

Ordentliche einheimische Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Geheimer Hofrath *Friedrich Zarncke* in Leipzig, Secretär der philol.-histor. Classe bis Ende des Jahres 1890.
Professor *Adolf Ebert* in Leipzig, stellvertretender Secretär der philol.-histor. Classe bis Ende des Jahres 1890.
Geheimer Rath *Otto Böhtlingk* in Leipzig.
Professor *Friedrich Carl Brugmann* in Leipzig.
—— *Berthold Delbrück* in Jena.
—— *Alfred Fleckeisen* in Dresden.
—— *Georg Götz* in Jena.
Geheimer Hofrath *Gustav Hartenstein* in Jena.
Geheimer Hofrath *Max Heinze* in Leipzig.
Professor *Friedrich Otto Hultsch* in Dresden.

Digitized by Google

Oberbibliothekar *Reinhold Köhler* in Weimar.
Geheimer Hofrath *Christoph Ludolf Ehrenfried Krehl* in Leipzig
Professor *August Leskien* in Leipzig.
—— *Hermann Lipsius* in Leipzig.
—— *Wilhelm Maurenbrecher* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Johannes Adolph Overbeck* in Leipzig.
—— —— *Wilhelm Pertsch* in Gotha.
Professor *Friedrich Ratzel* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Otto Ribbeck* in Leipzig.
Geheimer Rath *Wilhelm Roscher* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Anton Springer* in Leipzig.
—— —— *Georg Voigt* in Leipzig.
Professor *Moritz Voigt* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Curt Wachsmuth* in Leipzig.
Professor *Ernst Windisch* in Leipzig.
—— *Richard Paul Wülker* in Leipzig.

Frühere ordentliche einheimische, gegenwärtig auswärtige Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Professor *Georg Ebers* in München.
—— *Hans Georg Conon von der Gabelentz* in Berlin.
—— *Theodor Mommsen* in Berlin.
Geheimer Hofrath *Erwin Rohde* in Heidelberg.
Geheimer Regierungsrath *Hermann Sauppe* in Göttingen.
Kirchenrath *Eberhard Schrader* in Berlin.

Ordentliche einheimische Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Geheimer Hofrath *Carl Ludwig* in Leipzig, Secretär der mathem.-phys. Classe bis Ende des Jahres 1891.
Professor *Adolph Mayer* in Leipzig, stellvertretender Secretär der mathem.-phys. Classe bis Ende des Jahres 1889.
Professor *Rudolf Böhm* in Leipzig.
Geheimer Medicinalrath *Christian Wilhelm Braune* in Leipzig.
Professor *Heinrich Bruns* in Leipzig.

Digitized by Google

Oberbergrath *Hermann Credner* in Leipzig.
Geheimer Rath *Moritz Wilhelm Drobisch* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Hans Bruno Geinitz* in Dresden.
Professor *Paul Flechsig* in Leipzig.
Geheimer Rath *Wilhelm Gottlieb Hankel* in Leipzig.
Geheimer Medicinalrath *Wilhelm His* in Leipzig.
Professor *Johann August Ludwig Wilhelm Knop* in Leipzig.
— *Martin Krause* in Dresden.
Geheimer Hofrath *Rudolph Leuckart* in Leipzig.
Professor *Sophus Lie* in Leipzig.
— *Carl Neumann* in Leipzig.
— *Wilhelm Ostwald* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Wilhelm Pfeffer* in Leipzig.
Professor *Karl Rohn* in Dresden.
— *Wilhelm Scheibner* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *August Schenk* in Leipzig.
Geheimer Rath *Oskar Schlömilch* in Dresden.
Hofrath *Rudolf Wilhelm Schmitt* in Dresden.
Professor *Johannes Thomae* in Jena.
Geheimer Hofrath *August Töpler* in Dresden.
— — *Gustav Wiedemann* in Leipzig.
— — *Johannes Wislicenus* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Wilhelm Wundt* in Leipzig.
Geheimer Rath *Gustav Anton Zeuner* in Dresden.
Geheimer Bergrath *Ferdinand Zirkel* in Leipzig.

Ausserordentliche Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Professor *Edmund Drechsel* in Leipzig.
— *Ernst von Meyer* in Leipzig.

Frühere ordentliche einheimische, gegenwärtig auswärtige Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Geheimer Hofrath *Carl Gegenbaur* in Heidelberg.

Digitized by Google

Professor *Felix Klein* in Göttingen.
— *Adalbert Krüger* in Kiel.
— *Ferdinand Freiherr von Richthofen* in Berlin.
Geheimer Hofrath *Wilhelm Weber* in Göttingen.

Archivar:

Oberbibliothekar *Joseph Heinrich Gustav Ernst Förstemann* in Leipzig.

Verstorbene Mitglieder.

Ehrenmitglieder.

Falkenstein, Johann Paul von, 1882.
Wietersheim, Karl August Wilhelm Eduard von, 1865.

Philologisch-historische Classe.

Albrecht, Eduard, 1876.
Ammon, Christoph Friedrich von, 1850.
Becker, Wilhelm Adolf, 1846.
Brockhaus, Hermann, 1877.
Bursian, Conrad, 1883.
Curtius, Georg, 1885.
Droysen, Johann Gustav, 1884.
Fleischer, Heinrich Leberecht, 1888.
Flügel, Gustav, 1870.
Franke, Friedrich, 1871.
Gabelentz, Hans Conon von der, 1874.
Gersdorf, Ernst Gotthelf, 1874.
Göttling, Carl, 1869.
Gutschmid, Hermann Alfred von, 1887.
Hänel, Gustav, 1878.
Hand, Ferdinand, 1851.
Hasse, Friedrich Christian August, 1848.
Haupt, Moritz, 1874.
Hermann, Gottfried, 1848.
Jacobs, Friedrich, 1847.
Jahn, Otto, 1869.
Lange, Ludwig, 1885.
Marquardt, Carl Joachim, 1882.
Michelsen, Andreas Ludwig Jacob, 1881.
Nipperdey, Carl, 1875.
Noorden, Carl von, 1883.
Peschel, Oscar Ferdinand, 1875.
Preller, Ludwig, 1861.
Ritschl, Friedrich Wilhelm, 1876.
Schleicher, August, 1868.
Seidler, August, 1851.
Seyffarth, Gustav, 1885.
Stark, Carl Bernhard, 1879.
Stobbe, Johann Ernst Otto, 1887.
Tuch, Friedrich, 1867.
Ukert, Friedrich August, 1851.
Wachsmuth, Wilhelm, 1866.
Wächter, Carl Georg von, 1880.
Westermann, Anton, 1869.

Digitized by

Mathematisch-physische Classe.

d'Arrest, Heinrich, 1875.
Baltzer, Heinrich Richard, 1887.
Bezold, Ludwig Albert Wilhelm von, 1868.
Bruhns, Carl, 1881.
Carus, Carl Gustav, 1869.
Cohnheim, Julius, 1884.
Döbereiner, Johann Wolfgang, 1849.
Erdmann, Otto Linné, 1869.
Fechner, Gustav Theodor, 1887.
Funke, Otto, 1879.
Hansen, Peter Andreas, 1874.
Harnack, Axel, 1888.
Hofmeister, Wilhelm, 1877.
Huschke, Emil, 1858.
Kolbe, Hermann, 1884.
Kunze, Gustav, 1851.
Lehmann, Carl Gotthelf, 1863.
Lindenau, Bernhard August von, 1854.
Marchand, Richard Felix, 1850.
Mettenius, Georg, 1866.
Möbius, August Ferdinand, 1868.
Naumann, Carl Friedrich, 1873.
Pöppig, Eduard, 1868.
Reich, Ferdinand, 1882.
Scheerer, Theodor, 1875.
Schleiden, Matthias Jacob, 1881.
Schwägrichen, Christian Friedrich, 1853.
Seebeck, Ludwig Friedrich Wilhelm August, 1849.
Stein, Samuel Friedrich Nathanael von, 1885.
Volkmann, Alfred Wilhelm, 1877.
Weber, Eduard Friedrich, 1871.
Weber, Ernst Heinrich, 1878.
Zöllner, Johann Carl Friedrich, 1882.

Leipzig, am 31. December 1889.

Digitized by Google

Verzeichniss

der bei der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften im Jahre 1889 eingegangenen Schriften.

---

1. Von gelehrten Gesellschaften, Universitäten und öffentlichen Behörden herausgegebene und periodische Schriften.

Deutschland.

Abhandlungen der Kgl. Akademie d. Wissensch. zu Berlin. Aus d. J. 1883. Berlin 1889.

Sitzungsberichte der Königl. Preuss. Akad. d. Wissensch. zu Berlin. 1888, No. 38—52. 1889, No. 1—38. Berlin 1889.

Politische Correspondenz Friedrichs d. Gr. Bd. 17. Berlin 1889.

Die Venus-Durchgänge 1874 und 1882. Bericht über die deutschen Beobachtungen. Im Auftrage der Commission für die Beobachtung des Venus-Durchgangs hsg. v. *A. Auwers*. Bd. 2. Berlin 1889.

Herrmann, Paul, Das Gräberfeld von Marion auf Cypern (48. Programm z. Winckelmannsfeste der Archäologischen Gesellschaft zu Berlin). Berlin 1888. — *Kekulé, R.*, Über die Bronzestatue des sogen. Idolino (49. Programm). Berlin 1889.

Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. XXI, No. 18. 19. Jahrg. XXII, No. 1—16. Berlin 1888. 89.

Verhandlungen der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin im Jahre 1888 (Jahrg. 7). Berlin 1889.

Centralblatt für Physiologie. Unter Mitwirkung der Physiologischen Gesellschaft zu Berlin herausgegeben. Jahrg. 1888, No. 3. 19—26. Jahrg. 1889, No. 1—19. Berlin d. J.

Verhandlungen der Physiologischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 1888/89, No. 1—18. Jahrg. 1889/90, No. 1. Berlin 1889.

Jahrbuch der Kgl. Preuss. geologischen Landesanstalt und Bergakademie zu Berlin f. d. J. 1887. Berlin 1888.

Abhandlungen zur geolog. Specialkarte von Preussen und den Thüringischen Staaten. Bd. VIII, H. 4. IX, 1. 2. X, 1. Nebst Atlas zu IX, 1 und zu IX, 2. Berlin 1889.

Beobachtungs-Ergebnisse der Königl. Sternwarte zu Berlin. H. 1—4. Berlin 1884—88.

Jahrbücher des Vereins von Alterthumsfreunden im Rheinlande. H. 87. Bonn 1889.

Digitized by Google

Das römische Lager in Bonn. Festschrift zu Winckelmanns Geburtstage am 9. Dec. 1888, hsg. vom Vorstande des Vereins von Alterthumsfreunden im Rheinlande. Bonn 1888.

Jahresbericht des Vereins f. Naturwissenschaften zu Braunschweig für das Vereinsjahr 1886/87. Als Festschrift zur Feier des 25jährigen Bestehens herausgegeben. Braunschweig 1887.

Sechsundsechzigster Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. Enthält den Generalbericht über die Arbeiten und Veränderungen der Gesellschaft im J. 1888. Breslau 1889.

Jahrbuch des Königl. Sächs. meteorologischen Institutes. Jahrg. 5 (1887), Abth. 3 (= Lief. 2). Chemnitz 1889. — Vorläufige Mittheilung aus den Jahrbüchern des Königl. Sächs. meteorologischen Institutes, 1 (enth. Anhang 2). 2 (enth. Anhang 5). 3 (enth. Anhang 6). 4 (= Jahrbuch 1888, Abth. 3). Chemnitz 1889.

Decaden- u. Monatsresultate aus den meteorolog. Beobachtungen an elf Stationen II. Ordnung in Sachsen. 1889, März—November.

Schriften der naturforschenden Gesellschaft in Danzig. N.F. Bd. 7, H. 2. Danzig 1889.

Zeitschrift des k. sächsischen statistischen Bureaus. Redig. v. V. Böhmert. Jahrg. 34 (1888), H. 1—4 u. Supplementheft. Jahrg. 35 (1889), H. 1. 2. Dresden 1888. 89.

Jahresbericht der Gesellschaft für Natur- u. Heilkunde in Dresden. Sitzungsperiode 1888—89. Dresden 1889.

Sitzungsberichte und Abhandlungen der naturwissenschaftl. Gesellschaft Isis in Dresden. Jahrg. 1888, Juli—Dec. Jahrg. 1889, Jan.—Juni. Dresden 1889.

Kgl. Sächsisches Polytechnikum zu Dresden. Ergänzung zum Programm f. d. Studienjahr 1888/89, enthalt. d. Verzeichniss d. Vorlesungen f. d. Sommersem. 1889. — Ergänzung giltig f. d. Wintersem. 1889/90.

Codex diplomaticus Saxoniae regiae. Im Auftrag der K. Sächs. Staatsregierung herausgeg. v. *O. Posse* und *H. Ermisch*. I. Hauptheil, Bd. 2. Urkunden der Markgrafen von Meissen und Landgrafen von Thüringen 1100—1195. Herausgeg. v. *O. Posse*. Leipzig 1889.

Sitzungsberichte der physikal.-medicinischen Societät in Erlangen. Jahrg. 1888. München 1889.

Jahresbericht des Physikalischen Vereins zu Frankfurt a./M. f. das Rechnungsjahr 1886/87. Frankfurt 1888.

Jahrbuch für d. Berg- und Hüttenwesen im Königreich Sachsen auf d. Jahr 1889. Freiberg 1889.

Sechsundzwanzigster Bericht der Oberhessischen Gesellschaft f. Natur- u. Heilkunde. Giessen 1889.

Verzeichniss d. Vorlesungen auf der Grossherz. Hessischen Ludwigs-Universität zu Giessen, Sommer 1889, Winter 1889/90, Personalbestand W. 1888/89, S. 1889. *Bostroem, E.*, Der menschliche Körper und die Bakterien (Akad. Festrede). Giessen 1889. Occams Traktat gegen die Unterwerfungsformel Clemens VI., hsg. v. *K. Müller* (Akad. Festschrift). Giessen 1888. 29 Dissertationen vom J. 1888/89.

Neues Lausitzisches Magazin. Im Auftrag d. Oberlausitz. Gesellsch. d. Wissensch. herausgeg. von R. Jecht. Bd. 64, H. 2. Bd. 65, H. 1. Görlitz 1888. 89.

Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Bd. 35 (1888). Göttingen 1889.

Digitized by Google

Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität aus d. J. 1888. Göttingen 1888.

Bericht über die im Jahr 1888 den Herzogl. Sammlungen zugegangenen Geschenke. Gotha 1889.

Jahresbericht der Fürsten- und Landesschule zu Grimma über d. Schuljahr 1888/89. Grimma 1889.

Nova Acta Academiae Carolino-Leopoldinae Caesareae Germanicae naturae curiosorum. T. 49—52. Halis 1887. 88.

Leopoldina. Amtl. Organ d. kais. Leopoldinisch-Carolinisch deutschen Akad. der Naturforscher. H. XXIV, No. 23. 24. H. XXV, No. 1—22. Halle 1889.

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Originalabhandlungen u. Berichte. Hrsg. vom Naturwiss. Verein f. Sachsen und Thüringen in Halle. 4. Folge Bd. 7, 1888 (d. ganzen Reihe 61. Bd.), H. 1—6. Bd. 8, 1889 (d. ganzen Reihe 62. Bd.), H. 1. 2. Halle 1888. 89.

Festschrift herausgeg. von der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg anlässlich ihres 200jährigen Jubelfestes 1890. T. 1 (zugleich Anfang von Bd. II der »Mittheilungen«). Leipzig 1890.

Bodemann, E., Der Briefwechsel des Gottfried Wilhelm Leibniz in der Kgl. öffentl. Bibliothek zu Hannover. Hannover 1889.

Verhandlungen des Naturhist.-medicinischen Vereins zu Heidelberg. N. F. Bd. 4, H. 2. 3. Heidelberg 1889.

Chronik der Universität zu Kiel f. d. J. 1888/89; Verzeichniss d. Vorles. Winter 1888/89, Sommer 1889. *Blass, F.*, De Antiphonte sophista Jamblichi auctore (Progr.) Kil. 1889. *Blass, F.*, Ideale und materielle Lebensanschauung (Rede). Kiel 1889. *Nitzsch, Frdr.*, Die Idee und die Stufen des Opferkultus (Rede). Kiel 1889. — 89 Dissertationen vom J. 1888/89.

Ergebnisse der Beobachtungsstationen an den deutschen Küsten über die physikalischen Eigenschaften der Ostsee u. Nordsee u. die Fischerei. Jahrg. 1887, H. 10—12. 1888, H. 1—9. Berlin 1889.

Sechster Bericht der Commission zur wissenschaftl. Untersuchung der deutschen Meere in Kiel, für die Jahre 1887—89 (Jahrg. 17—19), H. 1. Berlin 1889.

Mittheilungen aus der Commission zur wissenschaftl. Untersuchung der deutschen Meere in Kiel. *Reinke, J.*, Atlas deutscher Meeresalgen. Im Auftrag des K. Preuss. Ministeriums f. Landwirthschaft, Domänen und Forsten herausgeg. im Interesse der Fischerei von der Commission z. wissensch. Untersuchung d. deutschen Meere. H. 1. Berlin 1889.

Schriften der physikal.-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg. Jahrg. 29 (1888). Königsberg 1889.

Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft. Jahrg. 23, H. 3. 4. Jahrg. 24, H. 1—4. Leipzig 1888. 89.

Charlier, C. V. L., Ueber die Anwendung der Sternphotographie zu Helligkeitsmessungen der Sterne. Publication der astronomischen Gesellschaft. XIX. Leipzig 1889.

Jahresbericht der Fürsten- u. Landesschule Meissen vom Juli 1888 — Juli 1889. Meissen 1889.

Abhandlungen der histor. Classe d. k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 18 (in d. Reihe d. Denkschr. d. 60. Bd.), Abth. 2. 3. München 1888. 89.

Digitized by Google

Abhandlungen der mathem.-physikal. Cl. d. k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 16 (in d. Reihe d. Denkschr. d. 56. Bd.), Abth. 3. München 1888.

Abhandlungen d. philos.-philolog. Cl. d. k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 18 (in d. Reihe d. Denkschr. d. 61. Bd.), Abth. 2. München 1889.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. Jahrg. 1888, H. 3. Jahrg. 1889, H. 1. 2. München 1889.

Sitzungsberichte der philos.-philol. u. histor. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. Jahrg. 1888, Bd. 1, H. 3. Bd. 2, H. 1—3. Jahrg. 1889, Bd. 1, H. 1—3. München 1888. 89.

Groth, Paul, Ueber die Molekularbeschaffenheit der Krystalle. Festrede gehalten in d. öffentl. Sitzung der k. bayer. Acad. d. Wiss. zur Feier des 129. Stiftungstages am 28. März 1888. München 1888.

Planck, J. W. v., Ueber die historische Methode auf dem Gebiet des deutschen Civilprozessrechts. Festrede gehalten in d. öffentl. Sitzung der k. bayer. Acad. d. Wiss. am 27. Dec. 1888. München 1889.

Christ, W. v., Gedächtnissrede auf K. von Prantl, gehalten in der öffentl. Sitzung der k. bayer. Acad. d. W. am 28. März 1889. München 1889.

Lommel, Eug., Georg Simon Ohm's wissenschaftliche Leistungen. Festrede gehalten in d. öffentl. Sitzung der k. bayer. Acad. d. Wiss. am 28. März 1889. München 1889.

Fraunhofer, Jos. v., Gesammelte Schriften. Im Auftrag der math.-phys. Classe der k. bayer. Acad. d. Wiss. herausgeg. v. E. Lommel. München 1888.

Dreissigste Plenarversammlung der histor. Commission bei der k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bericht des Secretariats. München 1889.

Sitzungsberichte der Gesellschaft f. Morphologie u. Physiologie in München. Bd. 4 (1888), H. 2. 3. Bd. 5 (1889), H. 1. München 1888. 89.

Anzeiger des Germanischen Nationalmuseums. Bd. 2, H. 2 (Jahrg. 1888). — Mittheilungen aus dem Germanischen Museum. Bd. 2, H. 2 (Jahrg. 1888). — Katalog der im Germanischen Museum befindlichen deutschen Kupferstiche des 15. Jahrhunderts, bearb. v. *M. Lehrs*. Nürnberg 1888.

Publicationen des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Bd. 4, Th. 2. Bd. 6. Potsdam 1889.

Württembergische Vierteljahrshefte für Landesgeschichte. Hsg. v. d. Kgl. Statist. Landesamt. Jahrg. 11 (1888), H. 1—4. Jahrg. 12 (1889), H. 1. Stuttgart 1888. 89.

Münster-Blätter. Im Auftrag des Münster-Comités hsg. v. *A. Beyer* u. *F. Pressel*. Heft 6. (Festgruss zum 25. Juni 1889). Ulm 1889.

Zuwachs der Grossherzogl. Bibliothek zu Weimar in d. J. 1887 und 1888. Weimar 1889.

Jahrbücher des Nassauischen Vereins f. Naturkunde. Jahrg. 41. 42. Wiesbaden 1888. 89.

Sitzungsberichte der physikal.-medicin. Gesellschaft in Würzburg. Jahrg. 1888. Würzburg 1888.

Verhandlungen der physikal.-medicin. Gesellschaft in Würzburg. N. F. Bd. 22. Würzburg 1889.

Digitized by Google

Oesterreich-Ungarn.

Djela Jugoslavenske Akademije znanosti i umjetnosti [Agram]. Opera Academiae scientiarum et artium Slavorum meridionalium. Knjiga 8 (*Bulić, F.*; Hrvatski Spomenici. Svezak 1). U Zagrebu 1888.

Ljetopis Jugoslavenske Akademije znanosti i umjetnosti za godina 1888. Treći svezak. U Zagrebu 1888.

Rad Jugoslavenska Akademije znanosti i umjetnosti. Knjiga 91—96. U Zagrebu 1888. 89.

Starine, na sviet izdaje Jugoslavenska Akademija znanosti i umjetnosti. Knjiga 20. U Zagrebu 1888.

Viestnik Hrvatskoga arkeologičkoga Družtva. Godina XI, Br. 1—4. U Zagrebu 1889.

Magyar tudom. Akadémiai Almanach, 1889-re. Budapest 1889.

Mathematische u. naturwiss. Berichte aus Ungarn. Mit Unterstützung der Ungar. Akad. d. Wissensch. herausgeg. Bd. 6. Budapest 1889.

A Magyar tudom. Akadémia Emlékbeszédek. Köt. 5, Sz. 1—8. Budapest 1888. 89.

Értekezések a nyelv- és széptudomanyok köréből. Kiadja a Magyar tudom. Akadémia. Köt. 14, Sz. 8—10. Budapest 1887. 88.

Értekezések a természettudományok köréből. Köt. 17, Sz. 6. Köt. 18, Sz. 1—5. Budapest 1887—89.

Archaeologiai Értesitő. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Uj Folyam, Köt. 8, 3—5. 9, 1. 2. Budapest 1888. 89.

Mathematikai és természettudományi Értesitő. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 6, 2—9. 7, 1—3. Budapest 1888.

A Magyar tudom. Akadémia Értésitője. Évfoly. 22 (1888), Sz. 2—6. 23 (1889), Sz. 1. Budapest 1888.·89.

A Magyar tudom. Akadémia Évkönyvei. Köt. 17, D. 6. Budapest 1888.

Mathematikai és természettudományi Közlemények. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 23, 1—3. Budapest 1888.

Nyelvtudományi Közlemények. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 21, 1. 2. Budapest 1887. 88.

Ethnologische Mittheilungen aus Ungarn. Jahrg. 1 (1887—89), H. 3. Budapest 1889.

Monumenta Hungariae historica. Sectio III. Monumenta comitialia regni Transsylvaniae. T. 13. Budapest 1888.

Ungarische Revue. Mit Unterst. d. Ungar. Akad. d. Wiss. herausgeg. 1888 (Jahrg. 8), H. 7—10. 1889, H. 1—3. Budapest 1888—89.

Acsády, Ign., Magyarország pénzügyei I. Ferdinánd uralkodása alatt. 1526—64. Budapest 1888.

Beke, A., és *S. Barabás*, I. Rákóczy György és a Porta. Budapest 1888.

Fröhlich, Iz., Az electrodynamometer általános elmélete. Budapest 1888.

Mocsáry, Alex., Monographia Chrysididarum orbis terrarum universi. Editio separata sectionis tertiae Academiae scient. Hungaricae. Budapestini 1889.

Pisztóry, M., A nemzetgazdaságtan haladása és iránya az utolsó tizenöt év alatt. Budapest 1887.

Rentmeister, A., Lex Falcidia és quarta Falcidia. Budapest 1888.

Digitized by Google

Verzeichnis d. öffentl. Vorlesungen an der k. k. Franz-Josefs-Universität zu Czernowitz im Sommer-Sem. 1889, Winter-Sem. 1889/90. — Uebersicht der akad. Behörden im Studienjahr 1889/90.

Mittheilungen des histor. Vereines für Steiermark. Heft 37. Graz 1889.

Anzeiger der Akademie d. Wissenschaften in Krakau. Jahrg. 1889, No. 1—9. Krakau 1889.

Mittheilungen des Musealvereines für Krain. Jahrg. 2. Laibach 1889.

Abhandlungen der math.-naturwiss. Classe der k. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. VII. Folge. Bd. 2. Prag 1888.

Abhandlungen der Classe f. Philos., Geschichte u. Philologie der k. böhm. Gesellschaft d. Wissenschaften. VII. Folge. Bd. 2. Prag 1888.

Jahresbericht der k. böhm. Gesellschaft d. Wissenschaften erstattet am 15. Jan. 1888. Prag 1888. — Für das Jahr 1888. Prag 1889.

Spisův poctěných jubilejní cenou Král. Česk. Společnosti nauk v Praze. Číslo 2. V Praze 1889.

Sitzungsberichte der k. böhm. Gesellschaft d. Wissenschaften. Math.-naturw. Classe. Jahrg. 1887. 1888. 1889, I. Prag 1888. 89. — Philos.-histor.-philolog. Classe. Jahrg. 1887. 1888. Prag 1888. 89.

Koranda, Vencesl., Manuale. Přepsal a vydal J. Truhlář. V Praze 1888.

Magnetische und meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag im J. 1888. Jahrg. 49. Prag 1889.

Personalstand der k. k. Deutschen Carl-Ferdinands-Universität in Prag zu Anfang d. Studienjahres 1889—90. — Ordnung d. Vorlesungen im Wintersem. 1889.

Mittheilungen des Vereins für Geschichte der Deutschen in Böhmen. Jahrg. 27, No. 1—4. Prag 1888. 89.

Lotos. Jahrbuch f. Naturwissenschaft. Im Auftrag des Vereines »Lotos« herausg. N. F. Bd. 10 (der ganzen Reihe Bd. 38). Prag 1890.

Bulletino di archeologia e storia dalmata. Anno 11 (1888), No. 12. Anno 12 (1889), No. 1—11. Spalato 1888. 89.

Almanach der Kaiserl. Akademie d. Wissenschaften. Jahrg. 38. 1888. Jahrg. 39. 1889. Wien 1888. 89.

Anzeiger der Kaiserl. Akad. d. Wissenschaften in Wien. Math.-phys. Cl. Jahrg. 1888, No. 25—28. Jahrg. 1889, No. 1—24.

Archiv für österreich. Geschichte. Herausg. von der zur Pflege vaterländ. Geschichte aufgestellten Commission der kaiserl. Akad. d. Wissensch. Bd. 72, 2. Hälfte. Bd. 73, 1. u. 2. Hälfte. Bd. 74, 1. u. 2. Hälfte. Wien 1888. 89.

Denkschriften der kaiserl. Akad. d. Wissensch. Mathem.-naturw. Cl. Bd. 23. 54. 55. Wien 1864. 88. 89.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akad. d. Wiss. Mathem.-naturw. Cl. Bd. 97 (1888), Abth. I, Heft 1—10. Abth. II^a, Heft 1—10. Abth. II^b, Heft 1—10. Abth. III, Heft 1—10. Bd. 98 (1889), Abth. I, Heft 1—3. Abth. II^a, Heft 1—3. Abth. II^b, Heft 1—3. Abth. III, Heft 1—4. Wien 1888. 89. — Register XII. zu Bd. 91—96. Wien 1888.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akad. d. Wissensch. Philos.-histor. Cl. Bd. 116 (1888). 117 (1888). 118 (1889). Wien 1888. 89.

Mittheilungen der k. u. k. geographischen Gesellschaft in Wien. 1888. Bd. 31 (N. F. Bd. 21). Wien 1888.

Digitized by Google

Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. 1888, (Bd. 38), III. u. IV. Quartal. 1889 (Bd. 39), I. u. II. Quartal. Wien 1888. 89.

Astronomische Arbeiten des k. k. Gradmessungs-Bureau. Bd. I. Längenbestimmungen (Publicationen f. d. internationale Erdmessung). Wien 1889.

Annalen des k. k. naturhistorischen Hofmuseums. Bd. 4, No. 1—3. Wien 1889.

Jahrbuch d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1888 (Bd. 38), H. 4. Jahrg. 1889 (Bd. 39), H. 1. 2. Wien 1889.

Verhandlungen d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1888, No. 15—18. Jahrg. 1889, No. 1—12.

Publicationen der v. Kuffner'schen Sternwarte in Wien. Hsg. v. N. Herz. Bd. 1. Wien 1889.

Schriften des Vereines z. Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse in Wien. Bd. 28. Vereinsj. 1887/88. Wien 1888.

Belgien.

Annales de l'Académie d'archéologie de Belgique. T. 44 (IV. Sér. T. 4). Anvers 1888. — Bulletin (IV. Sér. des Annales), No. 17—24. Anvers 1888. 89.

Annuaire de l'Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. 1888 (Année 54). 1889 (Année 55). Bruxelles 1888. 89.

Bulletins de l'Acad. R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Année 57 (1887), II. Sér. T. 14. Année 58 (1888), II. Sér. T. 15. 16. Année 59 (1889), II. Sér. T. 17. Bruxelles 1887—89.

Mémoires de l'Acad. R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. T. 47. Bruxelles 1889.

Mémoires couronnés et autres Mémoires publ. p. l'Acad. R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Collection in-8°. T. 40—42. Bruxelles 1887—89.

Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers, publ. p. l'Acad. R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. T. 49. Bruxelles 1888.

Université de Liège, Institut de physiologie. Travaux du laboratoire de Léon Fredericq. T. 2 (1887—88). Paris, Liège 1888.

Dänemark.

Oversigt over det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger i aaret 1888, No. 2. 3. 1889, No. 1. Kjøbenhavn d. J.

Det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter. Histor. og philos. Afd. 6. Række. Bd. 2, No. 2. 4. 5. Kjøbenhavn 1888. 89.

Det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter. Naturvid. og mathemat. Afd. 6. Række. Bd. 4, No. 8. Kjøbenhavn 1888.

Regesta diplomatica historiae Danicae, cura Societatis Reg. scient. Danicae. Ser. II. T. 1, Fasc. 6. Kjøbenhavn 1889.

England.

Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 6, P. 4—6. Cambridge 1888. 89.

Digitized by Google

Transactions of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 14 P. 3. 4. Cambridge 1889.

Proceedings of the R. Irish Academy. Ser. III. Vol. 1, Nr. 1. Dublin 1888.

The Transactions of the R. Irish Academy. Vol. 29, P. 5—11. Dublin 1889.

The scientific Proceedings of the R. Dublin Society. Vol. 6, P. 3—6. Dublin 1888. 89.

The scientific Transactions of the R. Dublin Society. Ser. II. Vol. 4, No. 2—5. Dublin 1889.

Proceedings of the R. Society of Edinburgh. Vol. 12, No. 115—118. Vol. 13, No. 119—121. Vol. 14, No. 124. 125. Edinburgh 1884—88.

Transactions of the R. Society of Edinburgh. Vol. 30, P. 4. Vol. 31. Vol. 32, P. 2. 3. 4. Vol. 33, P. 1. 2. Edinburgh 1883 ff.

Proceedings of the R. Physical Society. Vol. 9, P. 3. (Session 1887/88). Edinburgh 1888.

Proceedings of the Liverpool Biological Society. Vol. 3 (Session 1888/89). Liverpool 1889.

Proceedings of the R. Institution of Great Britain. Vol. 12, P. 2 (No. 82). London 1889.

Royal Institution of Great Britain. List of the members 1888. London, July 1888.

Proceedings of the R. Society of London. Vol. XLV, No. 273—279. Vol. XLVI, No. 280—283. London 1888. 89.

Philosophical Transactions of the R. Society of London. For the year 1888. Vol. 179, A. B. London 1889. — The R. Society (List of the members) 30th Nov. 1887. 30th Nov. 1888.

Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. 19, No. 328—342. Vol. 20, No. 343—358. London 1888. 89.

Journal of the R. Microscopical Society, containing its Transactions and Proceedings. Ser. II. 1888, P. 6. 1889, P. 1—6. London 1889.

Report on the scientific results of the exploring voyage of H. M. S. Challenger, 1873—76. Vol. 29, Text P. I. II. Vol. 29, Plates. Vol. 30, P. I. II. 31. 32. London 1889.

Memoirs of the Literary and Philosophical Society of Manchester. IV. Ser. Vol. 1. 2. Manchester 1888. 89.

Frankreich.

Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. III. Série. T. 3, Cahier 2, et Append. (*Rayet*, Observations pluviométriques, Juin 1886—Mai 1887). Paris 1887.

Mémoires de l'Académie des sciences, belles-lettres et arts de Lyon. Classe des lettres. T. 24—26. Paris etc. 1887—89. — Classe des sciences. T. 28. 29. Paris etc. 1886. 88.

Annales de la Société Linnéenne de Lyon. Nouv. Série. T. 32 (Année 1885) — 34 (Année 1887). Lyon 1886—88.

Académie des sciences et lettres de Montpellier. Mémoires de la section des lettres. T. 8, Fasc. 2 (Année 1888). 3 (Année 1888/89). Montpellier 1888. 89.

Bulletin de la Société des sciences de Nancy (ancienne Société des sciences naturelles de Strasbourg). Sér. II. T. 9, Fasc. 22. Année 21 (1888). Paris 1889.

Digitized by Google

Bulletin des séances de la Société des sciences de Nancy. Année 1 (1889), No. 1—5.

Comité international des poids et mesures. Procès-verbaux des séances de 1888. Paris 1889.

Journal de l'École polytechnique, publ. p. le Conseil d'instruction de cet établissement. Cah. 58. Paris 1889.

Bulletin de la Société mathématique de France. T. 16, No. 5. 6. T. 17, No. 1—5. Paris 1888. 89.

Holland und Luxemburg.

Jaarboek van de Kon. Akad. v. Wetensch. gevestigd te Amsterdam, voor 1888.

Verhandelingen d. Kon. Akad. v. Wetenschappen. Afdeel. Letterkunde. Deel XVIII. Amsterdam 1889.

Verslagen en Mededeelingen der Kon. Akad. v. Wetensch. Afdeel. Letterkunde. III. Reeks, Deel 5. — Afdeel. Natuurkunde. III. Reeks, Deel 5. Amsterdam 1888. 89.

Adam et Christus. Servi Eliezer ad Abraham epistola. Carmina probata in certamine Hoeufftiano ab Acad. R. disciplinarum Neerlandica. Amstelod. 1889.

Programma certaminis poetici ab Acad. R. disciplinarum Nederlandica ex legato Hoeufftiano indicti. Amstelod. 1889.

Annales de l'École Polytechnique de Delft. T. 4, Livr. 3. 4. T. 5, Livr. 1. 2. Leide 1888. 89.

Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem. T. 23, Livr. 2—5. Harlem 1889.

Huygens, Chr., Oeuvres complètes, p. p. la Société Hollandaise des sciences. T. II. La Haye 1889.

Archives du Musée Teyler. Sér. II. Vol. 3, P. 2. 3. Harlem 1888. 89.

Fondation Teyler. Catalogue de la bibliothèque, dressé p. *C. Ekama*. Livr. 7. 8. Harlem 1887. 88.

Handelingen en Mededeelingen van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden over het jaar 1887. 1888. Leiden 1887. 88.

Levensberigten der afgestorvene medeleden van de Maatschappij der Nederl. Letterkunde te Leiden. Bijlage tot de Handelingen van 1887. 1888. Leiden 1887. 88.

Tijdschrift voor Nederlandsche taal- en letterkunde, uitgeg. vanwege de Maatsch. der Nederl. Letterkunde. Jaarg. 1—8. Leiden 1881—88.

Nederlandsch kruidkundig Archief. Verslagen en Mededeelingen der Nederlandsche botanische Vereeniging. Ser. II. Deel 5, St. 3. Nijmegen 1889.

Programme de la Société Batave de philosophie expérimentale de Rotterdam. 1888.

Aanteekeningen van het verhandelde in de sectië-vergaderingen van het Provinciaal Utrechtsch Genootschap van kunsten en wetensch., ter gelegenheid van de algem. vergad. gehouden d. 28. Juni 1887; den 26. Juni 1888. Utrecht 1887. 88.

Questions mises au concours par la Société des arts et des sciences établie à Utrecht, 1889.

Digitized by Google

Verslag van het verhandelde in de algem. vergad. van het Provinciaal Utrechtsch Genootschap van kunsten en wetensch., gehouden d. 28. Juni 1887; d. 26. Juni 1888. Utrecht 1887. 88.

Kooperberg, Ph., Geneeskundige Plaatsbeschrijving van Leeuwarden. Uitgeg. d. het Prov. Utrechtsch Genootsch. v. kunsten en wetensch. 's Gravenhage 1888.

Netscher, P. M., Geschiedenis van de koloniën Essequebo, Demerary en Berbice. Uitgeg. d. het Prov. Utrechtsch Genootsch. v. kunsten en wetensch. — Laatste levensjaren en liquidatie der Societeit van Berbice. Nadere bijlage tot de Geschiedenis van de koloniën Essequebo, Demerary en Berbice. 's Gravenhage 1888.

Riemsdijk, Th. H. van, Bijdragen tot de geschiedenis van de kerspelkerk van St. Jacob te Utrecht. Uitgeg. met ondersteuning van het Prov. Utrechtsch Genootsch. v. kunsten en wetensch. Leiden 1888.

Bijdragen en Mededeelingen van het Historisch Genootschap gevestigd te Utrecht. Deel 11. Utrecht 1888.

Werken van het Historisch Genootschap gevestigd te Utrecht. N. Ser. 51—53. Utrecht 1889.

Onderzoekingen gedaan in het Physiol. Laboratorium d. Utrechtsche Hoogeschool. III. Reeks, XI. Utrecht 1889.

Italien.

Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. No. 72 (1888) e Indici. No. 73 (1889) — 95. Firenze 1888. 89.

Bollettino delle opere moderne straniere acquistate dalle biblioteche pubbliche governative del regno d'Italia. Vol. 3, No. 5. 6 e Indice. Vol. 4, No. 1—3. Roma 1888. 89.

Per la edizione nazionale delle opere di Galileo Galilei sotto gli auspicii di S. M. il Rè d'Italia. Indice alfabetico e topografico del commercio epistolare. Firenze 1889.

Bollettino della Società italiana dei Microscopisti. Anno I. Vol. 1, Fasc. 1. 2. Acireale 1889.

Memorie dell' Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. Ser. IV. T. 8. 9. Bologna 1887. 88.

Concorso libero al premio Aldini sui mezzi di salvezza e difesa contro gl'incendi. Bologna 1888.

R. Académie des sciences de l'Institut de Bologne. Note sur les derniers progrès de la question de l'unification du calendrier dans ses rapports avec l'heure universelle. Bologne 1888.

Memorie della R. Accademia di scienze, lettere ed arti di Modena. Ser. II. Vol. 6. Modena 1888.

Rendiconto dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). Ser. II. Vol. II (Anno 27), Fasc. 6—10. Napoli 1888.

Atti della R. Accademia di scienze morali e politiche di Napoli. Vol. 23. Napoli 1889.

Società Reale di Napoli. Rendiconto delle tornate e dei lavori dell' Accademia di scienze morali e politiche. Anno 27 (1888). Napoli 1888.

Atti e Memorie della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Padova. N. S. Vol. 5. Padova 1889.

Digitized by Google

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. T. 3 (1889). Fasc. 1—5. Palermo 1889.

Giornale di scienze naturali ed economiche, pubbl. p. cura della Società di scienze naturali ed economiche di Palermo. Vol. 19 (Anno 1888). Palermo 1888.

Atti e Rendiconti della Accademia medico-chirurgica di Perugia. Vol. 1, Fasc. 1. 2. 4. Perugia 1889.

Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa. Della Serie Vol. 10 (Scienze fis. e mat., Vol. 5). 11 (Filosofia e filologia, Vol. 6). Pisa 1888. 89.

Processi verbali della Società Toscana di scienze naturali residente in Pisa. Vol. 6, adunanza del 11. Nov. 1888, 13. Genn., 17. Febbr. e 24. Marzo, 12. Maggio 1889.

Commemorazione di Giuseppe Meneghini fatta nell' Aula Magna dell' Università Pisana. Pisa 1889.

Atti della R. Accademia de' Lincei. Serie IV. Memorie della Classe di scienze fisiche, matem. e naturali. Vol. 3. 4. Roma 1886. 87. — Rendiconti. Vol. 4, II. Sem., Fasc. 6—12. Vol. 5, I. Sem., Fasc. 1—12. II. Sem., Fasc. 1—5. Roma 1888. 89.

Mittheilungen des Kais. Deutschen Archaeologischen Instituts. Römische Abtheilung (Bullettino dell' Imp. Istituto Archeologico Germanico. Sezione Romana). Bd. 3, H. 4. Bd. 4, H. 1—3. Rom 1888. 89.

Atti della R. Accademia dei Fisiocritici di Siena. Ser. IV. Vol. 1, Fasc. 1—7. Siena 1889.

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. 24, Disp. 1—15. Torino 1889.

Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino. Serie II. T. 39. Torino 1889.

Bollettino dell' Osservatorio della R. Università di Torino. Anno 22 (1887), Parte meteorologica. Torino 1889.

Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. T. 5, Disp. 10. T. 6, Disp. 1—10. T. 7, Disp. 1. 2. Venezia 1887—89.

Temi di premio proclamati dal R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti nella solenne adunanza del 19. maggio 1889.

Russland.

Meteorologische Beobachtungen angestellt in Dorpat. Bd. 5, S. 121—152 (Dorpat 1888. 89).

Bericht über die Ergebnisse der Beobachtungen an den Regenstationen der Kaiserlichen livländ. gemeinnützigen u. ökonom. Societät f. d. J. 1887. Dorpat 1889.

Acta Societatis scientiarum Fennicae. T. 16. Helsingforsiae 1888.

Öfversigt af Finska Vetenskabs-Societetens Förhandlingar. 30 (1887—88). Helsingfors 1888.

Finlands geologiska Undersökning. Kartbladet 12—15. Beskrifning till kartbladet 12—15. Helsingfors 1887.

Fennia. Bulletins de la Société de géographie finlandaise. I. Helsingfors 1889.

Journal de la Société finno-ougrienne. Suomalais-ugrilaisen Seuran Aikakauskirja. T. 5—7. Helsingissä 1889.

Digitized by Google

Universitetskija Izvěstija. God 28 (1888), No. 10—12. God 29 (1889), No. 1—10. Kiev 1888. 89.

Bulletin de la Société Impér. des Naturalistes de Moscou. Année 1888, No. 4. 1889, No. 1. 2. Moscou 1889.

Meteorologische Beobachtungen, ausgeführt am Meteorol. Observatorium d. Landwirthschaftlichen Akademie zu Moskau. 1888, 2. Hälfte (Beilage z. Bulletin de la Soc. Imp. des Natural. de Moscou, II. Série, T. 2). Moskau 1889.

Nouveaux Mémoires de la Société Impér. des Naturalistes de Moscou. T. 15 (T. 20 de la collection), Livr. 6. Moscou 1889.

Bulletin de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg. Nouv. Série. T. 1, No. 1. 2. St.-Pétersbourg 1889.

Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg. VII. Série. T. 36, No. 12—17. T. 37, No. 1. St.-Pétersbourg 1888. 89.

Annalen d. physikalischen Centralobservatoriums, herausg. von H. Wild. Jahrg. 1887, Th. 2. St.-Petersburg 1888.

Materialy po archeologii Rossii, izdavaemye Imp. archeol. Komissieju. III (*Radlov*, V., Sibirskija drevnosti. T. 1. Vyp. 1). S.-Peterburg 1888.

Acta Horti Petropolitani. T. 10, Fasc. 2. Petropoli 1889.

Trudy S.-Peterburgskago Obščestva estestvoispytatelej. T. 17, 2. T. 18. 19, Otdělenie geologii i mineral. S.-Peterburg 1886—88. — Priloženie: Trudy Aralo-Kasp. Ekspedicii. Vypusk 6. St.-Peterburg 1889.

Godičnyj Akt Imp. S.-Peterburgskago Universiteta 8. Febr. 1887. S.-Peterburg 1887.

Obozrenie prepodavanija nauk v Imp. S.-Peterburgsk. Universitetè na vesennee i osennee polugodie 1888 goda. S.-Peterburg 1888.

Otčet o sostojanii Imp. S.-Peterburgsk. Universiteta za 1887 god. S.-Peterburg 1888.

Protokoly zasědanij sověta Imp. S.-Peterburgsk. Universiteta. No. 36, i priloženie: Inventar biblioteki Universiteta, No. VI. S.-Peterburg 1887. No. 37, i priloženie: Catalogus alphabeticus librorum, qui in bibliotheca speculae Imp. literarum universitatis Petropolitanae asservantur. Petropoli 1888. — Nebst 16 Dissertationen.

Zapiski istoriko-philologičeskago Fakulteta Imp. S.-Peterburgsk. Universiteta. Čast 11. 16. S.-Peterburg 1882. 87.

Nezelenov, *A. J.*, Rěč o Puškině. S.-Peterburg 1887.

Salemann, *C.*, et *V. Rosen*, Indices alphabetici codicum mss. persicorum turcicorum arabicorum, qui in bibliotheca Imp. Universitatis Petropol. adservantur. Petropoli 1888.

Shams i Fachrii Lexicon persicum. Ed. *C. Salemann*. Fasc. 1. Casani 1887.

Correspondenzblatt des Naturforscher-Vereins zu Riga. Jahrg. 31. Riga 1888.

Schweden und Norwegen.

Sveriges offentliga Bibliotek Stockholm, Upsala, Lund. Accessions-Catalog III (1888). Stockholm 1889.

Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania. Aar 1888. Christiania 1889.

Jahrbuch des Norwegischen meteorologischen Instituts für 1885. 1886. 1887. Christiania 1886—89.

Digitized by Google

Fearnley, C., u. *H. Geelmuyden*, Zonenbeobachtungen d. Sterne zwischen 64°50′ u. 70°10′ nördl. Declination. Christiania 1888.

Reusch, H., Bømmeløen og Karmøen med omgivelser geologisk beskrevne. Udg. af d. Geologiske Undersøgelse. Kristiania 1888.

Daae, L., Om humanisten og satirikeren Joh. Lauremberg (Univ.-Progr.). Christiania 1884. — *Daae, L.*, Symbolae ad historiam ecclesiast. provinciarum septentrionalium magni dissidii synodique Constantiensis temporibus (Progr. acad.). ib. 1888. — *Dietrichson, L.*, Antinoos. Eine kunstarchäol. Untersuchung (Univ.-Progr. f. 1. Sem. 1884). ib. 1884. — *Helland, A.*, Lakis kratere og lavastrømme (Univ.-Progr. f. 2. Sem. 1885). ib. 1886. — *Løseth, E.*, Tristanromanens gammelfranske prosahaandskrifter i Parisernationalbibliotheket. ib. 1888. — *Schübeler, F. C.*, Viridarium Norvegicum. Norges vextrige. Bd. 1 (Univ.-Progr. f. 1. Sem. 1885). Bd. 2, H. 2 (Univ.-Progr. f. 2. Sem. 1887). ib. 1885. 88.

Friis, J. A., Ethnografisk Kart over Finmarkens Amt. No. 3 (Kart 1—6). Christiania 1888.

Acta Universitatis Lundensis. Lunds Universitets Års-Skrift. T. 24 (1887/88), I. II. Lund 1887. 88.

Bihang till Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Bd. 9, 1. 2. 10, 1. 2. 11, 1. 2. 12, 1—4. 13, 1—4. Stockholm 1884—88. — Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademie. Maj 1885. 1886. 1887. 1888. 1889 (Mitglieder-Verz.). Stockholm d. J.

Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Ny Följd. Bd. 20 (1882. 83), H. 1. 2. Bd. 21 (1884 85), H. 1. 2. Nebst Atlas zu Bd. 21, No. 8. Stockholm 1884—87.

Meteorologiska Jakttagelser i Sverige, utg. af Kong. Svenska Vetenskaps-Akademien. Bd. 24—26 (II. Ser. Bd. 8—12), År 1880—84. Stockholm 1885—89.

Lefnadsteckningar öfver Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens efter år 1854 aflidna Ledamöter. Bd. 2, H. 3. Stockholm 1885.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps Akademiens Förhandlingar. Årgangen 41 (1884) —45 (1888). Stockholm 1885—89.

Dahlgren, E. W., Förteckning öfver innehållet i Kongl. Svenska Vet.-Akademiens Skrifter 1826—83. Stockholm 1884.

Kongl. Vitterhets Historie och Antiquitets Akademiens Månadsblad. Årg. 16 (1887). Stockholm 1889.

Astronomiska Jakttagelser och Undersökningar anställda på Stockholms Observatorium. Utg. af H. Gyldén. Bd. 2, H. 2. 4. Bd. 3, H. 1—5. Stockholm 1885—88.

Entomologisk Tidskrift, på föranstaltende af Entomologiska Föreningen i Stockholm utg. af Jac. Spångberg. Årg. 9 (1888), H. 1—4. Stockholm 1888.

Tromsø Museums Aarshefter. 12. Tromsø 1889. — Tromsø Museums Aarsberetning for 1888. Tromsø 1889.

Bulletin mensuel de l'Observatoire météorologique de l'Université d'Upsal. Vol. 20 (1888). Upsal 1888—89.

Schweiz.

Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft in Solothurn 6.—8. Aug. 1888. 71. Jahresversammlung. Jahresbericht 1887/88. Solothurn 1888.

Digitized by Google

Compte-rendu des travaux présentés à la 71. session de la Société Helv. des sciences naturelles réunie à Soleure 6.—8. août 1888. Genève 1888.

Beiträge zur vaterländischen Geschichte. Hrsg. v. der Historischen und Antiquarischen Gesellschaft in Basel. N. F. Bd. 3 (der ganzen Reihe Bd. 13), H. 1. 2. Basel 1889.

13. Jahresbericht der Historischen u. Antiquarischen Gesellschaft zu Basel über d. Vereinsjahr 1887/88. 14. Jahresbericht über d. Vereinsj. 1888/89. Basel 1888. 89.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern aus d. J. 1888 (No. 1195—1214). Bern 1889.

Jahresbericht der naturforschenden Gesellschaft Graubündens. N. F. Jahrg. 32 (Vereinsjahr 1887/88). Chur 1889.

Mémoires de la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève. T. 30, P. 1. Genève 1888.

Vierteljahrsschrift d. naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Jahrg. 33, H. 2—4. Jahrg. 34, H. 1. 2. Zürich 1888. 89.

Serbien.

Srpska kralj. Akademija. Glas 13. 15—17. U Beograd 1889.

Spanien.

Real Academia de ciencias morales y políticas. Año de 1889. Madrid 1889.

Memorias de la Real Academia de ciencias morales y políticas. T. 6. Madrid 1889.

Nordamerika.

Transactions of the American Philological Association. Vol. 18 (1887). Boston 1888.

Journal of the American Oriental Society. Vol. 13. New Haven 1889.

Proceedings of the American Oriental Society, at Philadelphia, Oct. 1888; at Boston, May 1889.

Johns Hopkins University Circulars. Vol. 7, No. 66. 67. Vol. 8. No. 69—74. Vol. 9, No. 76. Baltimore 1888. 89.

American Journal of Mathematics pure and applied. Publ. under the auspices of the Johns Hopkins University. Vol. X, No. 4. Vol. XI, No. 1—4. Baltimore 1888. 89.

Johns Hopkins University Studies in historical and political science. Vol. VI. VII, 1—9. Baltimore 1888. 89.

Memoirs of the American Academy of arts and sciences [Boston]. Vol. 11 (Centennial Volume), P. 6, N. 6. 7. Cambridge 1888.

Proceedings of the American Academy of arts and sciences. N. Ser. Vol. 15. (Whole Ser. Vol. 23), P. I. (1887/88). Selected from the Records. Boston 1888.

Proceedings of the Boston Society of natural sciences. Vol. 23, P. III (Febr. 1886—Dec. 1887). IV (Dec. 1887—May 1888). Boston 1888.

Bulletin of the Museum of comparative Zoology, at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. 16 (Geological Series, Vol. 2), No. 3—5. Vol. 17, No. 3—5. Vol. 18. Cambridge, Mass. 1888. 89.

Digitized by Google

Memoirs of the Museum of comparative Zoology, at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. XIV, No. 1, P. II, 1. Cambridge, Mass. 1889.

Annual Report of the Curator of the Museum of comparative Zoology, at Harvard College, Cambridge, Mass., for 1887/88. Cambridge, Mass. 1888.

Annual Report of the Geological Survey of Pennsylvania for 1886. P. 4 with Atlas. Harrisburg 1887.

Second Geological Survey of Pennsylvania. AA. Atlas Eastern middle Anthracite Field, P. II. Atlas Northern Anthracite Field, P. II—IV. — Atlas to Reports H^2 and H^3. — Catalogue of the Geological Museum (O^3), P. III. Harrisburg 1888. 89.

Anales del Ministerio de fomento de la Republica Mexicana. T. 8. Mexico 1887.

Memorias de la Sociedad científica »Antonio Alzate«. T. 2, Cuad. 5—11. México 1888. 89.

Observatorio meteorologico-magnético central de México. Boletin mensual. T. 1 (1888), No. 8—12 u. Supl. al No. 12; Resumen del año de 1888. T. 2 (1889), No. 1. México 1888. 89.

The geological and natural history Survey of Minnesota. The 16. annual Report, for the year 1887. Minneapolis (St. Paul) 1888.

Proceedings and Transactions of the R. Society of Canada for the year 1888. Vol. 6. Montreal 1889.

Geological and Natural History Survey of Canada. Contributions to Canadian Palaeontology, by *J. F. Whiteaves*. Vol. I, P. 2. Montreal 1889.

Report for the year 1888/89, presented by the Board of Managers of the Observatory of Yale University to the President and Fellows. (New Haven) o. J.

Annals of the New York Academy of sciences (late Lyceum of natural history). Vol. IV, No. 5—11. New York 1888. 89.

Transactions of the New York Academy of sciences. Vol. VII, No. 3—8. Vol. VIII, No. 1—4. New York 1887—89.

Bulletin of the American Geographical Society. Vol. 20 (1888), No. 4 and Supplement. Vol. 21 (1889), No. 1—3. New York 1888. 89.

Proceedings of the Academy of natural sciences of Philadelphia. 1888, P. 3 (Oct.—Dec.). 1889, P. 1 (Jan.—Apr.). Philadelphia 1888. 89.

Proceedings of the American Philosophical Society, held at Philadelphia, for promoting useful knowledge. Vol. XXV, No. 128. Vol. XXVI, No. 129. Philadelphia 1888. 89.

Transactions of the American Philosophical Society held at Philadelphia for promoting useful knowledge. N. Ser. Vol. 16, P. II, Article 2—6. Philadelphia 1888.

Report of the Committee appointed by the American Philosophical Society to assist the Commission on amended orthografy. — Supplementary Report of the Committee appointed to consider an international language. — Rules and regulations of the Magellanic Premium. — Rules and regulations of the Henry M. Phillips' Prize Essay Fund. — List of deficiencies in the library of the American Philos. Society. P. 1. Philadelphia 1888. 89.

Phillips, H., Supplementary Register of written communications published in the Transactions and Proceedings of the American Philos. Society

Digitized by Google

1881—89. Philadelphia 1889. — Subject Register of papers published in the Transact. and Proceed. of the Amer. Philos. Society. Philadelphia 1889.

Observatorio meteorológico del Colegio del Estado de Puebla. Observaciones, 1889, Enero—Oct. Puebla d. J.

Gonzalez, B. B., Resumen de 11 años de observaciones meteorologicas en el Colegio del Estado de Puebla. Puebla 1889.

The Transactions of the Academy of science of St. Louis. Vol. 5, No. 1. 2. St. Louis 1888.

Proceedings of the Californian Academy of sciences. II. Ser. Vol. 1, P. 1. 2 (1888). San Francisco 1889.

Transactions of the 18th. and 19th. annual meetings of the Kansas Academy of science (1885—86), with the reports of the Secretary. Vol. 10. Topeka, Kansas, 1887.

Proceedings of the Canadian Institute, Toronto, being a continuation of the Canadian Journal of science, literature and history. III. Ser. Vol. 6, Fasc. 2. Toronto 1889.

Annual Report of the Canadian Institute, Session 1887—88, being part of appendix L to the Report of the Minister of education, Ontario, 1888. Toronto 1889.

Memoirs of the National Academy of sciences. Vol. 4, P. 1. Washington 1888.

Bureau of education. Circular of information, 1888, No. 4. 7. 1889, No. 1. Washington 1889.

Bureau of education. Report of the Commissioner of education for the year 1886/87. Washington 1888.

Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution for the year 1886, P. II. Washington 1889.

Report upon international exchanges under the direction of the Smithsonian Institution for the year ending June 30, 1888. By *J. H. Kidder*. Washington 1889.

Annual Report of the Secretary of war for the year 1887. Vol. 4, P. II. Washington 1887.

Annual Report of the Chief Signal-Officer to the Secretary of war for the year 1888. Washington 1889.

United States Coast and Geodetic Survey. Bulletin No. 5—8. 8, 2d. ed.; 9—13 (Washington 1889).

Report of the Superintendent of the U. S. Coast and Geodetic Survey, showing the progress of the work during the fiscal year ending with June 1887. P. I (Text). P. II (Sketches). Washington 1889.

Bulletin of the U. S. Geological Survey (Department of the Interior). No. 40—47. Washington 1887. 88.

U. S. Geological Survey. Mineral Resources of the United States. Calendar year 1887. Washington 1888.

Südamerika.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. T. 26, Entrega 1—6. T. 27, Entr. 1—6. T. 28, Entr. 1. 2. Buenos Aires 1888. 89.

Digitized by Google

Boletin de la Academia nacional de ciencias de la República Argentina [Córdoba]. T. XI, Entrega 3. Buenos Aires 1888.

Revista do Observatorio. Publicação mensal do Imp. Observatorio do Rio de Janeiro. Anno 4 (1889), No. 1—9. Rio de Janeiro 1889.

Verhandlungen des deutschen wissenschaftlichen Vereins zu Santiago. Bd. 2, H. 1. Santiago 1889.

Asien.

Notulen van de algemeene en bestuurs-vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 26 (1888), No. 3. 4. Deel 27 (1889), No. 1. Batavia 1888. 89.

Algemeen Reglement en Reglement van orde vor het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Batavia 1889.

Tijdschrift voor Indische taal-, land- en volkenkunde, uitgeg. door het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 32, Afl. 5. 6. Deel 33, Afl. 1. Batavia,'s Hage 1889.

Nederlandsch-Indisch Plakaatboek 1602—1811, door J. A. van der Chijs. Deel V. 1743—50. Uitgeg. door het Batav. Genootsch. v. kunsten en wetenschappen. Batavia,'s Hage 1888.

Dagh-Register, gehouden int Casteel Batavia vant passerende daer ter plaetse als over geheel Nederlandts-India anno 1659. Uitgeg. door het Batav. Genootsch. van kunsten en wetensch., met medewerking van de Nederlandsch-Indische Regeering en onder toezicht van J. A. van der Chijs. Batavia, 's Hage 1889.

Observations made at the Magnetical and Meteorological Observatory at Batavia. Publ. by order of the Government of Netherlands India. Vol. 8 (1883—85). 10 (1887). Batavia 1888.

Regenwaarnemingen in Nederlandsch-Indië. Jaarg. 9 (1887). Batavia 1888.

Natuurkundige Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië, uitgeg. d. de Kon. Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indië. Deel 48 (VIII. Ser., D. 9). Batavia 1889.

India Museum Notes, issued by the Trustees. Vol. 1, No. 1. Calcutta 1889.

Cotes, E. C. and *C. Swinhoe*, A Catalogue of the Moths of India. P. IV—VII. Calcutta 1888. 89.

Theobald, W., Index of the genera and species of Mollusca in the hand list of the India Museum. P. I. II. Calcutta 1889.

Wood-Mason, J., Catalogue of the Mantodea, with descriptions of new genera and species, and an enumeration of the specimens in the collection of the India Museum. No. 1. Calcutta 1889.

Journal of the China Branch of the R. Asiatic Society. N. Ser. Vol. 22 (1887), No. 6. Vol. 23 (1888), No. 1—3. Shanghai 1888. 89.

Imperial University of Japan (Teikoku Daigaku). The Calendar for the year 1888/89. Tōkyō 1888.

Journal of the College of science, Imperial University, Japan. Vol. 2, P. 4. 5. Vol. 3, P. 1. 2. Tōkyō 1888. 89.

Mittheilungen aus der Medicinischen Facultät der Kais. Japanischen Universität. Bd. 1, No. 3. Tokio 1889.

Digitized by Google

Australien.

Proceedings of the R. Society of Victoria. New Ser., Vol. 1. Melbourne 1889.

Transactions of the R. Society of Victoria. Vol. 1, P. 1. Melbourne 1888.

Journal and Proceedings of the R. Society of New South Wales. Vol. 22 (1888), P. 2. Sydney 1889.

New South Wales. Australian Museum. Report of Trustees for the year 1888 (Sydney 1889).

2. Einzelne Schriften.

Apery, P., Contribution à l'étude de la fièvre Dengue. Constantinople 1889.

Asbóth, Joh. v., Bosnien und die Herzegowina. Wien 1888.

Cayley, Arth., The collected mathematical papers. Vol. 1. 2. Cambridge 1889.

Dickerson, E. N., Joseph Henry and the magnetic telegraph. New York 1885.

Doedes, J. I., Collectie van Rariora, inzonderheid Godsdienst en Theologie. Utrecht (1887).

Geinitz, H. B., Über die rothen und bunten Mergel der oberen Dyas bei Manchester (S. A.). (Dresden 1889).

Graf, J. H., Der Mathematiker Joh. Sam. König und das Princip der kleinsten Aktion. Bern 1889.

Löwenberg, Akustische Untersuchungen über die Nasenvokale (S. A.). Berlin 1889.

Loomis, Elias, Contributions to meteorology. Chapter III. Revised edition. New Haven 1889.

Pertsch, W., Verzeichniss der türkischen Handschriften der Königl. Bibliothek zu Berlin (Die Handschriften-Verzeichnisse der Königl. Bibliothek zu Berlin, Bd. 6). Berlin 1889.

Saint-Lager, Le procès de la nomenclature botanique et zoologique. Paris 1886.

— Recherches sur les anciens Herbaria. Paris 1886.

Schmidt, Karl, Geschichte der Pädagogik. 4. Aufl. Bd. 1. Geschichte der Pädagogik in der vorchristlichen Zeit. Von *E. Hannak*. Cöthen 1890.

Schreiber, P., Neuerungen und Erfahrungen an Apparaten zur Prüfung von Thermometern und Aneroidbarometern, Windfahne und Windstärkemesser u.s.w. (S. A.). o. O. 1889.

— Die Theilnahme Sachsens an den meteorologischen Forschungen (S. A.). (Dresden 1889).

— Über das Lamont'sche Verfahren zur Ableitung der täglichen Periode aus stündlichen Beobachtungen (S. A.). o. O. (1889).

— Über einen registrirenden Regenmesser (S. A.). o. O. 1889.

Simonsen, D., Sculptures et inscriptions de Palmyre à la Glyptothèque de Ny Carlsberg. Copenhague 1889.

Vogel, J., Reformations-Festspiel. Die Einführung der Reformation in Plauen i/Vogtl. Gotha 1888.

Digitized by Google

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

Digitized by Google

SITZUNG VOM 7. JANUAR 1889.

Schenk, *Bemerkungen über einige Pflanzenreste aus den triasischen und liasischen Bildungen der Umgebung des Comersees.* Mit einer Tafel.

Die im Folgenden zu besprechenden Pflanzenreste, die mir von Herrn Stoppani zu Mailand zur Untersuchung anvertraut wurden, stammen von verschiedenen Fundorten der Umgebung des Comersees und Bergamos, zum Theile von Fundorten an welchen schon früher Escher von der Linth Pflanzenreste sammelte, deren Besprechung Heer als Anhang zur Abhandlung Escher's veröffentlichte. Vergl. Escher von der Linth, geologische Bemerkungen über das nördliche Vorarlberg und einige angrenzende Gegenden. Anhang. — Heer, Beschreibung der Pflanzenreste in: Neue Denkschr. der allgem. schweiz. Gesellschaft für die ges. Naturwissensch. Decas II. Bd. III. Zürich, 1853, an welchem Orte diese Reste auf Taf. 6—8 abgebildet sind.

Die von Heer untersuchten Pflanzenreste würden nach dessen Bestimmungen zum Theile dem bunten Sandsteine, zum Theile dem Keuper angehören. Im Ganzen sind von Heer, da *Equisetites columnaris* und *Calamites arenaceus* als *Equisetum arenaceum* vereinigt werden müssen, dreizehn Arten unterschieden, von welchen zwei, *Voltzia heterophylla* und *Aethophyllum speciosum*, beide von Regoledo ober Varena am Comersee, dem bunten Sandsteine angehören. Von der ersteren Art lagen Heer (a. a. O. tab. 8. fig. 1. 2b) der obere Theil eines beblätterten Zweiges mit noch nicht ganz entfalteter Endknospe und zwei unvollständige Zapfenschuppen vor, von letzterer einzelne schmale lineare Blattfragmente, ein mit ein paar Blättern besetztes Stengelfragment und ein als Fruchtähre erklärter Rest, an welchem ausser einigen Bracteen ähnlichen, appendiculären Organen

Digitized by Google

nichts erkannt werden kann. Die beiden Reste mögen richtig bestimmt sein, indess ihre Erhaltung ist nicht von der Art, dass die Bestimmung zweifellos wäre. Die beiden Schuppen (a. a. O. tab. 8. fig. 2a) dürften allerdings, nach ihrer verschmälerten Basis zu urtheilen, Schuppen einer *Voltzia* sein, da jedoch der obere Theil fehlt, neben der genannten Art aber noch andere existiren, ferner der beblätterte Zweig durch seine kurzen Blätter von jener der *V. heterophylla* Brongniart's abweicht, welcher auch in der von Heer citirten Tafel 6. fig. 1. Schimper's schlankere Blätter trägt, so bleibt die Bestimmung unsicher. Ob die dichte Anhäufung von appendiculären Organen an der Spitze des abgebildeten Exemplares ein junger Zapfen ist, wie Heer annimmt, oder eine Blattknospe, lässt sich nicht sagen. Heer bildet allerdings dreitheilige Organe ab, allein bei der dichten Lage derselben ist eine Täuschung leicht möglich. Die mit *Aethophyllum* vereinigten Stengel- und Blattfragmente sehen allerdings jenen der Pflanze des bunten Sandsteines sehr ähnlich und liegt kein Grund vor, sie von ihnen zu trennen, ebensowenig lässt sich aber auch behaupten, dass sie unbedingt zu ihr gehören, da wir z. B. bei *Schizoneura Meriani* Schimper denselben Blättern begegnen, die Fruchtähre aber einen Erhaltungszustand besitzt, welcher wohl, wenn die übrigen Theile besser erhalten wären, eine Vermuthung rechtfertigte, so aber gar keinen Aufschluss giebt. Was können wir überhaupt über den Bau der Fruchtähre von *Aethophyllum* sagen, was über jene, welche in der Lettenkohle von Würzburg vorkommen und von mir (Beitr. zur Flora des Keupers und Bonebed) mit *Schizoneura Meriani* Schimper vermuthungsweise in Verbindung gebracht worden sind? Dass die als *Aethophyllum* bezeichneten Reste den Monocotylen angehören, dürfte endlich auch einmal aufgegeben werden. Ueber den von Schimper als *tige de Yuccites* bezeichneten Stamm Vermuthungen anzustellen, halte ich für zwecklos; sicher ist nur, dass er zu keiner mit *Yucca* verwandten Form gehört. Die Zweig- und Stammfragmente, welche Heer im Zusammenhange mit Blättern a. a. O. tab. 8. fig. 3, mit Astnarben (a. a. O. tab. 8. fig. 4) abbildet, sind nichts weniger als beweisend, bei der ersteren Figur spricht die Zeichnung eher für ein daneben liegendes Blatt, bei der letzteren sind die angeblichen Astnarben kaum etwas anderes als verletzte Stellen, und wären sie es wirklich, so ist ihr Vorhandensein noch kein Beweis für

Digitized by Google

Aethophyllum, sie können bei einer anderen Pflanze ebenso vorkommen, etwas Chararakteristisches haben sie nicht. Die von HEER bestimmten Reste können den von ihm vermutheten Pflanzenresten angehören, ihr Erhaltungszustand gestattet aber nicht, sich über sie mit Ausnahme von *Voltzia* mit Bestimmtheit auszusprechen. Die übrigen von HEER bestimmten Pflanzenreste gehören, so weit sie ein Urtheil gestatten, dem unteren Keuper an. Solche sind *Equisetum arenaceum* Bronn mit *Calamites arenaceus*, das von HEER abgebildete Fragment einer *Taeniopteris* genau den Fiederspitzen der *Danaeopsis marantacea* Heer, wie sie häufig in dem Lettenkohlensandstein Frankens vorkommen, entsprechend, *Pterophyllum Jaegeri* Brongn., *Pecopteris Steinmülleri* Heer und *Bactryllien*, ausserdem die Sporangienähre und ein Stengelfragment eines *Equisetum*, *Equisetites Trompianus* Heer, erstere durch die länglich ovale Form von jener des *E. arenaceum* Bronn und *E. Münsterianum* Schimp. verschieden, unzweifelhaft einer anderen Art angehörig aus Val Trompia. Das Stengelfragment wird von HEER mit *Equisetites Höftianus* Presl aus dem Rhät von Bamberg (Höfen) verglichen, dieser ist jedoch identisch mit *E. Münsteri* Schimp., wie ich dies auf Grund der Originale PRESL's in meiner Flora der Grenzschichten Frankens längst nachgewiesen habe. Meines Erachtens ist es nicht möglich, Equisetenfragmente in diesem Erhaltungszustande sicher zu bestimmen, richtig ist dagegen, dass das Fragment einem Stengelknoten angehört.

Der Erhaltungszustand der mir vorliegenden Exemplare ist zum bei Weitem grössten Theile ein solcher, dass er eine sichere Bestimmung nicht zulässt. Ein grosser Theil der Exemplare besteht aus Stammstücken, entweder in rissige Kohle umgewandelt oder den Abdrücken solcher, deren Oberfläche keine für irgend eine Pflanzenform charakteristische Merkmale zeigt. Dass sie Stammgebilden angehört haben, lässt ihre zuweilen nicht unbedeutende Breite und Länge vermuthen, dass Coniferen dabei in Frage kommen, ist wahrscheinlich, es ist aber aus dem oben erwähnten Grunde nicht möglich, ihren Zusammenhang mit anderen Pflanzenresten nachzuweisen. Reste dieser Art kommen bei Garabuso in der Nähe von Lecco am Comersee, am Monte Pora presso il Giogio di Pressolano vor zum Theile in Sandstein, zum Theile in grauem Schieferthon. An diese Reste reihen sich vereinzelt vorkommende Kriechspuren, jene Form, welche HEER als eine Algengattung, *Taenidium*, beschrieb, wie ja dergleichen Bil-

Digitized by Google

dungen ungeachtet der Nachweise Römer's, Nathorst's, Zeiller's und mir noch immer als Algen functioniren. Die Sammlung enthält solche von Perledo in durch organische Reste schwarz gefärbtem Schiefer neben wirklichen Pflanzenresten. An diese Reste schliessen sich an kleine unbestimmbare Pflanzenfragmente meist von Costa über Lecco am Comersee, dann von Garabuso in Sandsteinschiefer. Zuweilen finden sich zwischen ihnen Fragmente eines feinstreifigen Calamiten von geringem Durchmesser, welche ohne Zweifel mit besser erhaltenen Exemplaren derselben Localitäten identisch sind, ebenso stengelähnliche Fragmente, über deren Zusammenhang sich nichts aussagen lässt. Unter diesen letzteren mögen sich, wie unter den Blattfragmenten auch solche finden, welche von Heer mit *Aethophyllum* vereinigt sind, ich bin jedoch nicht im Stande, an ihnen etwas zu finden, was für diese Gattung spräche. Bekannt ist, dass sehr verschiedene Dinge als *Aethophyllum* bezeichnet worden sind. Diese bis jetzt sprochenen Reste bilden den grösseren Theil der mir vorliegenden Sammlung und mögen im Anschlusse an sie die besser erhaltenen Reste folgen.

Bactryllium Heer.

Diese von Heer zuerst in der oben citirten Abhandlung unterschiedenen kleinen stabförmigen, an beiden Enden abgerundeten Körper sind hinsichtlich ihrer Stellung keineswegs aufgeklärt und werden sie noch heute, wie dies Heer zuerst aussprach, für Pflanzen, den Bacillariaceen entsprechend gehalten. Die Körperchen liegen flach auf den Schichtflächen, dann lässt sich die Structur der Ober- und Unterfläche selbst erkennen, oder sie sind im Abdrucke erhalten, in welchem Falle das Abdrucksbild der Flächen gesehen wird oder sie sind quer durchbrochen, man erkennt dann, dass sie hohl, die Höhlung mit Gesteinsmasse ausgefüllt ist, welche sich häufig durch die hellere Färbung von der dunklen Aussenfläche der Körperchen abhebt, durch welche sie auch auf den helleren Gesteinsflächen sichtbar werden. In der Regel kommen sie sehr zahlreich und nach allen Richtungen gelagert vor, man erhält daher an den einzelnen Stücken die verschiedenen Ansichten. Eine oder zwei Längsfurchen durchziehen sie, begrenzt sind diese Furchen von einer Erhöhung, bei einigen Arten kommen feine Querstreifen vor, welche bei anderen fehlen. Nach Heer's Angabe besteht die

Digitized by Google

das ausfüllende Gestein umschliessende Hülle aus einer in Salpetersäure unlöslichen Verbindung, von welcher er glaubt, dass sie Kieselsäure sei, beim Glühen ändert sich die dunkle Färbung der Objecte nicht, sie rührt also nicht von Kohle her. Diese Angaben von HEER habe ich bei den mir vorliegenden Exemplaren, sowie bei Exemplaren aus Vorarlberg und von Staudach in den Nordalpen Bayerns bestätigt gefunden. In meiner Flora der Grenzschichten Frankens, Wiesbaden, Kreidel, 1866—1868, pag. 2 habe ich darauf aufmerksam gemacht, dass es Reste ähnlichen Aussehens giebt, welche, anderen Ursprungs, durch Salpetersäure gelöst werden. Nach dem oben erwähnten Verhalten und weil die Sculptur der Hülle nur den Kieselmembranen der Bacillariaceen eigen ist, vermuthet HEER in ihnen Glieder dieser Familie. So lange uns über diese Körperchen keine anderen Aufschlüsse als die erwähnten vorliegen, wird man HEER's Ansicht gelten lassen, zugleich aber auch die Frage nach ihrem Zusammenhang mit anderen Organismen als nicht gelöst betrachten müssen. Von den durch HEER a. a. O. unterschiedenen Arten liegen mir zwei Arten vor: *B. canaliculatum* Heer von Val Gorno in grosser Anzahl, sodann seltner von dem nämlichen Fundorte *B. Schmidii* Heer (Taf. I, Fig. 1. 2.), beide ohne Streifung, erstere in der Mittellinie mit einer Furche, zu deren Seite je eine Erhöhung, letztere mit einer Furche in der Mitte. Die erstere auch von ESCHER VON DER LINTH in Val Gorno gefunden, beide mit den Darstellungen HEER's a. a. O. Taf. 6. E. F. übereinstimmend.

Equisetaceen.

Fragmente von Steinkernen eines *Equisetum*, welche ich von *Calamites arenaceus* nicht trennen kann, liegen mir in ziemlicher Anzahl und von verschiedenem Durchmesser, dem Stamme und den Aesten angehörend, vor. Die Erhaltung lässt nicht selten zu wünschen übrig. Da ausnahmslos die Calamitenzustände vorliegen, berindete, mit den gezähnten Scheiden versehene Exemplare fehlen, so ist nicht mit unbedingter Sicherheit zu sagen, ob diese Reste wirklich und alle zu *E. arenaceum* oder einer anderen Art oder einer Gattung mit gleichen Steinkernen angehören, um so mehr, als andere später zu erwähnende Reste auf das Vorhandensein einer solchen hinweisen, überdies HEER aus dem Val Trompia einen Sporangienstand und ein Zweigfragment eines *Equisetum*, *E. Trompianum*, beschrieben hat. Da

Digitized by Google

diese Steinkerne die Structur der Innenröhre ausdrücken, so können sie nur dann etwas Charakteristisches zeigen, wenn dies durch deren Bau bedingt ist. Dies ist bei den mit *Equisetum* bezeichneten Resten, da sie nur Abgüsse sind, nicht der Fall, die unterscheidenden Merkmale finden sich an jenen Theilen, welche bei den Steinkernen nicht erhalten sind. Sie sind sämmtlich fein und dicht gestreift, die Streifen alternirend, entweder Stücke von Internodien oder Internodien mit Knoten, von 3—16 Centim. Länge und 0,5—6,0 Centim. Durchmesser, beinahe stets ohne Aeste, selten mit einem Ansatze eines Astes, dieser dann mit kegelförmiger Basis an dem Stamme (Taf. I, Fig. 5) ansitzend. Einzelne Exemplare sind stark macerirt und ragen dann aus dem weniger macerirten Theile des Stengels die Fibrovasalbündel isolirt hervor. Ein leider sehr schlecht erhaltenes Fragment mit zwei oder drei etwas besser erhaltenen Sporophyllen liegt mir von Garabuso bei Lecco vor. Die meisten dieser Reste stammen von diesem Fundorte, andere von Costa über Lecco, von Dossena, Vallée de l'Aupa, Thal südlich von Dordola, am Fusse des Gran Colle (Taf. I. Fig. 5, 6).

Neben diesen Axenresten grösseren oder kleineren Durchmessers finden sich Fragmente anderer, welche von ihnen durch stärkere und mehr entfernt stehende Rippen verschieden sind. Jene geringeren Durchmesser ähneln den von Heer a. a. O. auf Tab. 8. Fig. 2. 3 abgebildeten, mit *Aethophyllum speciosum* Schimp. vereinigten Stengelfragmenten. Im Eingange habe ich schon erwähnt, dass der Nachweis des Vorkommens von *Aethophyllum* auf ziemlich schwachen Füssen steht, hier sei weiter bemerkt, dass die cylindrischen oder plattgedrückten Axenreste von $^1/_2$ Centim. bis $4^1/_2$ Centim. Durchmesser den Steinkernen der *Schizoneura Meriani* Heer wie sie in der Lettenkohle Frankens vorkommen, sehr ähnlich, und in den von mir herausgegebenen Abbildungen Schönlein's von fossilen Pflanzen aus dem Keuper Frankens (Wiesbaden, Kreidel, 1865) Taf. 2, Fig. 2. 3. Taf. 5, Fig. 3. Taf. 6, Fig. 2. Taf. 12, Fig. 2. vorzüglich abgebildet sind. Astansätze und Blätter im Zusammenhange habe ich an den Axentheilen zweifellos nicht beobachtet, wohl aber kommen mit ihnen Fragmente schmaler linearer Blätter (Taf. I. Fig. 7. 8. 10) mit parallelen Leitbündeln vor, welche ich nicht von jenen der *Schizoneura Meriani* Schimper (vergl. Schönlein-Schenk, a. a. O. tab. 6. fig. 2, tab. 12. fig. 1) unterscheiden kann, bei einzelnen

Digitized by Google

Exemplaren noch mit der Axe in Verbindung zu stehen scheinen. Die Exemplare stammen von Acquate, Dossena, Gorno, Vallée de l'Aupa. Die Bestimmung dieser Reste wird so lange zweifelhaft bleiben, bis besser erhaltene Exemplare ihre sichere Bestimmung möglich machen. Eines der grössten Stücke von *Schizoneura Meriani* Schimp. ist durch Druck im Querschnitt elliptisch, 18 cm lang. 2,6 bis 2,8 cm breit mit vier schwach gewölbten, durch scharfe Furchen getrennten Rippen von 6—7 mm Breite. Auf derselben Platte liegen über dem oberen Ende des Stammstückes vier lineare schmale Blätter von 10—14 Centim. Länge, welche den Eindruck machen, als seien sie Theile eines Blattwirtels. Das Exemplar stammt von Maggio am Comersee.

Farne.

Von den drei verschiedenen Farnen, welche alle leider nur in einzelnen kleinen Fiederfragmenten erhalten sind, erwähne ich zuerst eines kleinen Fiederfragmentes, bei welchem ich längere Zeit schwankte, ob es nicht den thierischen Resten und zwar Schuppen der Placoiden angehöre. Aber einmal die geringe Dicke der einzelnen Fiedern, sodann die Gleichartigkeit der Ober- und Unterseite des Restes, sowie ihr aus Kohle bestehender Belag waren der Grund, weshalb ich mich für die Ansicht, es sei ein Pflanzenrest, entscheiden musste. Ich kenne ausser *Andriania* keinen Farnen, mit welchem sich dieses Fragment vergleichen liesse und auch bei dieser würde nur der verwandte Leitbündelverlauf hervorzuheben sein. Wären es Schuppen oder gehörten sie zum Kauapparat der Fische, so würde die Ober- und Unterseite, welche beide an dem Fragmente sichtbar sind, eine verschiedene Sculptur besitzen, ferner würde der ganze Rest in seinen einzelnen Theilen dicker, diese aber eine rhombische Form haben. Das auch im Gegendruck erhaltene Fragment ist eine der Länge nach gespaltene Fieder, ohne Zweifel einer Fieder höherer Ordnung angehörend, etwas über der Mitte umgeschlagen, somit der eine Theil die Oberseite, der andere Theil die Unterseite zeigend. Der Kohlenbelag ist theilweise abgesprungen, in diesem Falle auf den schwarzen Platten der Abdruck der Ober- oder Unterseite sichtbar. Das Gestein, in welchem der Rest liegt, ist tief schwarz, in Platten spaltend, im Aussehen den pflanzenführenden schwarzen Schiefern von Raibl ähnlich, der Fundort Perledo bei Varenna.

Digitized by Google

Wie bemerkt, hat der Verlauf der Leitbündel mit jenen von *Andriania* Fr. Braun Aehnlichkeit. Aus der Spindel der Fieder, von welcher ein schmaler Saum erhalten ist, treten horizontal verlaufende Leitbündel aus, etwas entfernter stehend im unteren Theile der Fieder, gegen die Spitze genähert. Dadurch zerfällt die 5,3 Centimeter lange Fieder in eine Anzahl allmählich an Grösse abnehmender quadratischer und länglich quadratischer Abtheilungen, in welche die einfachen oder meist gabeltheiligen Secundärleitbündel eintreten, zu welchen dann noch solche aus der Spindel entspringende kommen. (Taf. I. Fig. 4.) Vergleicht man damit die gleichen Verhältnisse, wie ich sie in meiner fossilen Flora der Grenzschichten Frankens Taf. 21 und Taf. 24, Fig. 1 von *Andriania* dargestellt habe, so ergiebt sich zwischen dieser und dem Farnen von Perledo nur der Unterschied, dass bei letzterem die Fieder länger, die Leitbündel zahlreicher sind. Da uns die Form des ganzen Blattes wie die Fructification unbekannt ist, so würde die Aufstellung einer neuen Gattung nicht gerechtfertigt sein, es wird am geeignetsten die Verwendung des Namens *Andriania* sein, wobei jedoch hervorzuheben ist, dass weder hinsichtlich der Gattung noch der Art, da die allein entscheidenden Fructificationen fehlen, etwas Sicheres gesagt werden und diese Bezeichnung nur eine provisorische sein kann. Ich schlage für diesen Rest die Bezeichnung *Andriania Stoppanii* vor. Diese Reste sind von FRIEDERICH BRAUN nach Exemplaren von der Theta als eigene Gattung beschrieben und später allgemein und auch von mir in meiner Flora der Grenzschichten anerkannt worden. Ich bin aber im Laufe der Zeit zur Ueberzeugung gekommen, dass es sich um bereits länger bekannte Reste, um die durch PRESL beschriebene *Gutbiera* handelt, welche von Bamberg und Veitlahm in Fragmenten von schlechter Erhaltung bekannt ist und verkannt wurde. Der von PRESL gegebene Name wird deshalb an die Stelle des bisher üblichen treten müssen.

Ein zweiter Farn von Urio am Westufer des Comersees ist nicht weniger unvollständig erhalten. Mehrere Bruchstücke von Fiedern höherer, wahrscheinlich dritter Ordnung auf einer grauschwarzen Schieferthonplatte verkohlt erhalten, die meisten entweder einzelne Fiederabschnitte oder die Hälfte einer Fieder, ein einziges Exemplar Fragment eines fiedertheiligen Blattes, einen Centimeter lang. Nach den hinterlassenen Abdrücken und

Digitized by Google

der Beschaffenheit des Blattes selbst ist derselbe ziemlich derb gewesen, bis beinahe zur Mitte eingeschnitten, die Fiederabschnitte alternirend, an der Basis herablaufend, länglich, ganzrandig, an der Spitze stumpf abgerundet, die Tertiärleitbündel gefiedert, gabelnd, den Rand des Fiederabschnittes nicht erreichend, der Saum glatt. Ob dieser Saum umgeschlagen, war nicht zu ermitteln (Taf. I. Fig. 3). Die Fiederfragmente sind sämmtlich, wie man sich an den Abdrücken der Unterseite überzeugt, steril. Ich zweifle nicht, dass die Fragmente zu jenen Farnblättern gehören, welche von SCHIMPER als *Lomatopteris*, von SAPORTA und ZIGNO als *Cycadopteris* unterschieden worden sind. Bei der Unvollständigkeit der Exemplare wäre es nicht gerechtfertigt, eine besondere Art zu unterscheiden oder sie mit einer der bekannten Arten zu identificiren, ich muss mich begnügen darauf hinzuweisen, dass die besprochenen Farnreste zu den liasisch-jurasischen Formen dieser Gruppe gehören.

Die Fragmente eines dritten Farnen kommen bei Dossena (Taf. II. Fig. 17) in einem weichen, feinkörnigen, dem Keupersandsteine Württembergs und Frankens ähnlichen Sandstein vor, welcher auch Equisetumreste enthält. Die Erhaltung dieses Farnen ist keine gute. In Kohle umgewandelt ist das Kohlenpulver verloren gegangen und nur der durch Eisen gefärbte Abdruck zurückgeblieben. Die Fragmente besitzen einen ziemlich dicken Blattstiel von 4 Millimeter Dicke, an ihm sitzen die nicht gestielten, linearen, ohne Zweifel ziemlich langen, alternirenden, stumpf gekerbten, horizontal abstehenden, sich beinahe berührenden Fiedern an. Auf der Unterfläche sind kleine stumpf elliptische Erhöhungen sichtbar, wie ich glaube, die sehr schlecht erhaltenen Sporenfruchthaufen, im Gegendrucke allein erhalten. Vom Leitbündelverlauf ist nur der ziemlich starke Mittelleitbündel erhalten. Ich halte die Fragmente für die durch HEER zuerst in der Urwelt der Schweiz beschriebene *Pecopteris augusta* von der neuen Welt und von Hemmikon bei Basel (HEER, fossile Flora der Schweiz, pag. 69. 87. Tab. 24 und Tab. 37. 38). Unter den an dem letzteren Orte abgebildeten Exemplaren sind solche, welche wie Fig. 8—11 auf Tab. 24 gekerbte Fiedern besitzen und den Fragmenten von Dossena, so weit dies ihr Erhaltungszustand zu sagen erlaubt, ähnlich sind. Fragmente fructificirender Blätter werden von HEER ziemlich unvollkommen abgebildet, man erkennt nur die rundliche Form

Digitized by Google

an einzelnen der jüngeren von Saporta abgebildeten jüngeren Zweige sichtbar, dem Alter der Zweige entsprechend weniger in die Breite gezogen.

Ausserdem liegen mir noch einige, den eben besprochenen sehr nahe stehende jüngere Coniferenzweige vor, welche von Gorno stammen. Sie sind in dunkelgrauem Schiefer enthalten, ferner ein Exemplar von Carate am Comersee, endlich eines von Toline am Lago d'Iseo, ebenfalls jüngere Zweige (Taf. I Fig. 11—13). Ich bin nicht im Stande dieselben durch irgend ein Merkmal von den gleichen Altersstufen der Exemplare von Perledo zu unterscheiden. Wie schon bemerkt, liesse sich bei diesen Zweigen an *Voltzia* und zwar an die kurzblättrigen Formen, welche wir von Raibl kennen, denken. Es scheint mir jedoch dagegen die Form des Blattes zu sprechen, welche bei den letzteren schmäler ist. Die Unsicherheit, welche allen diesen unter sich sehr ähnlichen Coniferenresten anhaftet, welche, wenn sie uns bei recenten Formen ohne Zapfen vorlägen, nicht minder gross wäre, erschwert die Bestimmung der einzelnen Arten ebenso sehr, als die Beantwortung der Frage, welcher Gattung und Gruppe sie angehören und ihre Beziehung zu den recenten Formen dieser Familie. Wenn Saporta einzelne Zapfen mit Zweigen in Verbindung bringt, so ist dies eine willkürliche Annahme, welche durch keine Thatsache unterstützt wird. Ebenso kann man diese Zweige nicht bei der zweifelhaften Gattung *Widdringtonites* unterbringen, dieser widerspricht die Art der Beblätterung, welche wenig an *Widdringtonia* erinnert. Von Moltrasio am Comersee liegt mir ein in muschelig brechende Pechkohle umgewandeltes stark zusammengedrücktes Stammstück von 24 cm Länge, 10—11 cm Breite vor, dessen Aussenfläche nichts zeigt, was auf die Abstammung schliessen liesse. Die Kohle erwies sich als structurlos. Da derselbe aus dem Lias stammt, so liegt die Vermuthung nahe, dass er zu den oben besprochenen Coniferen in Beziehung steht.

Cycadeen.

Unter den Resten von Urio am Comersee findet sich ein Blattfragment von 3,3 Centimeter Länge, 2,2 Centimeter Breite, dem Gestein als zarte Haut von Eisenoxyd aufliegend, aus einem Blattstielfragment mit zwei Fiedern bestehend (Taf. I. Fig. 9). Dass es den Cycadeen angehört, ist kaum zu bezweifeln, unentschieden muss jedoch bleiben, welcher der auf Blätter gegrün-

Digitized by Google

deten Gattungen es anzureihen ist, da das Fragment zu unvollständig ist und auch der kaum erkennbare Leitbündelverlauf keine Aufschlüsse giebt. Er scheint parallel gewesen zu sein.

Für die Entwicklung einzelner Pflanzenformen bieten die untersuchten Reste keine Anknüpfungspunkte, denn meist alle Pflanzenreste kennen wir von anderen Fundorten besser und vollständiger. Hinsichtlich der geognostischen Verhältnisse geben sie insofern einen Aufschluss, als ein Theil derselben der Lettenkohle angehört, wie *Bactryllium Schmidii* Heer, *Equisetum arenaceum* Bronn, *Schizoneura Meriani* Schimp. und *Astherothea Meriani* Stur. Für das Vorhandensein jüngerer mesozoischer Bildungen als der Trias sprechen die allerdings sehr ungenügend erhaltenen Reste von *Andriania* und *Cycadopteris*, sodann *Pagiophyllum peregrinum* Heer. Diese Reste lassen auf das Vorhandensein liasischer Bildungen schliessen, und zwar *Andriania* auf (Infralias) Rhät, ebenso *Cycadopteris*, *Pagiophyllum* auf den unteren Lias. Wenn auch *Cycadopteris* noch im weissen Jura vorkommt, so fehlen doch die übrigen dieser Abtheilung des Jura eigenthümlichen Pflanzenreste. Von Interesse ist das Vorkommen von *Andriania*, welche bis jetzt nur im Rhät (Infralias) von Bamberg, Veitlahm bei Kulmbach und an der Theta bei Bayreuth gefunden ist, an den übrigen Fundorten der Pflanzenreste dieser Bildungen bis jetzt noch nicht beobachtet wurde, wenn sie nicht wie bei Bamberg und Veitlahm verkannt ist. Aus dem alpinen Rhät ist sie bis jetzt so wenig, wie viele andere Reste dieser Formation bekannt gewesen und deshalb der Fund dieses Fragmentes von Interesse.

Erklärung der Abbildungen.

Fig. 1. *Bactryllium Schmidii* Heer. Gorno.
Fig. 2. *Bactryllium canaliculatum* Heer. 2. a. Querschnitt. Gorno.
Fig. 3. *Cycadopteris* sp. Fiederchenfragment. 3. a. Etwas vergrösserter Abschnitt eines Fiederchens. Urio.
Fig. 4. *Andriania Stoppanii* Schenk. 4. a. Fragment eines Fiederchens, etwas vergrössert. Perledo.
Fig. 5. *Equisetum arenaceum* Schimp. a. Fragment eines Seitenastes. Garabuso.
Fig. 6. *Equisetum arenaceum* Schimp. Aupathal.
Fig. 7. *Schizoneura Meriani* Heer. Stammfragment. Fig. 8. Blätter. Dossena.
Fig. 9. Blattfragment eines *Pterophyllum*. Urio.
Fig. 10. *Schizoneura Meriani* Schimp. Acquate.
Fig. 11—13. *Pagiophyllum peregrinum* Heer. 11. 12. Gorno. 13. Acquate.
Fig. 14—16. *Pagiophyllum peregrinum* Heer. Perledo.
Fig. 17. *Asterotheca Meriani* Stur. Dossena.

[Die untersuchten Exemplare befinden in den Sammlungen des Museo d'istoria naturale zu Mailand und des Polytechnikums zu Bergamo.]

Digitized by Google

Mittheilung über das Möbius-Archiv.

Die mathematisch-physische Classe der K. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften hatte beschlossen, im Zusammenhange mit der von ihr veranstalteten Gesammtausgabe der Werke von Möbius das gesammte hierzu ihr zur Verfügung gestellte handschriftliche Material, über dessen Umfang und Zusammensetzung Herr Dr. C. Reinhardt in Band IV Seite 699 ff. der Möbius'schen Werke Näheres mitgetheilt hat, zu einem selbstständigen Möbius-Archiv vereinigt, in einem besonderen und künstlerisch ausgestatteten Schranke der Universitäts-Sternwarte zu Leipzig zur Aufbewahrung zu übergeben. Dieser Beschluss ist jetzt in allen Theilen zur Ausführung gelangt, nachdem Herr Dr. C. Reinhardt mit dankenswerther Bereitwilligkeit sich noch der keineswegs unbedeutenden Mühe unterzogen hatte, die den einzelnen zur Aufbewahrung dienenden Kästen und Mappen beigefügten Specialverzeichnisse, sowie einen Uebersichts-Catalog anzufertigen. Der letztere ist nachstehend zum Abdruck gebracht; die Veröffentlichung bedarf wohl kaum einer Rechtfertigung, da es sich um ein höchst werthvolles Material zur Geschichte einer wichtigen Epoche der Mathematik handelt.

Die jedem Titel vorgedruckten Marken (Buchstabe und Nummer) bezeichnen die Mappe, die in Klammern angehängte römische Zahl den Carton.

A.

Möbius' wissenschaftliche Tagebücher.

A. 1. Diarium D_1, begonnen im Herbst 1818. Vorarbeiten zum barycentrischen Calcul. Inhaltsverzeichniss von Möbius auf Seite 231. [I].

A. 2. Diarium D_2, aus den Jahren 1822—1824. Der barycentrische Calcul. [I].

Digitized by Google

A. 3. Diarium D_3, begonnen November 1827, geschlossen den 30. August 1828. Vorarbeiten zum Lehrbuch der Statik. Inhaltsverzeichniss von Möbius auf Seite 169. [I].

A. 4. Diarium D_4, begonnen am 15. September 1828, geschlossen im Frühjahr 1830. Arbeiten zum Lehrbuch der Statik. Inhaltsverzeichniss von Möbius auf eingelegten Blättern. [I].

A. 5. Diarium D_5, begonnen im Januar 1838, beendigt im Sommer 1843. Vorarbeiten zur Mechanik des Himmels. Störungstheorie. [I].

A. 6. Diarium D_6, aus den Jahren 1844, 1845, 1846. Sphärische Curven dritter Ordnung. [I].

A. 7. Diarium D_7, begonnen den 22. März 1847, beendet wahrscheinlich Anfang des Jahres 1851. Curven dritter Ordnung. Studien zu Miller's Crystallographie. Theorie der symmetrischen Figuren. [I].

A. 8. Diarium D_8, begonnen den 12. Mai 1851, geschlossen wahrscheinlich im Jahre 1855. Theorie der symmetrischen Figuren. Uebertragungsprincip. Kreisverwandtschaft. Involution von Punkten in der Ebene und im Raume. [I].

A. 9. Diarium D_9, begonnen den 19. September 1855, geschlossen im Sommer 1859. Studien zu Chasles' Géométrie supérieure. Ueber imaginäre und conjugirte Kreise. Theorie der Polyeder. Studien zu Hamilton's Quaternionen. [I].

A. 10. Diarium D_{10}, begonnen 1. October 1859, beendet wahrscheinlich im Jahre 1865. Grundformeln der Trigonometrie. Theorie der Polyeder. Elementarverwandtschaft. Ueber unendlich dünne Strahlenbündel. Geometrische Addition und Multiplication. Ueber Polyeder. [I].

A. 11. Diarium D_{11}, begonnen den 1. Januar 1860, nicht ausgeschrieben, die letzten Blätter wohl aus den letzten Lebenstagen von Möbius. Pariser Preisarbeit (deutsch geschrieben). Studien zu Hesse's analytischer Geometrie, Delaunay's Mécanique rationelle, Hamilton's Quaternionen. [I].

B.

Manuscripte zu Band I—IV von Möbius' gesammelten Werken.

(Bezüglich der Manuscripte zu den hier nicht aufgeführten Abhandlungen vergleiche man die Diarien D_1—D_{11}.)

B. 1. Die noch erhaltenen Manuscripte zum barycentrischen Calcul. [II].

Digitized by Google

B. 2. Zwei geometrische Aufgaben. [II].

B. 3. Brief an Schumacher. [II].

B. 4. Ueber die Gleichungen, mittelst welcher aus den Seiten eines in einen Kreis zu beschreibenden Vielecks der Halbmesser des Kreises und der Flächeninhalt des Vielecks gefunden werden kann. [II].

B. 5. Barycentrische Lösung der Aufgabe des Hrn. Clausen. [II].

B. 6. Ueber eine allgemeine Art der Affinität geometrischer Figuren. [II].

B. 7. Verallgemeinerung des Pascal'schen Theorems, das in einen Kegelschnitt beschriebene Sechseck betreffend. [II].

B. 8. Die Grassmann'sche Lehre von Punktgrössen und den davon abhängigen Grössenformen. [II].

B. 9. Ueber eine neue Behandlungsweise der analytischen Sphärik. [III].

B. 10. Entwicklung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie in grösstmöglicher Allgemeinheit. [III].

B. 11. Ueber die Grundformen der Curven dritter Ordnung. [III].

B. 12. Ueber eine neue Methode, um von Relationen, welche der Longimetrie angehören, zu entsprechenden Sätzen der Planimetrie zu gelangen. [III].

B. 13. Ueber die Involution von Punkten in einer Ebene. [III].

B. 14. Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung. [III].

B. 15. Ueber imaginäre Kreise. [III].

B. 16. Ueber conjugirte Kreise. [III].

B. 17. Ueber das Gesetz der Symmetrie der Krystalle und die Anwendung dieses Gesetzes auf die Eintheilung der Krystalle in Systeme. [III].

B. 18. Ueber symmetrische Figuren. [III].

B. 19. Ueber Involutionen höherer Ordnung. Theorie der collinearen Involution von Punktepaaren. [III].

B. 20. a) Theorie der elementaren Verwandtschaft. b) Ueber die Bestimmung des Inhalts eines Polyeders. c) Nachlass: Zur Theorie des Polyeders und der Elementarverwandtschaft (deutsches Original der Preisschrift). [III]. d) Abschrift der Pariser Preisarbeit. [XIII].

B. 21. Nachlass: Zur Theorie der symmetrischen Figuren. [III].

B. 22. Manuscripte zum Lehrbuch der Statik. [II].

Digitized by

B. 23. Einfacher Beweis des von Herrn Geh. Hofrath Schweins mitgetheilten statischen Satzes. Beweis eines neuen von Herrn Chasles in der Statik entdeckten Satzes. [II].

B. 24. Ueber einen Beweis des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte. [II].

B. 25. Manuscripte zur Mechanik des Himmels. [IV].

B. 26. De computandis occultationibus fixarum per planetas. [IV].

B. 27. De peculiaribus quibusdam aequationum trigonometricarum affectionibus disquisitio analytica. [IV].

B. 28. Beobachtungen auf der Königlichen Universitäts-Sternwarte. [IV].

B. 29. Kurze Darstellung der Haupteigenschaften eines Systems von Linsengläsern. [IV].

B. 30. Beiträge zu der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einem Anhange dioptrischen Inhalts. [IV].

B. 31. Entwicklung der Lehre von den dioptrischen Bildern mit Hülfe der Collineationsverwandtschaft. [IV].

B. 32. Ueber eine besondere Art der Umkehrung der Reihen. [IV].

B. 33. Geometrische Eigenschaften einer Factorentafel. [IV].

B. 34. Ueber die phoronomische Deutung des Taylor'schen Theorems. [IV].

B. 35. Ueber eine akustische Aufgabe. [IV].

B. 36. Die wahre und die scheinbare Bahn des Halley'schen Kometen. [XIII].

B. 37. Nachlass: Ueber die Berechnung des Reservefonds einer Lebensversicherungs-Gesellschaft. [XIII].

B. 38. Ueber geometrische Addition und Multiplication. [IV].

C.

Hefte zu den Vorlesungen über Mathematik, Mechanik und Astronomie.

C. 0. Verzeichniss der Vorlesungen, die Möbius von 1816—1868 an der Universität Leipzig gehalten hat. (Aufgestellt von C. Reinhardt.) [V].

C. 1. Theorie der Gleichungen. [V].

C. 2. Zahlentheorie. [V].

C. 3. Differentialrechnung. [V].

C. 4. Integralrechnung. [V].

C. 5a und 5b. Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes. [V].

Digitized by Google

C. 6. Analytische Geometrie der Kegelschnitte. [V].
C. 7. Analytische Geometrie der Flächen zweiter Ordnung. [V].
C. 8. Analytische Sphärik. [V].
C. 9. Barycentrischer Calcul. [V].
C. 10. Perspective. [V].
C. 11. Synthetische Geometrie der Kegelschnitte. [V].
C. 12. Geometrische Uebungen; ausgewählte Capitel aus der Geometrie. [V].
C. 13. Theorie der Netze; Krystallonomie. [V].
C. 14. Statik. [V].
C. 15. Hydrostatik. [V].
C. 16. Phoronomie. [V].
C. 17. Ebene und sphärische Trigonometrie. [VI].
C. 18. Mathematische Geographie. [VI].
C. 19. Sphärische Astronomie. [VI].
C. 20. Berechnung der Finsternisse und Bedeckungen. [VI].
C. 21. Chronologie. [VI].
C. 22. Praktische Astronomie. [VI].
C. 23. Dioptrik und Katoptrik; Theorie der Fernröhre. [VI].
C. 24. Methode der kleinsten Quadrate. [VI].
C. 25. Physische Astronomie. [VI].
C. 26. Theorische Astronomie. [VI].
C. 27. Störungstheorie. [VI].
C. 28. Populäre Vorlesungen über Astronomie. [VI].

D.

Aufzeichnungen über astronomische Beobachtungen. Kalendermanuscripte.

D. 1. Ein Convolut von Blättern mit Notizen über astronomische Beobachtungen, Rechnungen und Tabellen. (Vergleiche auch F. 4.) [VII].
D. 2. Kalendermanuscripte (erstes Convolut). [VII].
D. 3. Kalendermanuscripte (zweites Convolut). [XIII].

E.

Collectaneen und Commentare zu mathematischen Werken.

E. 1. Erläuterungen zu Euler's Analysis infinitorum, zur combinatorischen Analysis, Dioptrik etc. [VIII].
E. 2. Quodlibet mathematicum. Gottingae 1813. [VIII].

Digitized by Google

E. 3. Heft zu Gauss' Vorlesung über praktische Astronomie im Winterhalbjahre 1813—14. [VIII].
E. 4. Bemerkungen zu Gauss' Disquisitiones arithmeticae. [VIII].
E. 5. Mathematische Manuscripte aus der Zeit von Möbius' Aufenthalt in Halle. [VIII].
E. 6. Mathematisches Collectaneum a. d. Jahren vor 1818. [VIII].
E. 7. Erläuterungen und Zusätze zum Appendice au traité élémentaire du calcul différentiel et intégral par Lacroix. [VIII].
E. 8. Bemerkungen zur Geschichte der Mathematik. [VIII].
E. 9. Bemerkungen zu Santini's Astronomie. [VIII].
E. 10. Bemerkungen zu Littrow's populärer Astronomie. [VIII].
E. 11. Bemerkungen zu Littrow's praktischer Astronomie. [VIII].
E. 12. Bemerkungen zu Delambre's Abrégé d'astronomie. [VIII].
E. 13. Commentar zu Lagrange's Mécanique analytique. [VIII].
E. 14. Commentare zu Pontécoulant's Théorie analytique du système du monde. [IX].
E. 15. Theorie der Wärme nach Fourier. [IX].
E. 16. Ueber Präcession und Nutation nach Laplace und Littrow. [IX].
E. 17. Wahrscheinlichkeitsrechnung nach Poisson. [IX].
E. 18. Ueber confocale Ellipsen und Ellipsoide; über Anziehung der Ellipsoide (nach Legendre's Traité des fonctions elliptiques). [IX].
E. 19. Erläuterungen zu einem französischen Werke über Dynamik. [IX].
E. 20. Auszüge aus Bravais' Abhandlungen über symmetrische Polyeder und Aehnliches. [IX].
E. 21. Kürzere Auszüge und Erläuterungen zu Abhandlungen verschiedener Autoren. [IX].
E. 22. Entwürfe zur Lösung mathematischer Aufgaben und Aehnliches. [IX].

F.

Amtliches und Biographisches.

F. 1. Circulare und Briefe von Sternwarten und optischen Instituten an die Direction der Sternwarte Leipzig. [X].
F. 2. Themata für die schriftlichen und mündlichen Candidatenprüfungen. [X].
F. 3. Amtliche Gutachten über Preisarbeiten, Habilitationsschriften etc. [X].

Digitized by Google

F. 4. Entwürfe für die Mittheilungen über astronomische Beobachtungen auf der Sternwarte (veröffentlicht in der Leipziger Zeitung). [X].
F. 5. Biographisches. [X].

G.

Briefe an und von Möbius.

G. 1a. 39 Briefe an Apelt. [XI].
G. 1b. 42 Briefe an Apelt. [XI].
G. 2. 7 Briefe von d'Arrest. [XI].
G. 3a. 16 Briefe von Baltzer. [XI].
G. 3b. 14 Briefe an Baltzer (Abschriften). [XI].
G. 4. 31 Briefe von Bellavitis, Boguslawski, Brandes, Bruhns, Flourens, Gilliss, Hankel, Hansen, Heis, Hesse, Hessel, Hoppe, Janj, Listing, Littrow, Lohrmann, Loyd and Sabine, Manners, Mollweide, Naumann, Poggendorff, Rosenberger, Schweigger, Soldner, Stähelin, Struve, Weisbach, Zech. [XI].
G. 5. 48 Briefe von Crelle. [XI].
G. 6. 9 Briefe von Drobisch. [XI].
G. 7. 9 Briefe von Encke. [XI].
G. 8. 7 Briefe von Engelhardt. [XI].
G. 9. 11 Briefe an Gauss (Abschriften). [XI].
G. 10a. 12 Briefe von Gerling. [XI].
G. 10b. 11 Briefe an Gerling (Abschriften). [XI].
G. 11a. 7 Briefe von Grassmann. [XI].
G. 11b. 6 Briefe an Grassmann (Abschriften). [XI].
G. 12. 3 Briefe von Grunert. [XI].
G. 13. 10 Briefe von Jahn. [XI].
G. 14. 4 Briefe von Joachimsthal. [XI].
G. 15. 4 Briefe von Lamont. [XI].
G. 16. 22 Briefe von Freiherrn von Lindenau. [XI].
G. 17. 3 Briefe von Magnus. [XI].
G. 18. 9 Briefe von Nürnberger. [XI].
G. 19. 12 Briefe von Professor J. C. Pfaff, Caroline Pfaff und C. J. Pfaff. [XI].
G. 20. 4 Briefe von Reich. [XI].
G. 21. 3 Briefe von Scheibner. [XI].
G. 22. 26 Briefe von Schlömilch. [XI].
G. 23. 10 Briefe von C. F. von Schönberg. [XIII].

Digitized by Google

G. 24. 5 Briefe von Schumacher. [XI].
G. 25. 10 Briefe von Seeber. [XI].
G. 26a. 20 Briefe von W. Weber. [XI].
G. 26b. 6 Briefe an W. Weber. [XI].
G. 27. 24 Briefe an Möbius von seinen Schülern. [XI].
G. 28. Briefe an Möbius von Verschiedenen (ohne wissenschaftliches Interesse). [XI].
G. 29. Concepte zu 9 Briefen von Möbius an X., Siebeck (2), Baltzer, Wunder, Weiske, A. von Humboldt, W. Weber, Witzschel (?). [XI].

Anm. Genauere Verzeichnisse der Briefe sind den einzelnen Mappen beigelegt.

II.

Verschiedenes.

H. 1. Hefte aus Möbius' Schulzeit in Pforta. [XII].
H. 2. Rechnungen über die Pallas und Juno. Göttingen 1813. [XIII].
H. 3. Anzeigen und Recensionen. [XIII].
H. 4. Lose Blätter mit mathematischen Notizen. [XII].
H. 5. Lose Blätter nichtmathematischen Inhalts. [XIII].
H. 6. Handschriftliche Bemerkungen des Professor Weiske über seine mathematischen Unterhaltungen mit Möbius. [XIII].
H. 7. Schriftstücke von d'Arrest, Drobisch, Jacobi, Scheibner u. A. [XIII].
H. 8. Reste der Manuscripte zu dem Buch über Joh. Fr. Pfaff's Briefwechsel, herausgegeben von seinem Sohne Dr. C. Pfaff. (Möbius hatte die Publication des Briefwechsels in Leipzig besorgt). [XIII].
H. 9. Figuren zur Demonstration bei astronomischen und mathematischen Vorlesungen. [XIII].

Digitized by Google

SITZUNG VOM 11. FEBRUAR 1889.

C. Neumann, *Ueber das Malfatti'sche Problem.*

Ist irgend ein Dreieck mit den Seiten α, β, γ gegeben, so kann man zunächst dieses Dreieck durch die Halbirungslinien $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ seiner Innenwinkel in drei kleinere Dreiecke zerlegen, und sodann für jedes dieser drei kleineren Dreiecke den einbeschriebenen Kreis construiren. Bezeichnet man diese Kreise mit $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, so werden die beiden Kreise $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$, ausser α_1, noch eine zweite gemeinschaftliche innere Tangente besitzen, welche α_2 heissen mag. In analoger Weise mögen β_2 und γ_2 definirt sein. Ist also das ursprüngliche Dreieck $\alpha\beta\gamma$ *gegeben*, so werden die Linien und Kreise $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ ebenfalls als *gegeben* zu betrachten sein.

Das *Malfatti'sche Problem* besteht nun darin, in das gegebene Dreieck $\alpha\beta\gamma$ drei Kreise ξ, η, ζ hineinzulegen, der Art, dass ξ die beiden Kreise η, ζ und zugleich auch die beiden Dreiecksseiten β, γ berührt, und dass ferner η und ζ den analogen Anforderungen entsprechen. Bezeichnet man die gegenseitigen Berührungspunkte dieser noch unbekannten Kreise ξ, η, ζ mit x, y, z, ferner die Tangenten der Kreise ξ, η, ζ in den Punkten x, y, z mit $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$, so wird man offenbar die Kreise ξ, η, ζ ohne Weiteres construiren können, falls man nur die Linien $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ zu construiren im Stande ist.

Eine Construction der Linien $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ und zwar eine Construction von überraschender Einfachheit ist aber bekanntlich von STEINER gegeben worden im Jahre 1826. *Steiner gelangte nämlich in dieser Beziehung zu dem höchst merkwürdigen Satz, dass* $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ *identisch sind mit* $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$. Um diesen STEINER'schen Satz zu beweisen, wird darzuthun sein, dass z. B. α_3 die beiden Kreise $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ berührt. Kurz es wird darzuthun sein, dass die Linien $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ folgende Eigenschaften besitzen:

Digitized by Google

$$E.\quad \begin{cases} \alpha_3 \text{ tangential zu } \mathfrak{B},\ \mathfrak{C}, \\ \beta_3 \text{ tangential zu } \mathfrak{C},\ \mathfrak{A}, \\ \gamma_3 \text{ tangential zu } \mathfrak{A},\ \mathfrak{B}. \end{cases}$$

Steiner hat bekanntlich im Jahre 1826 den in Rede stehenden Satz d. i. die Eigenschaften (*E.*) *ohne* Beweis publicirt. Unter den seit jener Zeit gefundenen Beweisen sind mir genauer bekannt die von Schröter[1]), Bischoff[2]) und Petersen[3]). Und unter diesen drei Beweisen ist nach meinem Dafürhalten der Schröter'sche als der einfachste zu bezeichnen. Doch dürfte derselbe wohl einer noch weiteren Vereinfachung fähig sein.

Die Betrachtungen nämlich, deren Schröter bei Führung seines Beweises sich bedient, entspringen aus zwei verschiedenen Quellen, einerseits aus der *Theorie der reciproken Radien*, und andererseits aus der *Theorie der Aehnlichkeitspunkte*. Von diesen beiden Quellen aber kann die letztere vollkommen ausgeschaltet werden. Und hierdurch erlangt alsdann, wie ich im gegenwärtigen Aufsatz zu zeigen beabsichtige, der Schröter'sche Beweis nicht allein eine sehr bedeutende Abkürzung, sondern vor allen Dingen auch eine viel grössere Einfachheit und Uebersichtlichkeit, indem derselbe alsdann nur noch auf der *Theorie der reciproken Radien* beruht. Um näher hierauf einzugehen, mag es mir zuvörderst gestattet sein, zwei ganz elementare Hülfssätze voranzuschicken.

Erster Hülfssatz. — *Es seien P, Q, σ, τ vier Kreise. Der Kreis σ mag die beiden Kreise P, Q gleichartig berühren. Und ebenso mag auch τ jene beiden Kreise P, Q gleichartig berühren. Alsdann bilden die vier Berührungspunkte stets ein Kreisviereck.* — Der Beweis dieses Satzes kann in sehr einfacher Weise dadurch erhalten werden, dass man die beiden Kreise P, Q durch

---

1) Schröter: Die Steiner'sche Auflösung der Malfatti'schen Aufgabe. 1874. Crelle's Journal. Bd. 77. Seite 230. Diese Schröter'schen Untersuchungen haben eine weitere Vervollständigung erhalten durch den kurzen aber inhaltsreichen Aufsatz von Godt: Ueber die Steiner'sche Verallgemeinerung des Malfatti'schen Problems. Crelle's Journ. Bd. 84. S. 259.

2) Der von Prof. Bischoff in München gegebene Beweis ist mir nur durch ein Manuscript bekannt geworden.

3) Petersen: Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Constructionsaufgaben, ins Deutsche übertragen von Dr. von Fischer-Benzon. Kopenhagen. 1879. Daselbst auf Seite 102—104.

Digitized by Google

die Methode der reciproken Radien in zwei gleich grosse Kreise verwandelt.

Zweiter Hülfssatz. — *Denkt man sich beliebig viele gerade Linien, die alle isogonal sind zu einem gegebenen Kreise, so wird stets ein mit diesem Kreise concentrischer Kreis existiren, welcher all' jene geraden Linien berührt.* — Der Beweis dieses Satzes ergiebt sich sofort, und bedarf keiner weiteren Erläuterung.

Um nun den Beweis der Eigenschaften (*E.*) wirklich zu führen, bezeichnen wir diejenigen Punkte, in denen die Dreiecksseiten α, β, γ von den MALFATTI'schen Kreisen berührt werden mit A, A, B, B, C, C, unter Beifügung passender Indices. Es mögen nämlich A_η und A_ζ diejenigen Punkte heissen, in denen die Dreiecksseite α von den beiden MALFATTI'schen Kreisen η und ζ berührt wird. Und in analoger Art mögen B_ζ, B_ξ und C_ξ, C_η definirt sein. Alsdann werden die beiden Kreise η und ζ einerseits von α berührt, in den Punkten A_η und A_ζ, andererseits aber auch vom Kreise ξ berührt, in den Punkten z und y. Die vier genannten Punkte A_η, A_ζ, y, z müssen daher, zufolge des ersten Hülfssatzes, ein *Kreisviereck* bilden. Bezeichnen wir also den betreffenden Kreis selber mit U, und definiren wir in analoger Weise die Kreise V und W, so werden U, V, W respective durch folgende Punkte hindurchgehen:

$$\begin{aligned} U &\rightarrowtail y,\ z,\ A_\eta,\ A_\zeta\ , \\ V &\rightarrowtail z,\ x,\ B_\zeta,\ B_\xi\ , \\ W &\rightarrowtail x,\ y,\ C_\xi,\ C_\eta\ . \end{aligned} \tag{1.}$$

Der Kreis U schneidet den Kreis ζ in den beiden Punkten A_ζ und y, d. i. in denjenigen beiden Punkten, in denen der Kreis ζ respective von α und β_3 berührt wird. Folglich wird der Kreis U diese beiden Linien α und β_3 unter *gleichen* Winkeln schneiden; was angedeutet sein mag durch die Formel:

$$U \text{ isogonal zu } \alpha,\ \beta_3\ . \tag{2.}$$

Gleichzeitig wird offenbar, zufolge der Symmetrie unserer Betrachtungen und Bezeichnungen, auch folgende analoge Formel zu notiren sein:

$$U \text{ isogonal zu } \alpha,\ \gamma_3\ . \tag{3.}$$

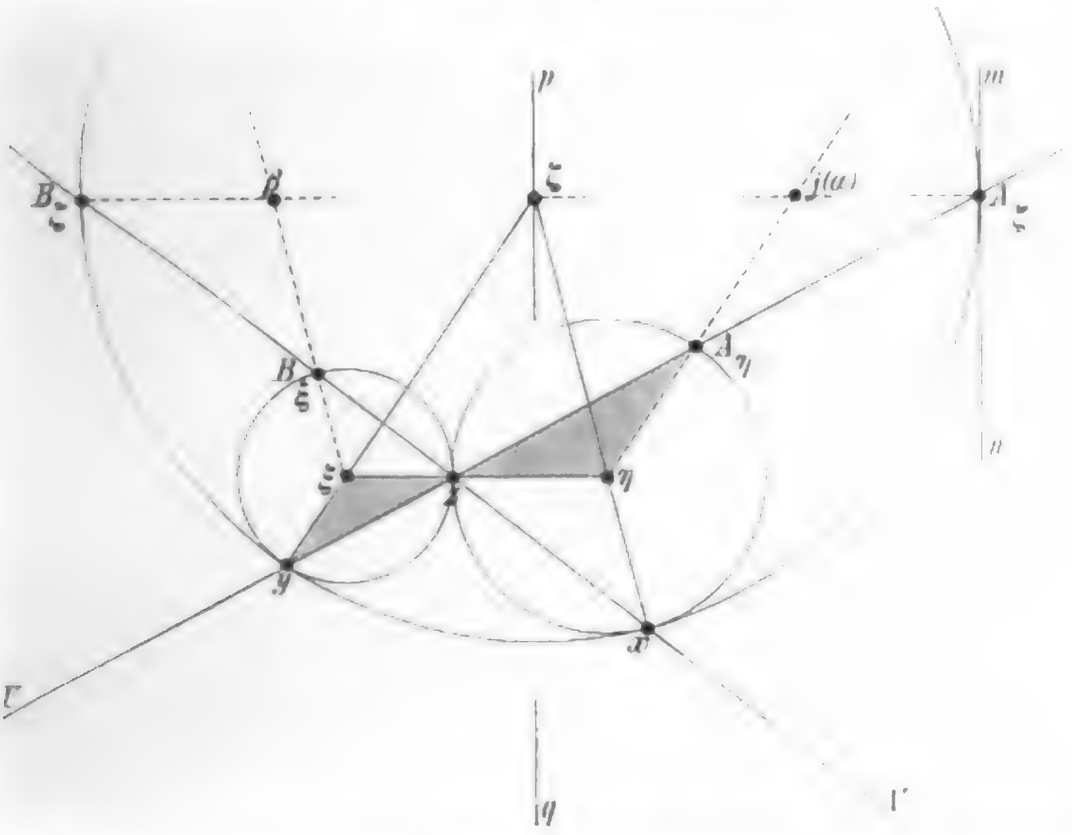
Digitized by Google

Um nun in unserer Untersuchung einen Schritt vorwärts zu kommen, wollen wir die aus den Linien, Kreisen und Punkten

(4.) α, β, γ , ξ, η, ζ , x, y, z , $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$, U, V

bestehende Figur[1]) in eine etwas *einfachere* Figur zu verwandeln suchen durch Anwendung der Methode der reciproken Radien. Die beiden Kreise U und V schneiden sich, ausser in z, noch in einem zweiten Punkte, welcher O heissen mag. Transformiren wir also die Figur (4.) von diesem Punkte O aus, nach der Methode der reciproken Radien, so werden wir dadurch den Vortheil erhalten, dass jene beiden durch O gehenden Kreise U und V in *gerade Linien* sich verwandeln.

Die transformirte Figur sei dargestellt durch:



Es mögen nämlich in dieser transformirten Figur die Centra der Kreise ξ, η, ζ mit ebendenselben Buchstaben ξ, η, ζ bezeichnet sein; so dass also die Berührungspunkte x, y, z respective auf den Centrallinien $\eta\zeta$, $\zeta\xi$, $\xi\eta$ oder auf den Verlängerungen derselben anzutreffen sind. Die Kreise U, V verwandeln sich, wie schon bemerkt wurde, bei der Transformation in *gerade*

1) Der Leser wird gebeten, diese Figur (4.), welche weiterhin die *ursprüngliche* Figur heissen soll, wirklich zu zeichnen.

Digitized by Google

Linien. Und zwar werden, weil U und V [vergl. (1.)] respective durch die Punkte y, z und x, z hindurchgehen, die durch die Transformation entstehenden *geraden Linien* U und V respective durch die geraden Linien yz und xz dargestellt sein, [vergl. die in (5.) gegebene Zeichnung]. Der Kreis U geht [vergl. (1.)] durch die vier Punkte y, z, A_η, A_ξ hindurch; und zwar sind y und A_ξ seine Schnittpunkte mit dem Kreise ξ, andererseits z und A_η seine Schnittpunkte mit dem Kreise η. Gleiches gilt daher in der transformirten Figur von der *geraden Linie* U. Und demgemäss sind in dieser transformirten Figur (5.) den Schnittpunkten der geraden Linie U die Buchstaben y, z, A_η, A_ξ beigefügt. Ueberdies sind daselbst in analoger Weise den Schnittpunkten der geraden Linie V die Buchstaben x, z, B_ξ, B_ζ beigefügt.

Ziehen wir jetzt in der transformirten Figur (5.) die beiden punktirten Linien ηA_η und ξA_ξ, und bezeichnen wir den Schnittpunkt dieser beiden punktirten Linien mit j, so haben wir im Ganzen *drei einander ähnliche gleichschenklige Dreiecke*, von denen zwei schraffirt angegeben sind, während das dritte durch $y\xi A_\xi$ dargestellt ist. Aus der Aehnlichkeit dieser Dreiecke folgt sofort, dass

(*f.*) $\xi\eta j\xi$ ein Parallelogramm

ist, und dass ferner

(*g.*) $jA_\eta A_\xi$ ein gleichschenkliges Dreieck

ist. Folglich ist um den Punkt j (als Centrum) ein *Hülfskreis* construirbar, welcher die beiden Kreise η und ζ respective in A_η und A_ξ berührt. Bezeichnen wir den Radius dieses Hülfskreises j mit R_j, ebenso den Radius des Kreises ζ mit R_ζ, so ergiebt sich [vergl. die Figur (5.)]:

$$(\zeta A_\xi) = (\zeta j) + (jA_\xi) ,$$

$$\text{d. i.} \quad R_\zeta = (\zeta j) + R_j ,$$

$$\text{d. i.} \quad R_j = R_\zeta - (\zeta j) .$$

Die letzte Formel aber ist, mit Rücksicht auf die aus (*f.*) entspringende Gleichung $(\zeta j) = (\xi\eta)$, auch so darstellbar:

(*h.*) $$R_j = R_\zeta - (\xi\eta) .$$

Um nun die eigentliche Natur des Hülfskreises j zu erkennen, müssen wir uns daran erinnern, dass α in der *ursprünglichen*

Digitized by Google

Figur (4.) eine gerade Linie repräsentirt, welche die Kreise η und ζ respective in den Punkten A_η und A_ζ berührt. In der *transformirten* Figur (5.) wird daher α ein *Kreis* sein, welcher ebenfalls die Kreise η und ζ respective in A_η und A_ζ berührt. Hieraus aber folgt sofort, dass dieser Kreis α in der transformirten Figur (5.) nichts Anderes ist, als der schon besprochene Hülfskreis j. Demgemäss erscheint es angemessen, den Buchstaben j fortan fallen zu lassen, denselben nämlich zu ersetzen durch α; wie solches in der Figur (5.) angedeutet sein soll durch das dem j in Parenthese beigefügte α. Bei dieser Abänderung der Bezeichnungsweise ergiebt sich aus (*f.*), dass $\xi\eta\alpha\zeta$ ein Parallelogramm, mithin z. B.

(*F.*) $\qquad \zeta\alpha \quad \text{parallel} \quad \xi\eta$

ist. Gleichzeitig ergiebt sich alsdann aus (*h.*):

(*H.*) $\qquad R_\alpha = R_\zeta - (\xi\eta)\,;$

und zwar ist in diesen Formeln (*F.*) und (*H.*) unter α der Mittelpunkt, und unter R_α der Radius des Kreises α zu verstehen.

Analoges wird offenbar zu bemerken sein in Bezug auf denjenigen Kreis β, in welchen sich die gerade Linie β bei der Transformation verwandelt. Zieht man nämlich in der transformirten Figur (5.) die beiden punktirten Linien ξB_ξ und ζB_ζ, so wird der Schnittpunkt dieser beiden punktirten Linien mit dem Centrum β des Kreises β identisch sein. Ueberdies wird die Peripherie dieses Kreises β durch B_ξ und B_ζ gehen, und in diesen Punkten die Kreise ξ und ζ berühren. Zugleich werden folgende mit (*F.*) und (*H.*) analoge Formeln zu notiren sein:

(F_1.) $\qquad \zeta\beta \quad \text{parallel} \quad \xi\eta\,,$

und

(H_1.) $\qquad R_\beta = R_\zeta - (\xi\eta)\,,$

wo β den Mittelpunkt, und R_β den Radius des Kreises β vorstellen.

Aus (*F.*), (F_1.), und (*H.*), (H_1.) folgt nun sofort:

(*J.*) $\qquad \zeta\alpha \quad \text{parallel} \quad \zeta\beta$

und

(*K.*) $\qquad R_\alpha = R_\beta\,.$

Digitized by Google

Die Formel (*J.*) zeigt, dass die fünf Punkte A_ζ, α, ζ, β, B_ζ in *gerader Linie* liegen, dass dieselben also einen *Durchmesser* des Kreises ζ repräsentiren. Andererseits zeigt die Formel (*K.*), dass die beiden Kreise α und β, welche den Kreis ζ in den Endpunkten dieses Durchmessers berühren, beide *gleichgross* sind. Construiren wir also im Kreise ζ den zum Durchmesser $A_\zeta \alpha \zeta \beta B_\zeta$ senkrechten Durchmesser $p \zeta q$ [vergl. die Figur (5.)], so wird dieser letztere zu bezeichnen sein als eine *Symmetrielinie* der beiden Kreise α, β.

Denken wir uns in der *ursprünglichen* Figur, ausser dem Kreise ζ, noch beliebig viele andere Kreise $\zeta', \zeta'', \zeta''', \cdots$ construirt, welche alle, ebenso wie ζ, die beiden Linien α, β, und zwar in der nämlichen Weise wie ζ, berühren, so werden offenbar all' diese Kreise ζ, ζ', ζ'', ζ''', $\cdots$ von der Halbirungslinie γ_1 des Winkels $\alpha\beta$ *senkrecht* geschnitten werden. Analoges muss daher auch in der *transformirten* Fig. (5.) stattfinden. Es muss daher die Linie γ_1 bei der Transformation in einen Kreis γ_1 sich verwandeln, welcher die Eigenschaft hat, orthogonal zu sein nicht nur zum Kreise ζ, sondern auch zu all' denjenigen Kreisen ζ', ζ'', ζ''', $\cdots$, welche die beiden Kreise α und β in der nämlichen Weise wie ζ berühren. Nun sind aber, wie wir gefunden haben, die Kreise α und β in der transformirten Figur (5.) *gleichgross*. Folglich muss der Kreis γ_1 daselbst dargestellt sein durch die *Symmetrielinie* der beiden Kreise α, β, also dargestellt sein durch den schon construirten *Durchmesser* $p \zeta q$.

Legen wir jetzt in der transformirten Figur (5.) im Punkte A_ζ eine Tangente mn an die daselbst einander berührenden Kreise ζ und α, so ist offenbar:

$$mn \text{ parallel } pq .$$

Folglich werden diese beiden Linien mn und pq von der Transversalen U unter *gleichen* Winkeln geschnitten. Also:

$$U \text{ isogonal zu } mn, pq .$$

Diese Formel kann, weil mn Tangente des Kreises α im Punkte A_ζ, andererseits aber pq, wie soeben bemerkt wurde, identisch mit γ_1 ist, auch so geschrieben werden:

(6.) $$U \text{ isogonal zu } \alpha, \gamma_1 .$$

Selbstverständlich muss diese für die *transformirte* Figur

Digitized by Google

gefundene Formel (6.) auch gültig sein für die *ursprüngliche* Figur. Denken wir uns dieselbe aber auf diese letztere Figur bezogen, so muss, wie aus der Symmetrie unserer Bezeichnungen ohne Weiteres sich ergiebt, auch folgende analoge Formel stattfinden:

(7.) U isogonal zu α, β_1 .

Durch Zusammenfassung der vier für die *ursprüngliche* Figur erhaltenen Formeln (2.), (3.) und (6.), (7.) erhalten wir nun sofort:

(8.) U isogonal zu $\alpha, \beta_1, \gamma_1, \beta_3, \gamma_3$.

In der ursprünglichen Figur schneidet also der Kreis U die fünf geraden Linien $\alpha, \beta_1, \gamma_1, \beta_3, \gamma_3$ unter *gleichen* Winkeln. Zufolge unseres zweiten Hülfssatzes muss daher ein mit U concentrischer Kreis U_0 existiren, welcher die Eigenschaft hat, jene fünf geraden Linien zu berühren. Also:

(9.) U_0 tangential zu $\alpha, \beta_1, \gamma_1, \beta_3, \gamma_3$.

Dieser Kreis U_0 berührt also z. B. auch die drei Linien $\alpha, \beta_1, \gamma_1$, und wird daher, wie aus der Definition des Kreises $\mathfrak{A}$ folgt, identisch sein mit $\mathfrak{A}$. Somit gewinnt die Formel (9.) folgende Gestalt:

(10.) $\mathfrak{A}$ tangential zu $\alpha, \beta_1, \gamma_1, \beta_3, \gamma_3$.

In analoger Weise werden sich nun offenbar analoge Formeln ergeben für die Kreise $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$; so dass wir also, Alles zusammengefasst, folgende drei Formeln erhalten:

(11.)
$\mathfrak{A}$ tangential zu $\alpha, \beta_1, \gamma_1, \beta_3, \gamma_3$,
$\mathfrak{B}$ tangential zu $\beta, \gamma_1, \alpha_1, \gamma_3, \alpha_3$,
$\mathfrak{C}$ tangential zu $\gamma, \alpha_1, \beta_1, \alpha_3, \beta_3$.

Hieraus aber folgt sofort:

(12.)
α_3 tangential zu $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$,
β_3 tangential zu $\mathfrak{C}, \mathfrak{A}$,
γ_3 tangential zu $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$.

Und dies sind die zu beweisenden Eigenschaften (*E.*) der Linien $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$. [Vergl. die zweite Seite dieses Aufsatzes.]

Digitized by Google

Bemerkung.

Der auf der ersten Seite dieses Aufsatzes angegebene *Steiner'sche Satz*, dass $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ mit $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ identisch sind, gilt auch dann noch, wenn die von Hause aus gegebenen Linien α, β, γ nicht *gerade* Linien, sondern *Kreise* sind. Nur hat man in diesem allgemeineren Falle in den Definitionen von $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ gewisse Abänderungen eintreten zu lassen. Setzt man der Einfachheit willen voraus, dass von den gegebenen Kreisen α, β, γ jeder ausserhalb der beiden andern liegt, so sind diese Abänderungen folgende:

I. — Bezeichnet ϱ den gemeinschaftlichen Orthogonalkreis jener drei von Hause aus gegebenen Kreise α, β, γ, so hat man unter $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ nicht mehr gerade Linien, sondern *zu ϱ orthogonale Kreise* zu verstehen. Insbesondere hat man unter α_1 die senkrechte Trajectorie all' derjenigen Kreise zu verstehen, welche die beiden gegebenen Kreise β und γ gleichartig berühren oder auch unter gleichen Winkeln schneiden. Und in analoger Weise hat man β_1 und γ_1 zu definiren.

II. — Was $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ und $\xi, \eta, \zeta, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ anbetrifft, so hat man unter $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ nicht mehr gerade Linien, sondern *zu ϱ orthogonale Kreise* zu verstehen, im Uebrigen aber die für $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \xi, \eta, \zeta, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ gegebenen Definitionen beizubehalten.

Solches festgesetzt, werden alsdann die vorhin angestellten Betrachtungen, abgesehen von gewissen leicht sich ergebenden Modificationen, Schritt für Schritt in Gültigkeit bleiben, und zu dem Resultat führen, dass auch in diesem allgemeineren Falle $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ mit $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ *identisch* sind.

Digitized by Google

W. Scheibner, *Zur Reduction elliptischer, hyperelliptischer und Abel'scher Integrale. Das Abel'sche Theorem für einfache und Doppelintegrale.*

Wenn es sich um die Zurückführung eines allgemeinen elliptischen Integrals auf die Normalform handelt, ist es wesentlich, die darin enthaltenen elementar integrabeln Theile bequem abzutrennen. Einen Beitrag zur Lösung dieser Aufgabe sollen die folgenden Betrachtungen liefern, welche u. A. ein Verfahren entwickeln, um ohne die Auflösung algebraischer Gleichungen die mehrfachen Wurzeln unter dem Integralzeichen zu entfernen. Zugleich wird sich ein enger Zusammenhang mit den allgemeinen von Abel entdeckten Sätzen über algebraische Integrale herausstellen.

1.

Wenn $F(x\xi)$ eine beliebige rationale Function von x und dem Radical $\xi = \sqrt[k]{s(x)}$ bezeichnet, wo die ganze Function s von dem Grade k sei, so erhält das allgemeine hyperelliptische Integral

$$\Omega = \int F(x\xi)\, dx$$

die Form

$$\Omega = \int F_1(x)\, dx + \int F_2(x)\, du = \Omega_1 + \Omega_2 ,$$

in welcher F_1 und F_2 rational von x abhängen und $du = \frac{dx}{\xi}$ geschrieben ist. Um beide Integrale in ihre einfacheren Bestandtheile zu zerlegen, beginnen wir mit dem Integral der rationalen Function

$$F_1 x = \frac{\varphi x}{fx} \quad \text{oder} \quad \Omega_1 = \int \frac{\varphi x}{fx}\, dx$$

Digitized by Google

und nennen gx den grössten gemeinschaftlichen Theiler von fx und der Derivirten $f'x$. Sei demgemäss

$$f = F \cdot g \ , \qquad f' = F_1 \cdot g \ ,$$

so ergibt sich sogleich

$$F \cdot g' = (F_1 - F')\, g \ .$$

Setzt man folglich

$$\Omega_1 = \frac{\chi x}{gx} + \int \frac{\Phi x}{Fx}\, dx \ ,$$

wo $\frac{\Phi}{F}$ eine ächt gebrochene Function sein soll, so erhält man durch Differentiation

$$\frac{\varphi}{f} = \frac{\chi'}{g} - \frac{\chi g'}{gg} + \frac{\Phi}{F} \quad \text{oder} \quad \varphi = F\chi' + (F' - F_1)\,\chi + g\Phi \ .$$

Diese Gleichung ist durch geeignete Bestimmung der ganzen Functionen Φ und χ identisch zu erfüllen. Da zu Ω eine Integrationsconstante c hinzutreten kann, so bleibt χx um $c.gx$ unbestimmt, so dass, wenn gx auf den l^{ten} Grad steigt, der Coefficient von x^l in χ beliebig angenommen und z. B. gleich Null gesetzt werden darf. Seien $g\,f$ und φ resp. vom Grade $l\ m\ n$, also F und Φ vom Grade $m - l$ resp. $m - l - 1$, so sind in Φ $m - l$ Coefficienten zu bestimmen, während sich im Ganzen $n + 1$ Coefficientengleichungen ergeben, denen genügt werden soll. Nur wenn $n < m - 1$, steigt die Anzahl der Coefficientengleichungen auf m, weil das Product $g\Phi$ vom Grade $m - 1$ ist. In diesem Falle hat man sich in φ die in $x^{n+1} \ldots x^{m-1}$ multiplicirten Glieder mit verschwindenden Coefficienten hinzugefügt zu denken. Hiernach haben wir im Allgemeinen χ vom Grade $n - m + l + 1$ zu nehmen, mit eben so vielen zu bestimmenden Coefficienten, weil der Coefficient von x^l nicht in Betracht kommt. Für $n \leqq m - 1$ steigt aus demselben Grunde χ auf den Grad $l - 1$, mit l Coefficienten, so dass in allen Fällen die Zahl der zu bestimmenden Grössen mit der der linearen Coefficientengleichungen übereinkommt.

Nach Abtrennung des rationalen Theiles $\frac{\chi}{g}$ wird das restirende Integral

Digitized by Google

$$\int \frac{\Phi}{F}\, dx = \sum_p{}' \frac{\Phi p}{F' p} \log (x - p) \ ,$$

wenn p die (sämmtlich ungleichen) Wurzeln der Gleichung $Fp = 0$ bezeichnet[1].

2.

Wir wenden uns zur Reduction des zweiten Integrals

$$\Omega_2 = \int \frac{\varphi x}{fx}\, du$$

und bringen dasselbe durch Abtrennung des irrationalen Theiles auf die Form

$$\Omega_2 = \frac{\chi x}{gx}\, \xi + \int \frac{Xx}{Fx}\, du \ .$$

Die Differentiation führt auf die Gleichung

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial u} = \frac{\varphi}{f} = \frac{\chi}{g}\, \xi\xi' + \left(\frac{\chi'}{g} - \frac{\chi g'}{gg}\right) \xi\xi + \frac{X}{F}$$

oder

$$\varphi = Fs\chi' + [(F' - F_1)s + \tfrac{1}{2} Fs']\chi + gX \ .$$

Wiederum bezeichnen wir durch $k\ l\ m\ n$ den Grad von $s\ g\ f\ \varphi$. Dann können die Functionen χ und X resp. auf den Grad $n - m + l - k + 1$ und $n - l$ steigen, wobei im Ganzen $2n - m - k + 3$ Coefficienten zu bestimmen bleiben. Da nun $n + 1$ Coefficientengleichungen vorhanden sind, so dürfen wir über $n - m - k + 2$ Coefficienten willkürlich verfügen und etwa den Grad von X um so viele Einheiten erniedrigen. Nimmt man also für X eine Function vom Grade $m - l + k - 2$, so stimmt die Anzahl der Coefficienten mit der der linearen Gleichungen überein. Eine Ausnahme tritt analog wie im früheren Falle ein, wenn $n < m + k - 2$, alsdann hat man $m + k - 1$ Coefficientengleichungen und χ vom Grade $l - 1$ zu nehmen.

Setzt man

$$\frac{X}{F} = \Phi_{k-2} + \frac{\Phi}{F} \ ,$$

so wird

---

1) Das vorstehend erörterte Verfahren ist im Wesentlichen bereits von Baltzer in diesen Berichten, 1873 S. 536, angegeben worden.

Digitized by Google

$$\frac{X}{F}\,du = \sum_{0}^{k-2}{}' a_i x^i\,du + \sum_{p}{}' \frac{\Phi p}{F'p}\cdot\frac{du}{x-p}\,,$$

die Summe erstreckt über die (ungleichen) Wurzeln der Gleichung $Fp = 0$.

3.

Betrachten wir jetzt das Integral $\Omega = \int \frac{Xx}{Fx}\,du$ für $k = 2$. Alsdann werden X und F beide vom Grade $m - l$ und

$$\frac{X}{F} = a_0 + \sum{}' \frac{Xp}{F'p}\,\frac{1}{x-p}\,.$$

Das Integral Ω lässt sich in diesem Falle bekanntlich durch Logarithmen ausdrücken, da für $\varpi\varpi = ap^2 + 2bp + c = s(p)$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\log\frac{ax+b+\xi\sqrt{a}}{ax+b-\xi\sqrt{a}}\,,$$

$$\int \frac{dx}{(x-p)\xi} = -\frac{1}{2\varpi}\log\frac{(ap+b)\,x+bp+c+\xi\varpi}{(ap+b)\,x+bp+c-\xi\varpi}\,.$$

Es fragt sich, ob auch für $k > 2$ solche logarithmische Terme vorhanden sind. Diese Frage ist von ABEL untersucht worden, im ersten Theile seines *Précis d'une théorie des fonctions elliptiques*, CRELLE's Journal, Bd. IV, S. 236—77 (vergl. Bd. VI, S. 77 flg., sowie im Nachlasse die Abhandlung *Théorie des transcendantes elliptiques*), nachdem er bereits Bd. I, S. 185 bis 224, den Satz bewiesen, dass das Integral $\int \Phi x\,du$, wo Φx eine geeignete ganze Function, dann und nur dann durch Logarithmen integrirt werden kann, wenn das Radical ξ in einen periodischen Kettenbruch entwickelbar ist.

Betrachten wir allgemein ein Aggregat logarithmischer Terme von der Form

$$\Sigma\lambda\,\log\,\psi(x\xi) = \Sigma\lambda\,\log\,(\alpha+\beta\xi)\,,$$

wo ψ rational von x und ξ abhängt, während α und β rationale Functionen von x bezeichnen. Sei nun

$$\int \frac{\chi x}{fx}\,du = \lambda\,\log\,(\alpha+\beta\xi)\,,$$

Digitized by Google

so erhält man durch Differentiation nach u:

$$\frac{\chi}{f} = \lambda \left(\frac{(\alpha\beta' - \beta\alpha')s + \frac{1}{2}\alpha\beta s'}{\alpha^2 - \beta^2 s} + \frac{\alpha\alpha' - \beta\beta' s - \frac{1}{2}\beta^2 s'}{\alpha^2 - \beta^2 s}\xi \right) .$$

Damit rechts der irrationale Term verschwinde, muss

$$\frac{\alpha\alpha' - \beta\beta' s - \frac{1}{2}\beta^2 s'}{\alpha^2 - \beta^2 s} = 0$$

sein, integrirt

$$\alpha^2 - \beta^2 s = \text{const.}$$

Mithin wird

$$\int \frac{\chi}{f}\, du = \tfrac{1}{2}\lambda \log (\alpha + \beta\xi)^2 = \tfrac{1}{2}\lambda \log \frac{(\alpha+\beta\xi)^2}{\alpha^2 - \beta^2 s} = \frac{\lambda}{2} \log \frac{\alpha + \beta\xi}{\alpha - \beta\xi} .$$

Umgekehrt führt jeder Ausdruck $\log \frac{\alpha + \beta\xi}{\alpha - \beta\xi}$ auf ein Integral von der vorgelegten Form, ohne dass eine besondere Form von s dazu erforderlich wäre, wie die gefundene Gleichung $\alpha^2 - \beta^2 s = \text{const.}$ anzudeuten scheint. Der scheinbare Widerspruch erklärt sich durch die einfache Betrachtung, dass

$$\log \frac{(\alpha+\beta\xi)^2}{\alpha^2 - \beta^2 s} = \log \frac{\alpha^2 + \beta^2 s + 2\alpha\beta\xi}{\alpha^2 - \beta^2 s} = \log (\alpha_1 + \beta_1 \xi) ,$$

und hier ist $\alpha_1^2 - \beta_1^2 s = 1$ oder

$$(\alpha^2 + \beta^2 s)^2 - 4\alpha^2\beta^2 s = (\alpha^2 - \beta^2 s)^2$$

offenbar eine *identische* Gleichung. Zugleich erhellt, dass man in dem Quotienten $\frac{\alpha + \beta\xi}{\alpha - \beta\xi}$ für α und β nur *ganze* Functionen von x zu betrachten braucht.

4.

Wir schliessen jetzt, dass das Integral

$$\int \frac{Xx}{Fx}\, du = \sum' \frac{\lambda}{2} \log \frac{\alpha + \beta\xi}{\alpha - \beta\xi}$$

durch Logarithmen ausgedrückt werden kann, wenn $\frac{X}{F}$ die Form hat

$$\frac{X}{F} = \sum' \lambda \frac{(\alpha\beta' - \beta\alpha')s + \frac{1}{2}\alpha\beta s'}{\alpha^2 - \beta^2 s} = \sum' \lambda \frac{\sigma\alpha' - \frac{1}{2}\alpha\sigma'}{\beta\sigma} ,$$

Digitized by Google

wo $$\sigma = \alpha^2 - \beta^2 s \ ,$$

und der Nenner β nur scheinbar vorkommt, weil identisch

$$\sigma\alpha' - \tfrac{1}{2}\alpha\sigma' = \beta\left[(\alpha\beta' - \beta\alpha')s + \tfrac{1}{2}\alpha\beta s'\right] .$$

Setzt man

$$\frac{\alpha}{\beta} = q \ ,$$

so wird

$$\frac{X}{F} = \sum' \frac{\lambda}{2} \frac{qs' - 2sq'}{q^2 - s} = \sum' \frac{\lambda}{2} \left(2q' - q\frac{\sigma'}{\sigma}\right) ,$$

während

$$\sigma = q^2 - s \ ,$$

und q eine beliebige *rationale* Function von x ausdrückt. Es lässt sich aber zeigen, dass auch hier die Wahl einer *ganzen* Function ausreicht, mit anderen Worten, dass man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\beta = 1$ nehmen darf[1]).

Schreibt man nämlich

$$(\alpha + \beta\xi)(q - \xi) = \alpha_1 + \beta_1\xi$$

und bildet das recurrirende Gleichungensystem

$$\alpha = q\beta - \beta_1 \ , \quad \alpha_1 = q\alpha - \beta s = q_1\beta_1 - \beta_2 \ ,$$
$$\alpha_2 = q_1\alpha_1 - \beta_1 s = q_2\beta_2 - \beta_3 \ , \qquad \text{u. s. w.} \ ,$$

so stellen die Grössen $\beta\ \beta_1\ \beta_2 \cdots$ als Divisionsreste eine Reihe von Functionen abnehmenden Grades dar, so dass $\beta_m = 0$ gesetzt werden darf. Damit wird

$$\frac{\alpha + \beta\xi}{\alpha - \beta\xi} = \frac{q + \xi}{q - \xi} \cdot \frac{\alpha_1 + \beta_1\xi}{\alpha_1 - \beta_1\xi} = \frac{q + \xi \cdot q_1 + \xi \cdots q_{m-1} + \xi}{q - \xi \cdot q_1 - \xi \cdots q_{m-1} - \xi} \ ,$$

$$\log\frac{\alpha + \beta\xi}{\alpha - \beta\xi} = \sum' \log\frac{q + \xi}{q - \xi}$$

und

$$\int \frac{X}{F}\,du = \sum' \frac{\lambda}{2} \log\frac{q + \xi}{q - \xi}$$

nebst

$$\frac{X}{F} = \sum' \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{qs' - 2sq'}{q^2 - s} = \sum' \frac{\lambda}{2}\left(2q' - q\frac{\sigma'}{\sigma}\right) ,$$

1) Diess hat schon Abel hervorgehoben (Crelle Bd. I, S. 202), jedoch ohne von dieser Bemerkung ausreichenden Nutzen zu ziehen.

Digitized by Google

wenn $\sigma = q^2 - s$, und die Grössen q beliebige *ganze* Functionen bedeuten.

Aus dem Quotienten $\frac{\sigma'}{\sigma}$ können nur Partialbrüche mit linearem Nenner hervorgehen, also sind auch hier mehrfache Wurzeln des Nenners Fx ausgeschlossen.

Wenn

$$\sigma(p) = 0 \ , \quad q(p) = r = \sqrt{s(p)} \ ,$$

so wird

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \sum_p \frac{1}{x-p} \ , \quad q\frac{\sigma'}{\sigma} = \sum_p{}' \frac{q-r}{x-p} + \sum_p \frac{r}{x-p} \ ,$$

und hier stellt die Summe Σ' eine *ganze* Function von x dar, deren Coefficienten als symmetrische Functionen der Wurzeln p sich rational durch die Coefficienten in σ ausdrücken. Man kann daher schreiben

$$\log \frac{q+\xi}{q-\xi} = \int \psi x \, du - \sum_p \int \pm \frac{\sqrt{s(p)}\, d\xi}{(x-p)\xi} \ ,$$

wo die ganze Function

$$\psi x = 2q' - \sum_p{}' \frac{q-r}{x-p} \ ,$$

und das doppelte Vorzeichen sich darnach richtet, ob für die betreffende Wurzel p von $\sigma = (q-\xi)(q+\xi)$ der erste oder der zweite Factor verschwindet.

Sei q vom Grade l, so kann $2q' - q\frac{\sigma'}{\sigma}$ die Dimension $l-1$ nicht übersteigen; sobald $2l > k$, sinkt die Dimension von $\frac{qs' - 2sq'}{q^2 - s}$ auf $k - l - 1$, so dass in jedem Falle die Dimension des Quotienten $\frac{X}{F}$ den Werth $\frac{k-2}{2}$ nicht überschreitet, was natürlich auch von der ganzen Function ψx gilt.

5.

Um ein bestimmtes Beispiel vor Augen zu haben, setzen wir $k = 3$. Dann wird

Digitized by Google

$$\frac{X}{F} = a_0 + \sum_p \frac{r_p}{x-p} ,$$

$$\int \frac{X}{F}\,du = a_0 u + \sum_p r_p w_p = \sum \frac{\lambda}{2} \log \frac{q+\xi}{q-\xi} ,$$

wo $w_p = \int \frac{du}{x-p}$ jetzt ein elliptisches Integral dritter Gattung bezeichnet. Abel hebt das Fehlen eines Terms von der Form $v = \int x\,du$ mit den Worten hervor: »*il est remarquable, que la fonction de la seconde espèce n'entre point dans cette relation*« (Crelle Bd. IV, S. 275).

Setzt man

$$s = x^3 + lx^2 + mx + n , \quad q = \lambda x + \mu ,$$

so werden $p_1\ p_2\ p_3$ die Wurzeln der Gleichung

$$\varpi^2 = p^3 + lp^2 + mp + n = (\lambda p + \mu)^3 ,$$

also

$$p_1 + p_2 + p_3 = \lambda^2 - l , \quad p_1 p_2 + p_2 p_3 + p_3 p_1 = m - 2\lambda\mu ,$$
$$p_1 p_2 p_3 = \mu^2 - n .$$

Nach Elimination von λ und μ ergibt sich die zwischen den drei Parametern stattfindende Relation, welche in der rationalen Form

$$\tfrac{1}{4}(m - \sum p_1 p_2)^2 = (l + p_1 + p_2 + p_3)(n + p_1 p_2 p_3)$$

geschrieben werden kann.

Durch Differentiation derselben erhält man ohne Mühe

$$\sum (\lambda p_2 + \mu)(\lambda p_3 + \mu) dp_1 = \sum \pm \varpi_2 \varpi_3 dp_1 = 0 ,$$

mithin auch

$$\frac{dp_1}{\varpi_1} + \frac{dp_2}{\varpi_2} \pm \frac{dp_3}{\varpi_3} = 0$$

neben

$$\log \frac{\lambda x + \mu + \xi}{\lambda x + \mu - \xi} = \int \left(2\lambda - \sum_p \frac{\lambda x + \mu}{x-p}\right) du$$
$$= -\lambda u - \sum_p (\lambda p + \mu) \int \frac{du}{x-p} .$$

Diese Gleichungen enthalten das Additionstheorem der elliptischen Integrale erster und dritter Gattung in Bezug auf den Parameter.

Digitized by Google

6.

Schreibt man

$$q = q_0 x^l + q_1 x^{l-1} \cdots \quad \text{also} \quad r = q_0 p^l + q_1 p^{l-1} \cdots ,$$

$$\sigma = q^2 - s = \sigma_0 x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \cdots ,$$

so bestimmen sich die n Wurzeln p der Gleichung

$$\sigma(p) = r r - s(p) = 0$$

als algebraische Functionen der $l+1$ Coefficienten $q_0\ q_1 \cdots q_l$, mithin werden $n - l - 1$ algebraische Bedingungsgleichungen zwischen den Wurzeln p stattfinden, welche sich durch Elimination der q_i aus den n Gleichungen $r = \sqrt{s(p)}$ oder den äquivalenten:

$$\Sigma p_1 = -\frac{\sigma_1}{\sigma_0} , \quad \Sigma p_1 p_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_0} \cdots \quad p_1 p_2 \cdots p_n = (-1)^n \frac{\sigma_n}{\sigma_0}$$

ergeben. Folglich sind $n - l - 1$ Wurzeln durch die übrigen $l+1$ bestimmt.

Abel und Jacobi haben gezeigt, dass diese Bedingungsgleichungen sehr einfach in transscendenter Form aufgestellt werden können.

Differentiirt man nämlich die Gleichung $\sigma(p) = 0$, so ergibt sich

$$\sigma'(p)\,dp + 2\,r\,d'r = 0 ,$$

wenn unter d' die Differentiation nach den variabeln Coefficienten q_i verstanden wird, also $d'r = p^l dq_0 + p^{l-1} dq_1 \ldots$ Setzt man

$$r = \pm\sqrt{s(p)} = \pm\varpi ,$$

so wird

$$\frac{s'(p)\,dp}{\pm\varpi} = -2\,d'r ;$$

durch Multiplication mit $\frac{\varrho(p)}{\sigma'(p)}$ geht hieraus

$$\frac{\varrho\,dp}{\pm\varpi} = -2\,\frac{\varrho(p)}{\sigma'(p)}\,d'r$$

hervor, wo

$$\varrho(p) = r_0 p^m + r_1 p^{m-1} + \cdots$$

Digitized by Google

Bildet man nun die Summe über die sämmtlichen Wurzeln p, so folgt

$$\sum' \frac{\varrho\, dp}{\pm\varpi} = -2 \sum' \frac{\varrho\, d'r}{\sigma'(p)} .$$

Da hier der Zähler vom Grade $l+m$, der Nenner vom Grade $n-1$ ist, so verschwindet nach einem bekannten Satze die Summe auf der rechten Seite für $m < n-l-1$ und man erhält einfach

$$\sum' \frac{\varrho\, dp}{\pm\varpi} = 0 .$$

Setzt man $\varrho = p^m$, so ergeben sich die gesuchten $n-l-1$ transscendenten Gleichungen in der integrabeln Form

$$\sum_p' \frac{p^m dp}{\pm\varpi} = 0 \quad \text{für} \quad m = 0, 1, \cdots n-l-2 .$$

Man kann folglich schreiben

$$\sum_{i=1}^{n-l}{}' \int^{p_i} \frac{p^m dp}{\pm\varpi} = \gamma_{m+1} - \sum_{i=n-l+1}^{n}{}' \int^{p_i} \frac{p^m dp}{\pm\varpi} = c_{m+1} ,$$

wenn man die l unabhängigen Wurzeln $p_{n-l+1} \cdots p_n$ als willkürliche Constanten betrachtet, die mit den Integrationsconstanten γ_{m+1} sich vereinigen. Auf diese Weise werden die algebraischen Bedingungsgleichungen durch $n-l-1$ transscendente Gleichungen mit eben so vielen willkürlichen Constanten $c_1\, c_2 \cdots c_{n-l-1}$ ersetzt, und können desshalb als vollständige algebraische Integralgleichungen des Systems Differentialgleichungen $\sum_{i=1}^{n-l}{}' \frac{p_i^m dp_i}{\pm\varpi_i} = 0$ angesehen werden. In der That enthalten die algebraischen Gleichungen nach Elimination der q_i die l Wurzeln $p_{n-l+1} \cdots p_n$ als willkürliche Constanten, und diese reichen für die vollständige Integration aus, sobald $l \leqq n-l-1$.

Sei z. B. $k=3$, $l=1$, so wird $n=3$ und es ergibt sich

$$\int \frac{dp_1}{\pm\varpi_1} + \int \frac{dp_2}{\pm\varpi_2} = c_1 ,$$

äquivalent den algebraischen Gleichungen

$$\pm\varpi_1 = q_0 p_1 + q_1 , \quad \pm\varpi_2 = q_0 p_2 + q_1 , \quad \pm\varpi_3 = q_0 p_3 + q_1 ,$$

Digitized by Google

wo $\varpi\varpi = p^3 + lp^2 + mp + n$, oder in rationaler Form, nach Elimination von q_0 und q_1, wie Art. 5 gezeigt worden:

$$\tfrac{1}{4}(m - \Sigma p_1 p_2)^2 = (l + p_1 + p_2 + p_3)(n + p_1 p_2 p_3) .$$

Man sieht, dass p_3 einfach an die Stelle der willkürlichen Constante getreten ist.

7.

Die Coefficienten q_i können wir uns auf rationale Weise abhängig denken von irgend welchen unabhängigen Variabeln $\varrho_0\ \varrho_1 \cdots$, alsdann werden auch die Coefficienten σ_i in σ rationale Functionen der ϱ_i, und die Wurzeln p algebraische Functionen der ϱ_i. Im Falle die Gleichung für σ reductibel ist, also in irreductible Factoren

$$\sigma = \sigma^{(1)}\sigma^{(2)} \ldots$$

zerfällt, so zerfallen auch die Wurzeln p in mehrere Classen, so dass die symmetrischen Functionen der Wurzeln jeder Classe rational von den Variabeln ϱ_i abhängen. Auch kann der Fall eintreten, dass ein Factor $\sigma^{(1)}$ mit seinen Wurzeln von ϱ ganz unabhängig wird.

Um ein einfaches Beispiel zu haben, nehmen wir

$$r = \lambda\varrho + \mu = \pm\varpi$$

von *einer* unabhängigen Variablen ϱ linear abhängig, während $\lambda\ \mu\ \nu$ ganze Functionen l-ten Grades in p bezeichnen sollen.

Setzt man nun

$$s(p) = \mu^2 - \lambda\nu = \varpi^2 = s_0 p^{2l} + s_1 p^{2l-1} \cdots ,$$

so wird

$$\sigma(p) = (\lambda\varrho + \mu)^2 - (\mu^2 - \lambda\nu) = \lambda(\lambda\varrho^2 + 2\mu\varrho + \nu) ,$$

also

$$\sigma^{(1)} = \lambda = \lambda_0 p^l + \lambda_1 p^{l-1} \ldots ,$$

$$\sigma^{(2)} = \lambda\varrho^2 + 2\mu\varrho + \nu = \sigma_0 p^l + \sigma_1 p^{l-1} \cdots$$

Hier ist $n = 2l$, aber während die Wurzeln von $\sigma^{(2)}$ Functionen der Variablen ϱ sind, bleiben die Wurzeln von $\sigma^{(1)}$ Constanten.

Digitized by Google

Man erhält folglich durch Differentiation der Gleichung

$$\lambda\varrho^2 + 2\mu\varrho + \nu = \sigma = 0 :$$

$$\sigma'(p)\,dp + 2(\lambda\varrho + \mu)\,d\varrho = 0$$

oder

$$\frac{\sigma'(p)\,dp}{\pm\varpi} = -2\,d\varrho .$$

Daraus entspringt für die l Wurzeln von $\sigma = \sigma^{(2)}$ die Proportion

$$dp_1 : dp_2 \cdots : dp_l : d\varrho = \frac{\pm\varpi_1}{\sigma'(p_1)} : \frac{\pm\varpi_2}{\sigma'(p_2)} \cdots : \frac{\pm\varpi_l}{\sigma'(p_l)} : -\frac{1}{2} .$$

Hier ist

$$\sigma'(p_i) = \sigma_0(p_i - p_1)(p_i - p_2)\cdots(p_i - p_l) = \lim_{p=p_i} \frac{\sigma(p)}{p - p_i}$$

nebst

$$\sigma_0 = \lambda_0\varrho^2 + 2\mu_0\varrho + \nu_0 .$$

Das gefundene System totaler Differentialgleichungen ist offenbar äquivalent mit dem Jacobi'schen *hyperelliptischen* System[1])

$$\sum_p \frac{p^m\,dp}{\pm\varpi} = 0 \quad \text{für} \quad m = 0, 1, \cdots l-2 ,$$

in Verbindung mit der Gleichung

$$\sum \frac{p^{l-1}\,dp}{\pm\varpi} = -2\,d\varrho \sum \frac{p^{l-1}}{\sigma'(p)} = -\frac{2\,d\varrho}{\lambda_0\varrho^2 + 2\mu_0\varrho + \nu_0} .$$

Die transscendenten Integralgleichungen

$$\sum \int \frac{p^m\,dp}{\pm\varpi} = c_{m+1}$$

und

$$\sum \int \frac{p^{l-1}\,dp}{\pm\varpi} = c_l + \frac{1}{\sqrt{s_0}} \log \frac{\lambda_0\varrho + \mu_0 + \sqrt{s_0}}{\lambda_0\varrho + \mu_0 - \sqrt{s_0}}$$

aber entsprechen den algebraischen Gleichungen

$$\sum p_1 = -\frac{\sigma_1}{\sigma_0} , \quad \sum p_1 p_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_0} , \quad \cdots \quad p_1 p_2 \cdots p_l = (-1)^l \frac{\sigma_l}{\sigma_0}$$

---

1) Crelle's Journal Band 32, Seite 220.

Digitized by Google

wo $$\sigma_i = \lambda_i \varrho^2 + 2\mu_i \varrho + \nu_i .$$

Die letzteren können auch ersetzt werden durch die l Gleichungen

$$\pm \varpi_i = (\lambda_0 p_i^l + \lambda_1 p_i^{l-1} \cdots + \lambda_l)\varrho + \mu_0 p_i^l + \mu_1 p_i^{l-1} \cdots + \mu_l .$$

8.

Die Anzahl der willkürlichen Constanten ist bei den verschiedenen Formen der Integralgleichungen die nämliche, da den Constanten $c_1 c_2 \cdots c_l \; \lambda_0 \; \mu_0 \; s_0 s_1 \cdots s_{2l}$ einerseits, die $3l+3$ Coefficienten $\lambda_i \; \mu_i \; \nu_i$ andererseits entsprechen. Bei der Elimination von ϱ fällt einfach die letzte transscendente Gleichung mit den drei Constanten $\lambda_0 \; \mu_0 \; c_l$ weg, also müssen auch in den algebraischen Systemen zugleich mit ϱ drei Constanten von selbst fortgehen. Jacobi zeigt in seiner eben citirten Abhandlung über die Integration der hyperelliptischen Differentialgleichungen, dass wenn man mittelst einer linearen Substitution ϱ durch $\bar{\varrho}$ ersetzt, die Gleichung

$$\lambda \varrho^2 + 2\mu\varrho + \nu = 0 \quad \text{in} \quad \bar{\lambda}\bar{\varrho}^2 + 2\bar{\mu}\bar{\varrho} + \bar{\nu} = 0$$

übergeht, während $\mu^2 - \lambda\nu = \bar{\mu}^2 - \bar{\lambda}\bar{\nu} = s(p)$.

In der That ergeben sich für

$$(\varrho + \alpha)(\bar{\varrho} + \beta) = \gamma ,$$

wo $\alpha \; \beta \; \gamma$ drei beliebige Constanten bedeuten, die bei der Elimination von ϱ oder $\bar{\varrho}$ von selbst weggehen, die identischen Formeln:

$$\frac{\lambda\varrho + 2\mu\varrho + \nu}{\varrho + \alpha} = \frac{\bar{\lambda}\bar{\varrho}^2 + 2\bar{\mu}\bar{\varrho} + \bar{\nu}}{\bar{\varrho} + \beta} ,$$

$$\mu^2 - \lambda\nu = \bar{\mu}^2 - \bar{\lambda}\bar{\nu} ,$$

wo

$$\gamma\bar{\lambda} = \alpha^2\lambda - 2\alpha\mu + \nu \quad , \quad \gamma\lambda = \beta^2\bar{\lambda} - 2\beta\bar{\mu} + \bar{\nu}$$

$$\gamma\bar{\mu} = \alpha(\alpha\beta - \gamma)\lambda - (2\alpha\beta - \gamma)\mu + \beta\nu , \quad \gamma\mu = \beta(\alpha\beta - \gamma)\bar{\lambda} - (2\alpha\beta - \gamma)\bar{\mu} + \alpha\bar{\nu}$$

$$\gamma\bar{\nu} = (\alpha\beta - \gamma)^2\lambda - 2\beta(\alpha\beta - \gamma)\mu + \beta^2\nu , \quad \gamma\nu = (\alpha\beta - \gamma)^2\bar{\lambda} - 2\alpha(\alpha\beta - \gamma)\bar{\mu} + \alpha^2\bar{\nu}$$

Digitized by Google

Für $l = 2$, $m = 0$ erhält man

$$\int \frac{dp_1}{\pm \varpi_1} + \int \frac{dp_2}{\pm \varpi_2} = c_1 ,$$

$$\int \frac{p_1 dp_1}{\pm \varpi_1} + \int \frac{p_2 dp_2}{\pm \varpi_2} = c_2 + \frac{1}{\sqrt{s_0}} \log \frac{\lambda_0 \varrho + \mu_0 + \sqrt{s_0}}{\lambda_0 \varrho + \mu_0 - \sqrt{s_0}}$$

nebst

$$p_1 + p_2 = -\frac{\lambda_1 \varrho^2 + 2\mu_1 \varrho + \nu_1}{\lambda_0 \varrho^2 + 2\mu_0 \varrho + \nu_0} , \quad p_1 p_2 = \frac{\lambda_2 \varrho^2 + 2\mu_2 \varrho + \nu_2}{\lambda_0 \varrho^2 + 2\mu_0 \varrho + \nu_0}$$

oder

$$\pm \varpi_1 = (\lambda_0 p_1^2 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2)\varrho + \mu_0 p_1^2 + \mu_1 p_1 + \mu_2 ,$$
$$\pm \varpi_2 = (\lambda_0 p_2^2 + \lambda_1 p_2 + \lambda_2)\varrho + \mu_0 p_2^2 + \mu_1 p_2 + \mu_2 .$$

Um hieraus die EULER-LAGRANGE'sche Form des algebraischen Integrals der elliptischen Differentialgleichung abzuleiten, schreiben wir für $p_1 + p_2 = x$

$$(\lambda_0 x + \lambda_1)\varrho^2 + 2(\mu_0 x + \mu_1)\varrho + \nu_0 x + \nu_1 = 0$$

oder

$$[(\lambda_0 x + \lambda_1)\varrho + \mu_0 x + \mu_1]^2 = (\mu_0 x + \mu_1)^2 - (\lambda_0 x + \lambda_1)(\nu_0 x + \nu_1)$$

und bemerken, dass

$$(\pm \varpi_1) - (\pm \varpi_2) = (\lambda_0 \varrho + \mu_0)(p_1^2 - p_2^2) + (\lambda_1 \varrho + \mu_1)(p_1 - p_2)$$
$$= (p_1 - p_2)[(\lambda_0 x + \lambda_1)\varrho + \mu_0 x + \mu_1]$$
$$s_0 = \mu_0^2 - \lambda_0 \nu_0 , \quad s_1 = 2\mu_0 \mu_1 - \lambda_0 \nu_1 - \lambda_1 \nu_0 .$$

Damit folgt ohne Weiteres

$$\left(\frac{(\pm \varpi_1) - (\pm \varpi_2)}{p_1 - p_2}\right)^2 = s_0 x^2 + s_1 x + C_1$$

mit der einzigen Integrationsconstante

$$C_1 = \mu_1^2 - \lambda_1 \nu_1 .$$

Mithin sind bei der Elimination von ϱ *drei* Constanten fortgefallen.

Digitized by Google

9.

Der eben entwickelten Form der algebraischen Integralgleichung lässt sich eine zweite, analoge zur Seite stellen. Wir setzen $p_1 p_2 = y$ und erhalten ähnlich wie im vorigen Art.

$$[(\lambda_0 y - \lambda_2)\varrho + \mu_0 y - \mu_2]^2 = (\mu_0 y - \mu_2)^2 - (\lambda_0 y - \lambda_2)(\nu_0 y - \nu_2)$$
$$= s_0 y^2 + (C_1 - s_2) y + s_4 \ ,$$

weil

$$s_2 = \mu_1^2 - \lambda_1 \nu_1 + 2\mu_0\mu_2 - \lambda_0 \nu_2 - \lambda_2 \nu_0 \quad \text{und} \quad s_4 = \mu_2^2 - \lambda_2 \nu_2 \ .$$

Andererseits ergeben die Werthe von ϖ_1 und ϖ_2

$$\frac{\varpi_1 p_2 - \varpi_2 p_1}{p_1 - p_2} = (\lambda_0 \varrho + \mu_0) y - \lambda_2 \varrho - \mu_2$$

und quadrirt

$$\left(\frac{\varpi_1 p_2 - \varpi_2 p_1}{p_1 - p_2}\right)^2 = s_0 y^2 + (C_1 - s_2) y + s_4 \ .$$

Wenden wir uns zum Falle $l = 3$, so sind die beiden transscendenten Integralgleichungen

$$\Sigma \int \frac{dp}{\varpi} = c_1 \ , \quad \Sigma \int \frac{p\,dp}{\varpi} = c_2$$

durch zwei algebraische zu ersetzen, die durch Elimination von ϱ aus den drei Gleichungen

$$\varpi = (\lambda_0 p^3 + \lambda_1 p^2 + \lambda_2 p + \lambda_3)\varrho + \mu_0 p^3 + \mu_1 p^2 + \mu_2 p + \mu_3 \ ,$$

oder den rationalen

$$\sigma_0 (p_1 + p_2 + p_3) + \sigma_1 = 0 \ , \quad \sigma_0 (p_2 p_3 + p_3 p_1 + p_1 p_2) = \sigma_2 \ ,$$
$$\sigma_0 p_1 p_2 p_3 + \sigma_3 = 0$$

hervorgehen. Man erhält ohne Schwierigkeit

$$\frac{\Sigma \varpi_1 (p_2 - p_3)}{\Sigma p_1^2 (p_2 - p_3)} = (\lambda_0 \varrho + \mu_0) x + \lambda_1 \varrho + \mu_1 \ ,$$

$$\frac{\Sigma \varpi_1 (p_2^2 - p_3^2)}{\Sigma p_1^2 (p_2 - p_3)} = (\lambda_0 \varrho + \mu_0) y - \lambda_2 \varrho - \mu_2 \ ,$$

nebst

$$[(\lambda_0 x + \lambda_1)\varrho + \mu_0 x + \mu_1]^2 = s_0 x^2 + s_1 x + \mu_1^2 - \lambda_1 \nu_1 \ ,$$
$$[(\lambda_0 y - \lambda_2)\varrho + \mu_0 y - \mu_2]^2 = s_0 y^2 + (\mu_1^2 - \lambda_1 \nu_1 - s_2) y + \mu_2^2 - \lambda_2 \nu_2 \ ,$$

Digitized by Google

wo zur Abkürzung

$$x = p_1 + p_2 + p_3 \ , \quad y = p_2 p_3 + p_3 p_1 + p_1 p_2 \ .$$

Damit folgt sogleich

$$\frac{\Sigma \varpi_1 (p_2 - p_3)}{\Sigma p_1^2 (p_2 - p_3)} = s_0 x^2 + s_1 x + C_1 \ ,$$

$$\frac{\Sigma \varpi_1 (p_2^2 - p_3^2)}{\Sigma p_1^2 (p_2 - p_3)} = s_0 y^2 + (C_1 - s_2) y + C_2 \ ,$$

wo also

$$C_1 = \mu_1^2 - \lambda_1 \nu_1 \quad \text{und} \quad C_2 = \mu_2^2 - \lambda_2 \nu_2$$

die beiden Integrationsconstanten geworden sind.

10.

Mit der Ausdehnung des ABEL'schen Theorems auf mehrfache Integrale haben sich JACOBI (CRELLE Bd. VIII, S. 445) und ROSENHAIN (CRELLE Bd. XL, S. 329, 359) beschäftigt.

Um von einem einfachen Falle auszugehen, seien

$$\sigma (p q \varrho \varrho_1) = 0 \quad \text{und} \quad \sigma_1 (p q \varrho \varrho_1) = 0$$

zwei algebraische Gleichungen, durch welche die Variabeln p und q als algebraische Functionen von ϱ und ϱ_1 bestimmt werden. Nun ist aus der Theorie der Doppelintegrale bekannt, dass

$$\frac{\partial(\sigma \sigma_1)}{\partial(p q)} dp \, dq = \frac{\partial(\sigma \sigma_1)}{\partial(\varrho \varrho_1)} d\varrho \, d\varrho_1$$

oder

$$\varphi \, dp \, dq = \varphi \frac{\partial(\sigma \sigma_1)}{\partial(\varrho \varrho_1)} \frac{d\varrho \, d\varrho_1}{\frac{\partial(\sigma \sigma_1)}{\partial(p q)}} \ .$$

Setzt man

$$\sigma = r^2 - s \ , \quad \sigma_1 = r_1^2 - s_1 \ ,$$

wo ausser der Variabeln p und q, in r und r_1 auch ϱ und ϱ_1 vorkommen, und $\sigma \sigma_1$ in Bezug auf p und q von der Dimension n resp. n_1 sein sollen, so erhält man

$$r = \pm \sqrt{s} = \pm \varpi \ , \quad r_1 = \pm \sqrt{s_1} = \pm \varpi_1$$

Digitized by Google

und

$$\frac{\partial(\sigma\sigma_1)}{\partial(\varrho\varrho_1)} = 4rr_1\frac{\partial(rr_1)}{\partial(\varrho\varrho_1)} ,$$

folglich

$$\frac{\varphi\, dp\, dq}{\pm\varpi\varpi_1} = \frac{4\varphi}{\frac{\partial(\sigma\sigma_1)}{\partial pq}}\frac{\partial(rr_1)}{\partial(\varrho\varrho_1)} d\varrho\, d\varrho .$$

Summirt man über die simultanen Wurzeln $p_i q_i$ der Gleichungen $\sigma = \sigma_1 = 0$, so ergibt sich

$$\sum_{pq}\frac{\varphi}{\frac{\partial(\sigma\sigma_1)}{\partial(pq)}}\frac{\partial(rr_1)}{\partial(\varrho\varrho_1)} = 0 ,$$

wenn die Dimension des Zählers $\varphi\frac{\partial(rr_1)}{\partial(\varrho\varrho_1)}$ in p und q niedriger ist als die des Nenners $\frac{\partial(\sigma\sigma_1)}{\partial(pq)}$. Setzt man z. B.

$$r = \lambda\varrho + \mu , \quad r_1 = \lambda_1\varrho_1 + \mu_1 , \quad \frac{\partial(rr_1)}{\partial(\varrho\varrho_1)} = \lambda\lambda_1 ,$$

wo λ und μ in Bezug auf p und q die Dimension l, λ_1 und μ_1 die Dimension l_1 haben mögen, so erhält man für $\varphi = p^m q^{m_1}$

$$\sum_{pq}\frac{p^m q^{m_1}}{\pm\varpi\varpi_1} dp\, dq = 0 , \text{ wenn } m + m_1 < n + n_1 - l - l_1 - 2 .$$

Sei insbesondere

$$\sigma = \lambda\varrho^2 + 2\mu\varrho + \nu , \quad s = \mu^2 - \lambda\nu = \varpi^2 , \quad \pm\varpi = \lambda\varrho + \mu ,$$
$$\sigma_1 = \lambda_1\varrho_1^2 + 2\mu_1\varrho_1 + \nu_1 , \quad s_1 = \mu_1^2 - \lambda_1\nu_1 = \varpi_1^2 , \quad \pm\varpi_1 = \lambda_1\varrho_1 + \mu_1 ,$$

so geht die Gleichung

$$\frac{\partial(\sigma\sigma_1)}{\partial(pq)} dp\, dq = \frac{\partial(\sigma\sigma_1)}{\partial(\varrho\varrho_1)} d\varrho\, d\varrho_1$$

über in

$$\varphi\frac{\partial(\sigma\sigma_1)}{\partial(pq)} dp\, dq = 4\varphi(\lambda\varrho + \mu)(\lambda_1\varrho_1 + \mu_1) d\varrho\, d\varrho_1 ,$$

also erhält man für $\varphi = \frac{p^m q^{m_1}}{\varpi\varpi_1}$:

$$\pm\frac{p^m q^{m_1}}{\varpi\varpi_1} dp\, dq = 4\frac{p^m q^{m_1}}{\frac{\partial(\sigma\sigma_1)}{\partial(pq)}} d\varrho\, d\varrho_1 ,$$

Digitized by Google

und nach der Summation über die simultanen Wurzeln von σ und σ_1:

$$\sum_{pq}' \pm \frac{p^m q^{m_1}}{\varpi \varpi_1} dp\, dq = 0 \ , \quad \text{wenn } m + m_1 < l + l_1 - 2 \ .$$

Setzt man dagegen

$$\sigma = r^2 - s \ , \quad \sigma_1 = r_1 - s_1 \ ,$$

so wird

$$\frac{\varphi\, dp\, dq}{\pm \varpi} = \frac{2\varphi}{\frac{\partial(\sigma\sigma_1)}{\partial(pq)}} \frac{\partial(r r_1)}{\partial(\varrho \varrho_1)} d\varrho\, d\varrho_1 \ ,$$

und weiter für $m + m_1 < n + n_1 - l - l_1 - 2$:

$$\sum_{pq}' \frac{p^m q^{m_1}}{\pm \varpi} dp\, dq = 0 \ .$$

Sei nun wieder

$$\sigma = \lambda \varrho^2 + 2\mu\varrho + \nu \ , \quad r = \lambda\varrho + \mu = \pm\varpi \ , \quad \varpi^2 = \mu^2 - \lambda\nu \ ,$$

während

$$\sigma_1 = \lambda_1 \varrho_1 + \mu_1 \ ,$$

so folgt

$$\frac{\partial(\sigma\sigma_1)}{\partial(pq)} dp\, dq = 2(\lambda\varrho + \mu)\lambda_1\, d\varrho\, d\varrho_1$$

oder

$$\frac{\varphi\, dp\, dq}{\pm\varpi} = \frac{2\varphi\lambda_1}{\frac{\partial(\sigma\sigma_1)}{\partial(pq)}} d\varrho\, d\varrho_1 \ ,$$

mithin für $\varphi = p^m q^{m_1}$:

$$\sum_{pq}' \frac{p^m q^{m_1}}{\pm\varpi} dp\, dq = 0 \ , \quad \text{wenn} \quad m + m_1 < l - 2 \ ,$$

und für $\varphi = \frac{p^m q^{m_1}}{\lambda_1}$:

$$\sum_{pq}' \frac{p^m q^{m_1}}{\pm\lambda_1\varpi} dp\, dq = 0 \ , \quad \text{wenn} \quad m + m_1 < l + l_1 - 2 \ .$$

11.

Wir kehren zur Gleichung

$$\frac{dp}{\pm\varpi} = -\frac{2d'r}{\sigma'(p)}$$

Digitized by Google

des Art. 6 zurück und leiten aus derselben mit Abel einen neuen Ausdruck für $\log \frac{q+\xi}{q-\xi}$ ab. Summirt man nach Hinzufügung des Divisors $x - p$, so folgt

$$\sum_p \frac{\pm dp}{(p-x)\varpi} = 2\sum \frac{d'r}{(x-p)\sigma'(p)} .$$

Da hier der Zähler vom Grade l, der Nenner dagegen vom Grade $2l$ resp. $k > 2l$ ist, so hat die Summe der Partialbrüche auf der rechten Seite den Werth $\frac{d'q}{\sigma(x)}$ und man erhält die Gleichung

$$\sum_p \frac{\pm dp}{(p-x)\varpi} = 2\frac{d'q}{\sigma(x)}$$

oder

$$\sum_p \frac{\pm dp}{\left(1-\frac{p}{x}\right)\varpi} = \frac{2xd'q}{s-q^2} .$$

Für wachsende Werthe von x wird $\sum \frac{dp}{\pm\varpi} = 0$ (weil $\frac{1}{x^{l-1}}$ oder $\frac{1}{x^{k-l-1}}$ — mit Ausnahme der Fälle $l=0, k=1$ und $l=1, k=2$, — sich der Null unbegrenzt nähert), im Einklange mit den früher abgeleiteten Resultaten[1]).

Die Integration aber ergibt ohne Schwierigkeit

$$\sum_p \int \frac{\pm \xi dp}{(p-x)\varpi} = 2\xi \int \frac{d'q}{q^2-s} = \varphi x - \log\frac{q+\xi}{q-\xi} ,$$

wo die Integrationsconstante φ unabhängig von q als Function von x zu bestimmen ist. Diese Gleichung enthält das von Abel entwickelte *théorème fondamental*, welches er an die Spitze seiner Theorie der elliptischen Functionen stellt[2]).

---

1) Durch Entwickelung nach den absteigenden Potenzen von x erhält man auch den Werth der Summen $\sum \frac{p^m dp}{\pm\varpi}$, also das Additionstheorem für die Integrale zweiter Gattung.

2) Crelle Band IV, Seite 245.

Digitized by Google

12.

Die Vergleichung der beiden Ausdrücke

$$\log\frac{q+\xi}{q-\xi} = \int \psi x\, du - \sum_p \int \frac{\dot{\pm}\, \varpi\, dx}{(x-p)\xi}$$

$$= \varphi x - \sum_p \int \frac{\pm\, \xi\, dp}{(p-x)\,\varpi}$$

lässt auf einen directen Zusammenhang der Integrale $\int \frac{\varpi\, dx}{(x-p)\xi}$ und $\int \frac{\xi\, dp}{(p-x)\varpi}$ schliessen. Derselbe wird vermittelt durch die von ABEL und JACOBI bewiesene Formel[1])

$$\int \frac{\xi\, dp}{(p-x)\,\varpi} - \int \frac{\varpi\, dx}{(x-p)\xi} =$$

$$\sum_{m\,n} \tfrac{1}{2}(m-n)\, s_{k-m-n-2} \int \frac{p^m\, dp}{\varpi} \int \frac{x^n\, dx}{\xi} \;,$$

welche das *Theorem von der Vertauschung von Parameter und Amplitude* enthält, während

$$\xi\xi = s_0 x^k + s_1 x^{k-1} \cdots \;, \quad \varpi\varpi = s_0 p^k + s_1 p^{k-1} \cdots$$

Man braucht bloss nach den beiden Variabeln p und x zu differentiiren, um sich von der Richtigkeit der Formel zu überzeugen. Wenn Δ die Differenz der beiden Integrale bezeichnet, so wird

$$\varpi\xi \frac{\partial^2 \Delta}{\partial p\, \partial x} = \frac{\xi^2 - \varpi^2}{(x-p)^2} - \frac{\xi\xi' + \varpi\varpi'}{x-p} = \sum_{m\,n} (m, n)\, p^m x^n \;.$$

und hier findet man ohne Schwierigkeit

$$(m, n) = \tfrac{1}{2}(m-n)\, s_{k-m-n-2} \;.$$

---

1) In der nachgelassenen Abhandlung ABEL's *sur une propriété remarquable d'une classe très-étendue de fonctions transscendantes* und JACOBI in Crelle's Journal Band 24, Seite 178 und 185 f.

Digitized by Google

13.

Wie die Formel für $\sum_p \int \frac{\pm \varpi dx}{(x-p)\xi}$ das Additionstheorem der hyperelliptischen Integrale dritter Gattung in Bezug auf den Parameter, so enthält die für $\sum_p \int \frac{\pm \xi dp}{(p-x)\varpi}$ gefundene Gleichung den betreffenden Additionssatz in Bezug auf die Amplitude. Um die Anwendung auf elliptische Integrale zu machen, setzen wir $k = 3$ resp. $k = 4$.

Für

$$s = x^3 + lx^2 + mx + n \ , \quad q = \lambda x + \mu \ ,$$
$$\pm \varpi_1 = \lambda p_1 + \mu \quad , \quad \pm \varpi_2 = \lambda p_2 + \mu$$

erhält man

$$\sum_p \int \frac{\pm \xi dp}{(p-x)\varpi} = \varphi x - \log \frac{\lambda x + \mu + \xi}{\lambda x + \mu - \xi} \ ,$$

wo x an die Stelle des Parameters getreten ist, während die Wurzeln $p_1\ p_2\ p_3$ von $s = q^2$, welche jetzt die Amplituden der Integrale werden, den gleichen Bedingungen, wie Art. 5 die Parameter, unterworfen sind.

Analog ergibt sich für $k = 4$:

$$s = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4Dx + E \ , \quad q = ax^2 + 2bx + c \ ,$$
$$r^2 = (ap^2 + 2bp + c)^2 = Ap^4 + 4Bp^3 + 6Cp^2 + 4Dp + E = \varpi^2 \ ,$$
$$r = \pm \varpi \ , \quad \sum_p \frac{dp}{\pm \varpi} = 0 \ ,$$
$$\sum_p \int \frac{\pm \xi dp}{(p-x)\varpi} = \varphi x - \log \frac{ax^2 + 2bx + c + \xi}{ax^2 + 2bx + c - \xi} \ ,$$

während nach dem Früheren, wegen

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 4\frac{ab - B}{A - a^2} :$$

$$\log \frac{ax^2 + 2bx + c + \xi}{ax^2 + 2bx + c - \xi} = \int (a_0 + a_1 x) du - \sum_p r \int \frac{dx}{(x-p)\xi}$$

oder

$$\sum_p \int \frac{\pm \varpi dx}{(x-p)\xi} = 4\frac{aB - bA}{A - a^2} u - \log \frac{ax^2 + 2bx + c + \xi}{ax^2 + 2bx + c - \xi} \ .$$

Digitized by Google

Für $a = \sqrt{A}$ wird eine Wurzel p_1 unendlich, und wegen

$$p_1 + p_2 + p_3 = \frac{ac + 2b^2 - 3C}{2(B - ab)} = \frac{c\sqrt{A} + 2b^2 - 3C}{2(B - b\sqrt{A})}:$$

$$\sum_p \int \frac{\pm \varpi dx}{(x-p)\xi} = \sqrt{A} \int x du -$$

$$- \frac{Ac + 4Bb - (2b^2 + 3C)\sqrt{A}}{2(B - b\sqrt{A})} u - \log \frac{x^2\sqrt{A} + 2bx + c + \xi}{x^2\sqrt{A} + 2bx + c - \xi}.$$

Für $b = \frac{B}{\sqrt{A}}$ wird auch p_3 unendlich, und wegen

$$p_1 + p_2 = 2\,\frac{bc - D}{3C - 2b^2 - ac} = 2\,\frac{cB\sqrt{A} - AD}{3AC - 2B^2 - c\sqrt{A^3}}:$$

$$\sum_p \int \frac{\pm \varpi dx}{(x-p)\xi} = 2\sqrt{A} \int x du -$$

$$- 2A\,\frac{cB - D\sqrt{A}}{3AC - 2B^2 - c\sqrt{A^3}} u - \log \frac{Ax^2 + 2Bx + (c+\xi)\sqrt{A}}{Ax^2 + 2Bx + (c-\xi)\sqrt{A}}.$$

Für $c = \frac{3AC - 2B^2}{\sqrt{A^3}}$ wird auch p_2 unendlich, und wegen

$$p_1 = \frac{c^2 - E}{4(D - bc)} = \frac{(3AC - 2B^2)^2 - A^3E}{4A(A^2D - 3ABC + 2B^3)}:$$

$$\int \frac{\pm \varpi_1 dx}{(x-p_1)\xi} = 3\sqrt{A} \int x du -$$

$$- \frac{9A^2C^2 + 12AB^2C - 12B^4 - A^3E - 8A^2BD}{4\sqrt{A}(A^2D - 3ABC + 2B^3)} u$$

$$- \log \frac{(Ax + B)^2 - 3(B^2 - AC) + \xi\sqrt{A^3}}{(Ax + B)^2 - 3(B^2 - AC) - \xi\sqrt{A^3}}.$$

Auch dieser Ausdruck wird unendlich, wenn

$$3ABC - A^2D - 2B^3 = i_0$$

verschwindet. In diesem Falle erhält man wegen

Digitized by Google

$$\frac{\pm\varpi}{x-p} = -\left(\frac{1}{p}+\frac{x}{p^2}+\cdots\right)\left(p^2\sqrt{A}+\frac{2B}{\sqrt{A}}p+\frac{3AC-2B^2}{A\sqrt{A}}\right):$$

$$\log\frac{(Ax+B)^2-3(B^2-AC)+\xi\sqrt{A^3}}{(Ax+B)^2-3(B^2-AC)-\xi\sqrt{A^3}} = 4\sqrt{A}\int x\,du+4\frac{B}{\sqrt{A}}u\ .$$

14.

Allgemeinere Sätze über die Integralsumme

$$\sum_p\int\frac{\pm f(p)\,dp}{(p-x)\,\varpi}\ ,$$

wo p die Wurzeln einer Gleichung von der Form $\alpha^2 s_1 = \beta^2 s_2$ durchläuft, während $s = s_1 s_2$ und $\alpha\,\beta\,f$ ganze Functionen bedeuten, finden sich in Crelle's Journal Bd. III, S. 313—323[1]), auch behandelt Abel Bd. VI, S. 78 Integralsummen von der Form

$$\sum\int\frac{dp}{(p-x)\,\varpi^n}\ , \quad \text{wo} \quad \varpi^m = s(p)$$

und

$$\sigma(p) = \Pi(r_0+\alpha^k r_1\varpi+\alpha^{2k}r_2\varpi^2\cdots+\alpha^{(m-1)k}r_{m-1}\varpi^{m-1}) = 0\ ,$$

während $\alpha^m = 1$ und $r_0\,r_1\cdots r_{m-1}$ ganze Functionen von p mit variabeln Coefficienten bezeichnen[2]).

Aber weit umfassender war die der Pariser Akademie im October 1826 vorgelegte Untersuchung Abel's »*Mémoire sur une propriété générale d'une classe très-étendue de fonctions transscendantes*« (*Mém. prés.* T. VII, 1841, vergl. auch den eben so kurzen wie berühmten Aufsatz in Crelle's Journal Bd. IV, S. 200 und aus dem Nachlass die Abhandlung *Sur la comparaison des fonctions transscendantes*) über Integralsummen von der Form

$$\sum_p\int F(p\varpi)\,dp\ ,$$

wo an die Stelle der Gleichungen

$$\varpi^2 = s(p) \quad \text{und} \quad \varpi = \pm r$$

---

1) Vergl. Jacobi, Crelle Band 9, Seite 99; Poisson, Crelle Band 12, Seite 89—104.

2) Vergl. Ramus, Crelle Band 24, Seite 69—79.

Digitized by Google

die allgemeinen algebraischen Gleichungen

$$f\binom{m\ \mu}{p\ \varpi} = s_0\varpi^{\mu} + s_1\varpi^{\mu-1} + s_2\varpi^{\mu-2}\cdots = 0 \qquad (1)$$

und

$$g(p\varpi) = r_1\varpi^{\mu-1} + r_2\varpi^{\mu-2} + \cdots = 0 \qquad (2)$$

getreten sind. Hier bezeichnen die Coefficienten s und r ganze Functionen von p, und die Summe ist auszudehnen über die gemeinschaftlichen Wurzeln von (1) und (2), mit anderen Worten über die Wurzeln der Gleichung $\sigma(p) = 0$, welche durch Elimination von ϖ aus f und g erhalten wird.

Dadurch bestimmen sich die Wurzeln p als Functionen der in den Grössen r vorkommenden Coefficienten q_i, oder unabhängigen Variabeln ϱ_i, und es ist zu zeigen, dass

$$\sum_p F(p\varpi)\,dp = \sum_\varrho \Phi(\varrho_0\varrho_1\ldots)\,d\varrho$$

wird, wenn F und Φ *rationale* Functionen ihrer Argumente ausdrücken.

Man leitet zunächst durch Differentiation der Gleichung $\sigma(p) = 0$ den Ausdruck ab

$$\sigma'(p)\,dp + d'\sigma = 0$$

oder

$$dp = \sum_\varrho \varphi(p\ \varrho_0\varrho_1\cdots)\,d\varrho\ ,$$

also auch

$$F(p\varpi)\,dp = \sum_\varrho \psi(p\varrho_0\varrho_1\cdots)\,d\varrho\ ,$$

weil ϖ vermöge 1) und 2) rational durch p und ϱ bestimmt wird. Summirt man über sämmtliche Wurzeln p, so folgt

$$\sum_p F(p\varpi)\,dp = \sum_\varrho d\varrho \sum_p \psi(p\varrho_0\varrho_1\cdots) = \sum_\varrho \Phi(\varrho_0\varrho_1\cdots)\,d\varrho\ ,$$

weil die symmetrische Summe $\sum_p \psi$ rational durch die Coefficienten in s gegeben ist, welche mit den Coefficienten q_i rational von den Variabeln ϱ_i abhängen. Mithin werden die Functionen $F\varphi\ \psi$ und Φ gleichzeitig *rational*, und es ergibt sich nunmehr,

Digitized by Google

da beide Seiten der Gleichung zugleich vollständige Differentiale enthalten, durch Integration das berühmte *Abel'sche Theorem*, dass

$$\sum_p \int F(p\varpi)\,dp = u + \sum k \log v \ ,$$

wo u und v rationale Functionen der ϱ und die Coefficienten k Constanten bedeuten.

15.

Riemann hat später bewiesen (Crelle Bd. 54, S. 131), dass

$$\sum F(p\varpi)\,dp = 0 \ ,$$

wenn das Product $F(p\varpi)\,\frac{\partial f}{\partial \varpi} = G\left(p^{m-2}\,\varpi^{\mu-2}\right)$ eine *ganze* Function von p und ϖ ausdrückt, deren Grad in Bezug auf jedes der beiden Argumente um mindestens zwei Einheiten niedriger ist, als der Grad von f. Ueberhaupt ist seit Abel und Jacobi durch die Arbeiten von Mathematikern wie Göpel, Rosenhain, Hermite, Weierstrass, Riemann, Clebsch, Neumann und vielen Anderen die Theorie der Integrale algebraischer Functionen und deren Umkehrung mit Hülfe der Thetafunctionen mehrerer Variabeln wesentlich weiter gefördert worden.

Zur Ausdehnung des allgemeinen Abel'schen Theorems auf Doppelintegrale gehen wir von zwei algebraischen Gleichungen

$$f(p\,q\,\varpi\,\varpi_1) = 0 \ , \quad g(p\,q\,\varpi\,\varpi_1) = 0$$

aus, wodurch ϖ und ϖ_1 algebraische Functionen von p und q werden. Wenn dann

$$\varpi = r(p\,q\,\varrho_0\,\varrho_1\cdots) = r(p\,q\,\varrho_i) \ , \quad \varpi_1 = r_1(p\,q\,\varrho_i)$$

als rationale Functionen der unabhängigen Veränderlichen $\varrho_0\,\varrho_1\cdots$ eingeführt werden, so gehen f und g über in

$$\sigma(p\,q\,\varrho_i) = 0 \quad \text{und} \quad \sigma_1(p\,q\,\varrho_i) = 0 \ ,$$

und es wird

$$F(p\,q\,\varpi\,\varpi_1)\,dp\,dq = \sum_{ik} \frac{F(p\,q\,r\,r)}{\frac{\partial(\sigma\,\sigma_1)}{\partial(p\,q)}}\,\frac{\partial(\sigma\,\sigma_1)}{\partial(\varrho_i\,\varrho_k)}\,d\varrho_i\,d\varrho_k \ .$$

Digitized by Google

Summirt man nun über die gemeinschaftlichen Wurzeln der Gleichungen $\sigma = \sigma_1 = 0$, deren Coefficienten von den ϱ_i rational abhängen, so erhält man

$$\sum_{pq}' F(p\,q\,\varpi\,\varpi_1)\,dp\,dq = \sum_{ik}' \Phi_i^k(\varrho_0\,\varrho_1\,\cdot\cdot)\,d\varrho_i\,d\varrho_k\ ,$$

wo die rationale Function

$$\Phi_i^k(\varrho_0\,\varrho_1\,\cdot\cdot) = \sum_{pq}' \frac{F(p\,q\,r\,r_1)}{\frac{\partial(\sigma\,\sigma_1)}{\partial(p\,q)}}\,\frac{\partial(\sigma\,\sigma_1)}{\partial(\varrho_i\,\varrho_k)}\ .$$

Bei der Integration bleibt natürlich im gegebenen Falle der Integrationsbereich einer näheren Untersuchung zu unterwerfen.

Digitized by Google

G. Wiedemann, *Magnetische Untersuchungen.* (Mit 1 Tafel.)

Im Anschluss an meine früheren Untersuchungen über elastische Nachwirkung und Magnetismus erlaube ich mir im Folgenden einige weitere, in meinem Laboratorium ausgeführte Beobachtungen hierüber mitzutheilen.

1. Vertheilung der Momente in tordirten Eisendrähten.

Wird ein Draht am einen Ende befestigt, und das andere Ende desselben hin und her tordirt, so ist von vorn herein kein Grund vorhanden, dass die Torsion sich nicht über alle Längstheile des Drahtes gleichmässig verbreiten sollte, wenngleich eine Reihe von Untersuchungen das Gegentheil ergeben zu haben scheint.

Die Bestimmung der magnetischen Momente der einzelnen Stellen eines derartig tordirten Eisendrahtes liefert eine einfache, wenn auch indirecte Methode, die Frage experimentell zu entscheiden. Eisendrähte von 2,5 mm Dicke und 50 cm Länge wurden einerseits in der drehbaren Klemme des früher[1]) beschriebenen Torsionsapparates eingeklemmt. Andererseits wurden sie in eine am einen Ende eines 6 mm dicken und 10 cm langen Messingstabes axial gebohrte Höhlung eingeschoben und daselbst mittelst seitlicher Schrauben festgehalten. Der Stab wurde coaxial zum Draht in die feste Klemme des Torsionsapparates eingeklemmt. Auf einem besonderen Lager vor der beweglichen Klemme und auf dem etwas verjüngten, dem Eisendraht zugekehrten Ende des Messingstabes ruhte eine dem Eisendraht coaxiale, in cm getheilte, 7 mm weite Messingröhre,

1) G. W. Wied. Ann. 27 p. 382, 1886.

auf welcher sich eine 5 mm lange, kleine Inductionsspirale von 10 mm äusserem Durchmesser und etwa 200 Windungen von 0,22 mm dickem übersponnenen Kupferdraht mittelst einer daran befestigten Schnur schnell von einer beliebigen Lage bis über das Ende des Eisendrahtes hinaus verschieben liess. Der Apparat war in ostwestlicher Lage vor dem Magnetspiegel des von mir construirten Spiegelgalvanometers aufgestellt, dessen Rollen mit den Enden der Inductionsspirale verbunden waren. Der Eisendraht wurde entweder vor dem Einspannen in den Apparat in einer 50 cm langen und 2,5 cm weiten Spirale magnetisirt, in welcher der magnetisirende Strom auf alle Theile desselben möglichst gleichförmig wirkte, oder er war auch in dem Torsionsapparat selbst von einer solchen Spirale umgeben, in deren Innerem sich die Inductionsspirale verschieben liess, und wurde so ohne Ortsveränderung magnetisirt. Dabei wurde der magnetisirende Strom nie plötzlich geschlossen oder geöffnet, sondern mittelst des vom Verf. construirten Regulirelementes[1]) allmählich bis zur gewünschten Höhe gesteigert und wieder fast auf Null reducirt. Erst dann wurde ein in die Schliessung eingefügter Schlüssel vollends geöffnet. Die durch die Einwirkung des Stromes hervorgerufene Ablenkung des Magnetspiegels wurde durch Annäherung eines Magnets von der entgegengesetzten Seite her compensirt. Die Verschiebung der Inductionsspirale ging bei jedem Versuch so weit über das Ende des Eisendrahtes zur Seite der festen Klemme hinaus, dass weitere Verschiebungen die Induction nicht mehr änderten.

In den folgenden Tabellen bezeichnen die Zahlen z den Abstand der Mitte der Inductionsspirale vor der Verschiebung von dem in der beweglichen Klemme befindlichen Ende des Drahtes, die Werthe n, n, die den Inductionsstössen entsprechenden Ablenkungen des Magnetspiegels in Scalentheilen (Millimetern). Die Ablesescala war von demselben 1700 mm entfernt.

1) G. W. Wied. Ann. **27** p. 393, 1886.

Digitized by Google

I.

nicht tordirt		tordirt um 90°		zurücktordirt auf 0°		nochmals tordirt auf 270°	
z	n	$n_,$	$n_,/n$	$n_{,,}$	$n_{,,}/n$	$n_{,,,}$	$n_{,,,}/n$
1,5	31	12	0,378	13	0	2	0,096
5	52	22	0,423	18,5	0,356	6,5	0,125
10	67	28	0,418	26	0,388	8	0,119
15	80	34	0,425	31	0,387	9,5	0,119
20	87	37	0,425	33	0,379	10	0,118
25	87	37	0,425	33	0,379	10	0,118
30	86	37	0,430	31	0,362	9,5	0,111
35	77	31	0,403	26,5	0,344	7,5	0,099
40	62	24	0,387	21,5	0,347	7	0,113
45	41	15	0,366	13,5	0,329	4	0,097
50	7	2	—	3,5	—	1	—

II.

nicht tordirt		tordirt um 90°		zurücktordirt auf 0°		nochmals tordirt auf 90°	
z	n	$n_,$	$n_,/n$	$n_{,,}$	$n_{,,}/n$	$n_{,,,}$	$n_{,,,}/n$
1,5	24	11,5	0,479	10,5	0,437	9	0,375
5	37	15	0,405	15	0,405	13	0,351
10	54	22,5	0,420	20,5	0,388	18,5	0,343
15	64	26	0,406	24	0,375	22	0,344
20	70	28	0,400	27	0,385	24	0,343
25	70	29	0,414	27	0,385	24	0,343
30	66	26,5	0,401	24	0,364	23	0,348
35	58	24	0,411	21,5	0,371	20	0,345
40	46	19,5	0,424	16,5	0,368	16,5	0,359
45	31	13	0,419	12	0,387	10,5	0,345
50	6	3	—	2	—	2	—

Die Curventafel Fig. 1 enthält die hier beobachteten Werthe; die Abscissen entsprechen den Werthen z, die Ordinaten der Curven 1, 1^a, 1^b, 1^c, 2, 2^a, 2^b, 2^c den Werthen n, $n_,$, $n_{,,}$, $n_{,,,}$ für die beiden Reihen.

Hiernach ändert sich das magnetische Moment der einzelnen Stellen der Drähte, welches einer Kettenlinie entspricht, bei der Torsion, der darauf folgenden Detorsion und bei erneuter Torsion nahezu in gleichem Verhältniss. Die Abweichungen hiervon an den Enden beruhen darauf, dass dieselben in die betreffenden Klemmen eingespannt und nicht mit tordirt werden.

Bei anderen Versuchen wurde ein Strom durch den in den Torsionsapparat eingespannten Draht direct hindurch geleitet

Digitized by Google

und nach dem Oeffnen desselben die Vertheilung der permanenten magnetischen Momente durch die Inductionsspirale bestimmt. Dieselben ergaben sich fast verschwindend klein, ebenso wie aus der Ablenkung des Magnetspiegels das Gesammtmoment des Drahtes in axialer Richtung. Darauf wurde der Draht um 90° tordirt, wobei die den Inductionsstössen entsprechenden Ausschläge an verschiedenen Stellen z des Stabes gleich n waren. Beim Zurücktordiren auf Null waren dieselben wieder fast verschwindend, beim neuen Tordiren auf 90° gleich n_1, bei weiterem Tordiren auf 270° gleich n_2. So ergab sich:

	I.		II.	
	auf 90°	auf 90°	auf 90°	auf 270°
z	n	n_1	n	n_2
1,5	11	9,5	8	6
5	16	13,5	10	10
10	21	18,5	13,5	13
15	23	21,5	16	15,5
20	26,5	22,5	17	16
25	27,5	23	17,5	16,5
30	26	21,5	16,5	16
35	23	19,5	14,5	14
40	19	16,3	12	11,9
45	13	12,5	8,5	8
50	3	3	2,5	2

Die den Beobachtungsreihen I entsprechenden Curven sind in Fig. 1 punktirt gezeichnet.

Auch hier folgen die Momente der einzelnen Stellen der tordirten Stäbe dem Gesetz einer Kettenlinie.

Durch die mechanische Kraft der Torsion werden demnach die Elemente alle gleich stark aus ihrer magnetischen Lagen gedreht, ganz wie durch eine äussere, auf alle Theile gleich intensiv wirkende magnetisirende Kraft. Nacher stellen sie sich weiter durch ihre gegenseitige Wechselwirkung in beiden Fällen nach dem gleichen Gesetze ein.

Wenn von verschiedenen Beobachtern gefunden worden ist, dass Drähte bei Hin- und Herdrillungen sich davon abweichend verhalten, so liegt dies jedenfalls theils an Ungleichheiten, welche sie bereits vor dem Tordiren besassen, theils an solchen, welche sie durch die Torsionen erhalten, wobei die Längsfasern aneinander gepresst werden, je nach ihrem Abstand von der Axe permanent verschieden stark gedehnt werden, bez. zer-

Digitized by Google

reissen können und so das Gefüge völlig geändert wird. Darauf beruht auch u. a. das von mir beobachtete anomale Verhalten hin- und hergedrillter dicker Kupferstäbe [1]).

2. Vertheilung der magnetischen Momente in theilweise entmagnetisirten Stahlstäben.

Die vorstehenden Versuche legen es nahe, auch die Vertheilung der magnetischen Momente in einem Magnetstab zu untersuchen, welcher nach einander entgegengesetzt magnetisirenden Kräften unterworfen worden ist.

Dergleichen Versuche sind schon im Jahre 1876 von Herrn Bouty [2]) angestellt worden. Er hat um permanent magnetisirte Stahlstäbe in einer Spirale Ströme geleitet, welche den magnetisirenden entgegengerichtet waren und während des Andauerns derselben die Vertheilung der Momente in dem Stabe durch eine Inductionsspirale bestimmt.

Die Curven Fig. 2 geben diese Vertheilung jenachdem, wie Herr Bouty sich ausdrückt, die temporäre Magnetisirung T oder die permanente P überwiegt. Für $T = P$ wäre also das unter Einfluss des entmagnetisirenden Stromes erzeugte Moment in der Mitte des Stabes Null, für $T > P$ negativ, gegen das Ende desselben hin aber positiv. Numerische Daten hierüber sind nicht beigefügt. Es schien demnach zweckmässig, auch diese Punkte etwas näher zu beleuchten. Die Versuche wurden in folgender Weise angestellt:

Auf einem Holzbrett lag eine Spirale von 50 cm Länge, 16 cm äusserem, 7 cm innerem Durchmesser mit ihrer Axe in ostwestlicher Richtung vor dem Spiegelgalvanometer. Zwischen zwei auf die Enden des Brettes aufgesetzten Lagern war axial zur Spirale eine 60 mm lange, innen 1,05 cm weite, aussen polirte Röhre von dünnem Messing befestigt, in welche, der Mitte der Spirale entsprechend, 30 cm lange und 1 cm dicke Stahlstäbe eingeschoben waren, die daselbst durch vorgeschobene Glasstäbe und Korke festgehalten wurden. Auf der Messingröhre verschob sich eine 0,8 cm lange und aussen 1 cm weite

1) G. W. Wied. Ann. **6** p. 510, 1879.

2) Bouty, Ann. scient. de l'école normale (2) **5** p. 152, 1876. Wiedemann, Electr. **3** p. 528.

Inductionsspirale von dünnem Draht, welche durch mit Kautschuk isolirte Drähte mit den Spiralen des Spiegelgalvanometers in Verbindung stand. Die Magnetisirungsspirale war so lang und weit, dass man die magnetische Scheidungskraft für den ganzen Stahlstab fast als constant ansehen konnte. Die durch die Ströme in ihr verursachten Ablenkungen des Magnetspiegels wurden durch einen vor demselben, von dem gleichen Strome durchflossenen, vertical und horizontal zu stellenden Drahtring compensirt, wie ich dies bereits früher [1]) beschrieben habe.

Durch Herunterschlagen des Ringes konnte zugleich aus der dabei erfolgenden Ablenkung des Spiegels die Stromstärke bestimmt bez. auf ihre Constanz während jeder Versuchsreihe untersucht werden. Auch die Ablenkung durch den in der Spirale magnetisirten Stab wurde durch einen genäherten Magnetstab compensirt. Stets wurde die Intensität des magnetisirenden Stromes durch das Regulirelement langsam bis zur gewünschten Höhe gesteigert und ebenso langsam bis auf Null reducirt, um den Einfluss störender Inductionsströme zu vermeiden. Die Inductionsspirale wurde mittelst eines auf der Messingröhre verschiebbaren und an einem Maassstab befestigten Ringes über die verschiedenen Stellen des Magnetstabes gebracht und dann schnell durch eine Schnur so weit hinausgezogen, dass eine weitere Verschiebung keinen Einfluss mehr hatte.

Diese Versuche wurden angestellt sowohl während der entmagnetisirende Strom geschlossen war, als auch nach dem Oeffnen desselben.

In den folgenden Tabellen steht unter P_0 das ursprüngliche dem ganzen Stab ertheilte, aus der directen Ablenkung des Magnetspiegels abgeleitete permanente Moment, unter T_1, P_1, T_2, P_2 u. s. w. die unter Einfluss des magnetisirenden Stromes oder auf Aufhebung desselben erzeugten temporären oder permanenten Gesammtmomente desselben, wobei nicht in allen Fällen die correspondirenden Reihen von T und P bestimmt wurden. Die Columne z enthält die Abstände der einzelnen Stellen, über welchen die Mitte der Inductionsspirale lag, von der Mitte des Stabes in Centimetern, die Columnen t und p geben die bei Verschiebung derselben erhaltenen, den temporären und per-

1) G. W. Wied. Ann. 27 p. 383, 1886.

Digitized by Google

manenten Momenten der betreffenden Stellen des Stabes entsprechenden Inductionsausschläge des Magnetspiegels.

Von den vielen in dieser Art angestellten Versuchen mag es genügen, nur die folgenden anzuführen. Die übrigen geben damit ganz übereinstimmende Resultate.

I. Harter Stahlstab.

	P_0	T_1	P_1	T_2	T_3	T_4	P_4	T_5	P_5
	425	+143	+236,5	+15	− 5,5	−26	+114	−96	+76
z	p_0	t_1	p_1	t_2	t_3	t_4	p_4	t_5	p_5
−4	153	58	84,5	16	10,5	2	42	−19	28,5
−2	157	64	88,5	21	14,5	8	45	−15	31,5
0	157	65	89,5	22	16	9	45,5	−13	32,5
+2	151	63	85,5	21,5	15,5	9	45	−12,5	32
4	144	56,5	80	19,5	13,5	7	42	−13	30,5
6	128	49	71,5	14,5	9	4	37	−15,5	28,5
8	106	31,5	59,5	7	3,5	−2	31	−18	21,5
10	77	25,5	40,5	1	−1,5	−7	24	−19,5	16,5
12	47	11,5	26,5	−2,5	−5	−8	15	−16	10,5
14	11	2	5,5	−3,5	−3	−3	3	− 5	1,5
16	3	0	1,5	−1,5	−1,5	−0,5	1	− 3	0,5

	T_6	P_6	T_7	P_7	P_8	T_9	P_9
	−153,5	+50	−251	−10,5	−42	−397,5	−92
z	t_6	p_6	t_7	p_7	p_8	t_9	p_9
−4	−37	20	−69	−1,5	−12	−119,5	−30
−2	−33	22	−66	−0,5	−12	−114,5	−30
0	−31	23	−63	−1,5	−10	−113,5	−28
+2	−30	23	−62	−2,5	− 9	−107,5	−26
4	−30	22	−59	−3	− 7	−103,5	−24
6	−30	20	−57,5	−3	− 6	− 98	−21
8	−31	16	−54,5	−3	− 5	− 87,5	−16
10	−29	12,5	−48	−2	− 4	− 73,5	−12
12	−24	7,5	−33	−1	− 2	− 52,5	− 9
14	− 6	1	− 9,5	−0,5	− 0,5	− 14,5	− 1
16	− 3	0	− 3,5	0	0	− 3,5	− 0,5

	T_{10}	T_{11}	P_{11}	T_{12}	P_{12}	T_{13}	P_{13}
	+12,5	+42	−21,5	+118	+20	+297	+111,5
z	t_{10}	t_{11}	p_{11}	t_{12}	p_{12}	t_{13}	p_{13}
−4	3,5	+13	−5	37	10	97	42,5
−2	3	12	−4,5	36	10	94	42,5
0	3,5	12	−4,5	35	10	93	42,5
+2	4	11,5	−3,5	35	10	90	40,5
4	4	12,5	−2,5	34,5	10	86	37,5
6	4,5	13	−1,5	32	9	81	33
8	5,5	13	−1,5	31	7,5	70	28
10	6,5	10,5	−1,5	28	6	59	21
12	5,5	8,5	−0,5	20	3,5	39	12
14	2,5	2	−0,5	10	0,5	10,5	2
16	0	0	−0,5	2	0	3	0

Digitized by Google

IIa. Weicher Stahlstab Nr. 1.

	P_0	T_1	P_1	T_2	P_2	T_3	P_3	T_4	P_4
	386,5	185	246,5	58	164	−14	115	−38	99,5
z	p_0	t_1	p_1	t_2	p_2	t_3	p_3	t_4	p_4
−2	+138,5	+66	+86,5	+23	+57	−1,5	+39,5	−10,5	+33,5
0	139,5	68	87,5	23,5	58	−2	40	−10,5	34,5
+2	138,5	66	86,5	22,5	57	−3	39	−11,3	34
4	130,5	63	84	20,5	54	−4	38	−12,5	32,5
6	121,5	59	77	18	51	−5	36	−12,5	30,5
8	109,5	50	69,5	15	46,5	−6	32	−13	27,5
10	91,5	41	57,5	11,5	38,6	−7	17,5	−12,5	23,5
12	68,5	29	42,5	6,5	29	−6	11	−12,5	19
14	39,5	17	26,5	2	17	−2	13	−11,5	10,5
16	9,5	2,5	4,5	− 0,5	3	−1	3	− 3,5	2,5
18	1,2	0	1	− 1	0,5	0	0	− 2	0

	T_5	P_5	T_6	P_6	T_7	P_7	P_8	P_9
	−67	81	−148	39	−218	−3,5	−28,5	−44,5
z	t_5	p_5	t_6	p_6	t_7	p_7	p_8	p_9
−2	−21	+27	−49,5	+12	−73	−2	−10	−16
0	−21	27,5	−49,5	12,2	−72	−1,5	−10,5	−17,5
+2	−21,2	27	−49,5	11,8	−73	−2	−10,5	−17,5
4	−22	26	−48,5	11,5	−71	−1,3	−10,5	−15,5
6	−21,2	24	−46,5	11,5	−68	−1	−10	−13,3
8	−21	22,5	−43,5	10	−63	−0,5	− 8,5	−11,8
10	−20	19	−39	9	−56	0	− 7	− 9,3
12	−18	15	−33	7	−46	0	− 5,5	− 7
14	−12	10	−22	4,5	−30	−0,5	− 3	− 4
16	− 5	2,5	− 6,5	0	− 9,5	−0,5	− 1,5	− 1
18	− 1	0,7	− 2	0	− 3	−1	0	− 1

IIb. Weicher Stahlstab Nr. 2.

	P_0	T_1	P_1	T_2	P_2	T_3	P_3	T_4	P_4	T_5	P_5
	341	148	214	68	159	−13	110	−98	55	−231	−6,5
z	p_0	t_1	p_1	t_2	p_2	t_3	p_3	t_4	p_4	t_5	p_5
−2	120,2	54	75	26	55	−2	38	−30	19	−76	−4
0	122,2	55	75	27	56	−2	39	−31	18	−78	−4
+2	121,2	53	73	26	54	−2	37	−30	17	−76	−5
4	116,2	51	71	25	52	−1	35	−30	17	−74	−5
6	107,2	46,5	67	21	48	−4	33	−30	17	−70	−5
8	93,2	41	60	18	45	−4,5	31	−28	16	−65	−2
10	80,2	32	50	15	37	−5,5	26	− 26	14	−58	−1
12	62,2	23	39	10	29	−5	21	−22	11	−49	0
14	37,2	12	25	5	17	−6	14	−16	7	−53	0
16	11,2	1	7	1	4	−3	2	− 6	1	− 8	0
18	2,2	0	2,5	0	0	−2	0	− 1,5	0	− 2	0

Digitized by Google

In den beifolgenden Curven Fig. 3^a, 3^b, 4 sind nach den vorstehenden Tabellen die Werthe für den harten Stahlstab und den weichen Stab Nr. 2 graphisch verzeichnet. Als Abscissen dienen die Werthe z, als Ordinaten die Werthe t und p. Die ausgezogenen Curven entsprechen den Momenten beim Entmagnetisiren, die punktirten denen beim erneuten Magnetisiren.

Aus diesen Daten folgt zunächst für harte Stahlstäbe:

Während des Einflusses entgegengesetzt magnetisirender Kräfte nach einer permanenten Magnetisirung nimmt das Moment der Stäbe an allen Stellen ab, und zwar am Ende stärker, als in der Mitte, so dass bei einer gewissen Stärke der entmagnetisirenden Kraft die Mitte des Stabes noch im Sinne der ursprünglichen Magnetisirung »positiv« magnetisirt erscheint, die dem Ende näher liegenden Theile schon entgegengesetzt, negativ magnetisch sind. Gegen das Ende des Stabes hin nimmt auch diese negative Magnetisirung ab. Ist das Moment des ganzen Stabes auf Null reducirt, so ist er in der Mitte noch positiv, an den Endtheilen negativ. Ist das Moment des mittleren Theiles des Stabes auf Null reducirt, so ist das Gesammtmoment des Stabes, ebenso wie die Momente der Endtheile, negativ.

Bei stärkeren entmagnetisirenden Kräften nimmt dagegen die negative temporäre Magnetisirung der mittleren Theile schneller zu, als die der Endtheile, bis sich allmählich bei noch stärkeren Kräften eine ähnliche Vertheilung der negativen Momente herstellt, wie durch einen gleichgerichteten Strom in einem frisch magnetisirten Stab.

Die permanenten Momente nach Aufheben der entmagnetisirenden Kraft nehmen in ähnlicher Weise ab. Der permanente Gesammtmagnetismus des Stabes ist Null, wenn der temporäre überall negativ und bereits so ziemlich nach den Gesetzen für die temporäre Magnetisirung eines frischen Stabes vertheilt ist. Bei weiterer schwacher Entmagnetisirung sind die permanenten Momente in der Mitte am kleinsten und wachsen gegen das Ende, um an demselben, wie selbstverständlich, Null zu werden. Bei stärkeren Entmagnetisirungen nähert sich die Vertheilung der nunmehr negativen permanenten Momente ebenfalls derjenigen in frisch magnetisirten Stäben.

Bei weichen Stahlstäben erfolgen die Vertheilungen im Wesentlichen nach analogen Gesetzen.

Digitized by Google

Die Erklärung dieser Erscheinungen scheint, wenigstens in qualitativer Beziehung, keine besonderen Schwierigkeiten zu bieten.

In dem ursprünglich permanent magnetisirten Stab sind alle Molekularmagnete mit ihren z. B. Nordpolen nach einer, etwa der positiven Seite, gewendet und durch ihre Wechselwirkung sind die Axen der mittleren Moleküle mehr axial gerichtet, als die der Endmoleküle. Desshalb kann eine entgegengesetzt wirkende, negativ gerichtete, axiale magnetisirende, nicht zu starke Kraft die mittleren Moleküle weniger aus dieser Lage drehen, als die letzteren; demnach bewahren erstere in Folge ihrer stärkeren Wechselwirkung mehr ihre anfängliche positive axiale Lage. Somit können die Endmoleküle umgekehrt, negativ gerichtet werden, während die mittleren noch positiv gelagert sind. Werden aber die entmagnetisirenden Kräfte so stark, dass alle Moleküle des Stabes über die Nulllagen hinaus entgegengesetzt gedreht werden, so stellen sie sich in Folge ihrer Wechselwirkung mehr und mehr so ein, wie wenn die entmagnetisirende Kraft für sich von vorn herein auf den noch unmagnetischen Stab gewirkt hätte.

Beim Oeffnen des entmagnetisirenden Stromes treten analoge Verhältnisse für den permanenten Magnetismus ein, indem die Moleküle mehr oder weniger in ihre Lagen vor Einwirkung jenes Stromes zurückkehren. Bei schwachen Entmagnetisirungen, wo die mittleren Moleküle noch nicht oder nur wenig über die Nulllagen hinaus temporär in die negativen Lagen gedreht sind, kehren sie in Folge dessen nach dem Oeffnen des Stromes wieder in ihre positive Lagen zurück; auch werden die noch abgelenkten, aber nicht ganz über die Nulllage nach der positiven Seite zurückkehrenden Endmoleküle durch die Wechselwirkung der Theilchen in dieselbe zurückgeführt. Sind aber durch starke entmagnetisirende Kräfte auch die mittleren Theile stark in die negativen Lagen gerichtet worden, so dass sich in Folge der Wechselwirkung der Moleküle die Vertheilung des temporären Magnetismus schon der in einem frisch magnetisirten Stabe nähert, so können beim Oeffnen des Stromes jene mittleren stark gerichteten Theile event. nicht mehr in ihre positiven Lagen zurückkehren, sie behalten negative Momente, während dies die weniger stark gerichteten Moleküle noch thun können, also wiederum positive Momente zeigen. Sind endlich die ent-

Digitized by Google

magnetisirenden Kräfte sehr stark, die Moleküle sehr stark negativ gerichtet, und ist somit die temporäre Vertheilung mehr als vorher wie die in einem frischen Stabe, so tritt beim Oeffnen auch dasselbe ein, wie in einem solchen; der ganze Stab ist permanent entgegengesetzt magnetisirt, und zwar in der Mitte am stärksten.

3. Ueber die anomale Magnetisirung.

Wird der einen Eisenkern magnetisirende Strom plötzlich unterbrochen, so behält der Kern häufig ein schwächeres permanentes Moment, als bei allmählicher Unterbrechung. Ist das Dimensionsverhältniss Länge/Dicke des Kernes relativ klein, so ist nach den werthvollen Beobachtungen des Herrn VON WALTENHOFEN[1] die Polarität hierbei zuweilen die entgegengesetzte von der, welche man zufolge der Richtung des magnetisirenden Stromes erwarten sollte. Bei langsamem Verschwinden des Stromes zeigt sich die Erscheinung nicht. Sie stimmt ganz mit der zuerst von SAVARY beobachteten anomalen Magnetisirung von Stahlnadeln, welche sich senkrecht zum Entladungsdraht der Leydener Batterie in verschiedenen Abständen von demselben befinden.

Herr VON WALTENHOFEN erklärt diese Erscheinung in völliger Uebereinstimmung mit der Annahme um ihren Schwerpunkt drehbarer Molekularmagnete, welche nach der Ablenkung durch den magnetisirenden Strom beim langsamen Oeffnen desselben auch langsam in ihre nach der Seite jener Ablenkung hin liegende permanente Gleichgewichtslage zurückkehren, beim schnellen Oeffnen aber über diese und sogar auch über die neutrale Ruhelage hinausschwingen könnten und in Folge der Reibung dann eine entgegengesetzte Ablenkung behalten.

Indess ist es fraglich, ob die Drehungen der Molekularmagnete nicht überhaupt bei ihrer grossen Reibung in der Masse des Eisens *aperiodisch* erfolgen. Es könnten dann immer noch bei schnellem Schluss des magnetisirenden Stromes die schneller bewegten Molekularmagnete sich weiter den durch die jeweiligen Kräfte gebotenen Gleichgewichtslagen zudrehen, als bei langsamem Schluss, ohne dass sie dieselbe vollständig erreichen. Letzteres zeigt sich bekanntlich daran, dass beim Erschüttern die temporäre Magnetisirung in beiden Fällen noch steigt. In

1) A. WALTENHOFEN, Wien. Ber. 48 (2) p. 564, 1863.

Digitized by Google

gleicher Weise würden die Molekularmagnete bei langsamem oder schnellem Oeffnen der permanenten Gleichgewichtslage mehr oder weniger sich zuneigen, ohne auch in diese vollständig überzugehen [1].

Ehe die Hypothese von Herrn von Waltenhofen, welcher sich auch Herr Fromme (l. c.) nach seinen mannigfachen Versuchen anschliesst, als erwiesen oder widerlegt anzusehen ist, muss zunächst der Einfluss der übrigen, eine anomale Magnetisirung möglicher Weise bedingenden Ursachen genau studirt und eliminirt werden. Als solche habe ich deren zwei [2] angegeben, erstens die in der Magnetisirungsspirale im Moment des Oeffnens, wie bei der Batterieentladung, eventuell oscillatorisch verlaufenden Extraströme, zweitens die Inductionsströme in der Masse des Eisens selbst.

Bei den Versuchen des Herrn Peuckert [3] sind die oscillatorischen Entladungen in der Magnetisirungsspirale insofern beseitigt worden, als dieselbe vor dem Oeffnen des hindurchgeleiteten Stromes durch einen kurzen dicken Leiter in sich geschlossen wurde. Die anomale Magnetisirung zeigte sich dennoch, wenn auch nur in einzelnen nicht genau definirten Fällen unregelmässig unter den gleichen Bedingungen, während der Rückstand meist Null, selten positiv war. Aehnliche Versuche sind schon früher von Fromme [4] angestellt worden. Es bleibt indess noch der Einfluss der in der Eisenmasse inducirten Ströme zu eleminiren, welcher meines Erachtens nicht ohne Weiteres zu vernachlässigen ist [5].

Die Untersuchung ist deshalb von Neuem in meinem Laboratorium aufgenommen worden. Ein Theil der Versuche ist mit grosser Sorgfalt von Herrn Dr. Plessner ausgeführt worden. Dabei ist das Gebiet der Versuche in der Erwägung erweitert worden, dass, wenn die Erklärung des Herrn von Waltenhofen richtig wäre, nach Elimination der störenden Einflüsse nicht nur bei plötzlicher Aufhebung schwacher magnetisirender Kräfte eine anomale permanente Magnetisirung zurückbleiben sollte,

1) Diese Verhältnisse dürften von Herrn Fromme (Wied. Ann. **33** p. 236, 1884) nach meinen früheren Ausführungen nicht ganz meinen Ansichten entsprechend aufgefasst worden sein.

2) G. W. Wiedemann, Electr. **4** p. 279 Z. 11—17, 1885; und nicht nur die erste (vgl. Fromme l. c.).

3) Peuckert, Wied. Ann. **33** p. 291, 1888.

4) Fromme, Wied. Ann. **5** p. 345, 1878; **18** p. 442, 1883.

5) Peuckert l. c. p. 296.

Digitized by Google

sondern auch bei schnellem Verschwinden stärkerer Kräfte die Moleküle weiter in ihre magnetischen Lagen zurückschwingen müssten, als bei langsamem Verschwinden, und so das permanente Moment in diesen Fällen vermindert erschiene. Ebenso könnte aus demselben Grunde ein vorhandenes permanentes Moment, welches durch eine magnetisirende Kraft vorübergehend gesteigert würde, beim schnellen Aufheben derselben vermindert werden.

Die verschiedenen Eisenkerne wurden in der Mitte einer 250 mm langen, innen 70 mm, aussen 150 mm weiten Magnetisirungsspirale magnetisirt, welche 10 Schichten von je 60 Windungen von 4 mm dickem, baumwollbesponnenen Kupferdraht enthielt. Die Spirale war bei den ersten Versuchsreihen mit ihrer Axe in ostwestlicher Richtung in einem Abstand von 448 mm von ihrer Mitte vor dem magnetisirten, stark gedämpften Stahlspiegel des vom Verf. construirten Spiegelgalvanometers horizontal hingelegt. Durch dieselbe wurde ein Strom geleitet, dessen Intensität an einer in den Stromkreis eingeschalteten Tangentenbussole von bekanntem Reductionsfactor gemessen wurde. Derselbe beträgt 3,64. Hieraus konnte die im Innern der Spirale wirkende Scheidungskraft berechnet werden, welche für einen Strom Eins in der Mitte gleich 275,2 ist, und sich bis zu 6 cm von derselben in axialer Richtung um etwa 0.5 %, in äquatorialer Richtung bis zu 1 cm von der Axe um etwa 3,7 % ändert.

Durch die schon früher beschriebene Compensationsvorrichtung wurde die Ablenkung des Magnetspiegels durch den Strom in der Spirale allein neutralisirt. Die beim Einlegen von Eisenkernen in die Spirale sich ergebenden Ablenkungen desselben wurden an einer 1880 mm vom Magnetspiegel entfernten Scala mittelst Fernrohres abgelesen.

Die ersten Versuche dienten dazu, die Verhältnisse darzulegen, wenn in dem Kerne der Magnetisirungsspirale oscillirende Entladungen auftreten konnten oder nicht. Zuerst wurde hierzu mittelst eines in den Stromkreis eingeschalteten Regulirelementes die Intensität des Stromes auf einen bestimmten Werth gebracht und ebenso langsam auf Null vermindert. Die Maximalintensität des magnetisirenden Stromes sei J, das durch die Ablenkung des Bussolenspiegels in Scalentheilen gemessene permanente Moment der Kerne P_l. — Darauf wurde der Strom

Digitized by Google

langsam auf die gleiche Höhe gesteigert, aber schnell durch Herausheben einer Metallspitze aus einem Quecksilbernapf unterbrochen. Das permanente Moment dabei sei P_s. — Um die Wirkungen oscillirender Entladungen zu untersuchen, wurden bei einer weiteren Beobachtungsreihe die Enden der Magnetisirungsspirale mit den Belegungen einer Batterie von 4 Franklinschen Tafeln von 3 mm Glasdicke und insgesammt $4 \times 43{,}5 \times 54{,}5 = 94840$ qcm belegter Oberfläche verbunden. Beim Oeffnen des Stromkreises ladet sich dieselbe und entladet sich durch die Spirale. Auch hierbei wurden die permanenten Momente P_{cl} bei langsamem und P_{cs} bei schnellem Oeffnen des Stromkreises bestimmt. — Endlich waren bei einer dritten, ebenfalls mit Anwendung des Condensators in gleicher Weise ausgeführten Reihe die Eisenkerne noch mit einer Metallhülle von Messing von etwa 130 mm Länge und 1 mm Wandstärke umgeben. Die so erhaltenen permanenten Magnetismen seien P_{hl} und P_{hs}. Die Versuche wurden jedesmal 4—8 mal bei nahezu derselben Stromstärke ausgeführt, dann bei entgegengesetzter und endlich wieder bei der früheren Stromrichtung. So ergaben sich u. A. zunächst bei drei Kernen aus massivem Eisen, aus pulverförmigem Eisen (ferrum limatum), welches mit $^1/_3$ seines Gewichtes Schwerspath gemengt war, und aus grob und fein gefeiltem, mit einem gleichen Gewicht Schwerspath gemischtem Stahl die folgenden Werthe. Die temporären Momente, welche bei den etwas wechselnden Stromstärken bei den aufeinander folgenden Versuchsreihen einander nicht ganz gleich sind, sind nicht besonders angegeben.

Massiver Eisenkern. Länge 120 mm, Dicke 20 mm. $J = 0{,}625$.

P_l	P_s	P_{cl}	P_{cs}	P_{hl}	P_{hs}
—119	—21	—120,8	—21,6	—131	—39,7
—118	—23,5	—122	—24	—132	—43,5
—119	—29	—123,3	—28,2	—134	—45
128	20	119,1	8	127,5	29,7
127	10,5	116	10,9	126,3	29,2
128,8	19,5	116,5	15	126,3	28
—122	—31,5	—126	22,1	—130	—35,5
—125	—27	—127,8	26,8	—131,6	—43
—124,5	—23,5	—126	27	—131,5	—42,5

Digitized by Google

Pulverförmiger Eisenkern. Länge 120 mm, Dicke 20 mm. Eisen : Schwerspath = 3 : 1. $J = 0{,}810$.

P_l	P_s	P_{cl}	P_{cs}	P_{hl}	P_{hs}
−67	−67,3	−62,2	−36,7	−60,6	−60,6
−68,7	−69,7	−60,8	−42,3	−62	−61,8
−69	−69,9	−60,7	−53	−62,1	−62,1
50	53,3	50,5	28,7	52,4	55,0
55	56,5	52,8	31,3	56,6	57,0
57,8	57,8	54,1	35,3	58,6	58,6
−55,2	−57,6	−54,8	−35,5	−56,1	−58,1
−60,1	−60,4	−59	−56	−60,5	−60,5
−60,9	−59,9	−59,5	−59,5	−61	−61

Pulverförmiger Stahlkern. Länge 120 mm, Dicke 20 mm. Stahl grob gefeilt : Schwerspath = 1 : 1. $J = 0{,}916$.

P_l	P_s	P_{cl}	P_{cs}	P_{hl}	P_{hs}
−23,8	−25	−26	−19,1	+23,8	+26,8
−25,7	−25,8	−25,8	−19,7	+27,4	+27,8
−26,1	−26,2	−25,4	−17	+28,4	+28,3
+26,9	+27	+26,2	+20,8	−24,1	−25,1
+27,8	+27,9	+28	+21,4	−26,8	−25,9
+28,6	+28,6	+28,3	+24	−26,4	−26,6
−23	−24,2	−23,6	−15,3	+25,9	+26,8
−24,8	−24,9	−24,7	−19,2	+27,3	+27,8
−25,1	−25	−24,9	−21	+28	+28
−25,2	−25,2	−25,2	−25,9	+28,2	+28,3

Pulverförmiger Stahlkern. Länge 120mm, Dicke 20mm. Stahl fein gefeilt: Schwerspath = 1 : 1. $J = 0{,}907$.

P_l	P_s	P_{cl}	P_{cs}	P_{hl}	P_{hs}
−10,2	−10,3	+ 8,8	+ 6,7	− 9,8	−10
−10,4	−10,4	+ 9,4	+ 6,8	−10,2	−10,1
−10,4	−10,3	+ 9,5	+ 6,3	−10,1	−10,1
+ 9,4	+ 9,8	− 9,5	− 6,4	+ 9,2	+ 9,5
+10,0	+10,2	− 9,7	− 6,9	+ 9,7	+ 9,8
+10,4	+10,4	−10	− 6,8	+ 9,8	+ 9,8
− 9,3	− 9,7	+ 8,9	+ 5,7	− 9,2	− 9,6
− 9,9	−10	+ 9,1	+ 7,1	− 9,8	− 9,8
−10,1	−10	+ 9,2	+ 7,7	−10	−10

Bei anderen Versuchsreihen wurden die Bestimmungen der permanenten Momente P_l und P_s ganz ebenso ausgeführt, nur diente zur Regulirung des Stromes ein in den Schliessungskreis eingefügter Zinkvitriolrheostat. Derselbe bestand aus einem

weiten und hohen Glascylinder voll concentrirter Zinkvitriollösung, in welchem eine amalgamirte Zinkplatte stand, vor der sich mittelst einer über mehrere Rollen gehenden Schnur mit Gegengewicht eine daran befestigte, der ersten Platte parallele amalgamirte Zinkplatte in einem Abstand von 1 cm vertical verschieben liess. Die letztere Platte war unten zugespitzt und daselbst mit einem ebenso zugespitzten Stück Filz verbunden. Endlich wurde nach Bestimmung von P_l und P_s auch die Magnetisirungsspirale durch einen Nebenschluss geschlossen. Dazu waren die beiden Zuleitungsdrähte zu derselben durch zwei Quecksilbernäpfe geleitet. Nachdem die temporäre Magnetisirung T erreicht war, wurde ein an einem Hebel befestigter starker amalgamirter Kupferbügel durch Herabfallen eines an demselben befestigten Gewichtes in die Quecksilbernäpfe getaucht. Ein Sperrhaken verhinderte das Zurückspringen des Hebels aus seiner tiefsten Lage. Wurde nachher der Stromkreis völlig geöffnet, so änderte sich der Ausschlag nicht mehr, so dass der Nebenschluss die Zuleitung des Stromes zur Spirale bis auf eine unmerkbar kleine Grösse abschloss. Der so beobachtete permanente Magnetismus sei P_n.

So ergab sich für einen 2 cm dicken, 10 cm langen massiven Kern, für einen gleich grossen aus lackirten Blumendrähten von 0,3 mm Dicke und für einen 2,7 cm dicken, 10,3 cm langen Kern aus einem Gemisch von 2 Vol. ferrum limatum und 1 Vol. Schwerspathpulver:

Massiver Kern.				Drahtbündel.			
T	P_l	P_s	P_n	T	P_l	P_s	P_n
23,9	1	0,9	1	23	0,3	0,8	1,7
68	3,9	3	3,9	78,4	4	4	4,1
234,2	9	5,9	8,7	147,9	7,2	7,2	7,7
304	14	6,4	12,8	232	10,6	10,8	11,3
304	20	8,9	18,7	305	13,3	13,6	13,6
373	24	10,9	23,7	387	15	15	15
439	27,7	12,6	27,7	450	15,1	15	15,2

Kern aus Eisenpulver.

T	P_l	P_s	P_n
38	0,5	0,4	0,4
80,5	3,7	4,0	4,0
140	10,2	10,9	11
155	12	12,4	13

Digitized by Google

Bei diesen Reihen wurde bei gleicher temporärer Magnetisirung die unter verschiedenen Umständen zurückbleibende permanente Magnetisirung hintereinander je dreimal bestimmt. In allen Fällen stieg dieselbe, wie dies aus anderen Versuchen bekannt ist, bei langsamem Oeffnen ein wenig an. Es geschah dies bei den Drahtbündeln und Kernen von Eisenpulvern auch noch, wenn nach einer langsamen Oeffnung eine schnelle oder eine solche durch Nebenschluss folgte.

Kerne von relativ sehr kleinem Dimensionsverhältniss, von 7,5 cm Länge und 3,7 cm Durchmesser, aus denselben Stoffen ergaben:

Massiver Kern.

T	P_l	P_s	P_n
60	0,8	0,1	0,1
150	0,8	0	0
200	0,6	0	0
273	0,7	0	0
357	1,1	0	0,1
449	1,2	0,2	—
—	3	0,4	0,4

Drahtbündel.

T	P_l	P_s	P_n
70	2,9	3	3
178	6,9	7,1	7,2
253	9,1	9,1	9,5
358	11	11,1	11,5
443	12	12	12,1

Kern aus Eisenpulver.

T	P_l	P_s	P_n
57	1,3	1,5	1,5
127	6,7	7	7
197	12,6	13	13,5
266	18,5	19	19

Aus diesen und vielen ähnlichen Versuchsreihen folgt:

1) Eisenkerne, in denen die Inductionsströme keine weiteren Bahnen finden, also die aus Drahtbündeln bestehenden und pulverförmigen Kerne nehmen bei schnellem Oeffnen des magnetisirenden Stromes nur dann einen schwächeren permanenten Magnetismus an, als bei langsamem, bez. auch, indess unter nicht genau festzuhaltenden Bedingungen, einen anomalen Magnetismus, wenn dabei in der Magnetisirungsspirale oscillirende Entladungen stattfinden. Dies geschieht z. B. bei Verbindung der Enden derselben mit einem Condensator.

2) Fliessen in den erwähnten Fällen beim Oeffnen des Stromkreises keine oscillirenden Entladungen durch die Spirale, so ist das permanente Moment beim schnellen Oeffnen dem beim langsamen Oeffnen gleich, oder ein wenig höher, indem sich

Digitized by Google

dann durch den Oeffnungsfunken ein Theil des dem magnetisirenden Strom gleichgerichteten und die Magnetisirung steigernden Oeffnungsstromes ausgleicht.

3) Wird im obigen Falle die Loslösung der Magnetisirungsspirale von der Säule durch einen Nebenschluss bewirkt, so findet die Ausgleichung des Oeffnungsextrastromes noch vollständiger statt, das permanente Moment erscheint bei schnellem Nebenschluss meist noch etwas grösser.

4) In keinem Fall war unter den ad 2 und 3 erwähnten Umständen bei schneller Schliessung, wenn jedesmal das vorhergehende temporäre Moment das gleiche war, das permanente Moment kleiner, als bei langsamer, auch nicht, wenn erstere auf letztere folgte. Ein Rückschwingen der Moleküle über die permanente Gleichgewichtslage hinaus, welche dies hätte bedingen können, eine anomale Magnetisirung, war also nicht zu constatiren.

5) Die massiven Eisenkerne bewahren dagegen nicht nur unter Anwendung oscillatorischer Entladungen in der Magnetisirungsspirale, sondern auch ohne dieselben, beim schnellen Oeffnen des magnetisirenden Stromes ein kleineres permanentes Moment, als beim langsamen, ebenso bei Benutzung der Nebenschliessung. Anomale Magnetisirungen wurden zuweilen beobachtet.

In diesem Fall werden in den massiven Eisenmassen selbst Inductionsströme erzeugt, welche in den verschiedenen Schichten derselben verschiedene Dichtigkeit haben und die Abnahme der Magnetisirung oder eine Umkehrung derselben bedingen können. Würden dieselben auf eine Rückschwingung der abgelenkten Molekule über die permanenten Gleichgewichtslagen hinaus zurückzuführen sein, so müsste das gleiche auch bei den Molekülen der Eisendrahtbündel und Eisenpulver geschehen. Auch müsste gerade bei ersteren in Folge der Wechselwirkung der gerichteten Molekule der Länge nach, welche wegen der Discontinuität der Masse die transversale (entmagnetisirende) Wechselwirkung der Quere nach überwiegt, bei anomaler Stellung der Molekule in Folge des Rückschwingens die anomale Magnetisirung viel stärker hervortreten, als bei massiven Kernen. Dies ist aber mit der Erfahrung nicht in Uebereinstimmung.

Darnach dürfte es durchaus nicht ausgeschlossen sein, dass die bisherigen Erfahrungen über anomale Magnetisirung und

Digitized by Google

Verminderung der zu erwartenden permanenten Magnetisirung bei schnellem Oeffnen des magnetisirenden Stromes auf Wirkungen von Inductionsströmen in der Magnetisirungsspirale, wenn in derselben oscillatorische Entladungen auftreten, bez. in der Masse der Eisenkerne beruhen.

Die Bewegungen der magnetischen Moleküle bei der Magnetisirung dürften hiernach aperiodisch erfolgen.

Leipzig, Physikalisches Institut der Universität, 12. Februar 1889.

Digitized by Google

Herm. Credner, *Das vogtländische Erdbeben vom 26. December 1888.* **Mit einer Übersichtskarte auf Tafel III.**

Als die Tagesblätter die Meldung von einem Erdbeben brachten, welches in der Nacht vom 25. zum 26. December vor. Jahres in einzelnen Ortschaften des Vogtlandes beobachtet worden sein sollte, fühlte ich darin, dass ich seit Jahren der Berichterstattung über die seismischen Ereignisse innerhalb des Königreichs Sachsen obgelegen hatte, die Veranlassung, auch dieses neueste Erdbeben zu verfolgen und seine Beschreibung derjenigen der früheren anzureihen.

Behufs Gewinnung von möglichst reichlichem und das gesammte Erschütterungsgebiet deckendem Beobachtungsmaterial erliess ich in zehn Zeitungen jener Gegend, also des Vogtlandes und des angrenzenden Erzgebirges, einen Aufruf, welcher eine Anzahl von Fragen über die Einzelheiten der Erdbebenerscheinung und die Bitte um deren Beantwortung enthielt. Wenn nun auch dieser Aufforderung in zahlreichen Fällen Folge geleistet wurde, so verdanke ich doch einen sehr wesentlichen Theil der Unterlagen für die nachfolgende Beschreibung der gütigen Vermittlung des Kaiserl. Ober-Postdirectors Herrn Walter in Leipzig, sowie der *Königl. Betriebs-Ober-Inspection* zu Zwickau, welche beide an ihre Angestellten Fragebogen vertheilen und mir dieselben nach ihrer Beantwortung zugehen liessen. Ebenso hat sich Herr Seminaroberlehrer E. Weise in Plauen angelegentlich und mit grösstem Erfolge um die Beschaffung von Beobachtungsberichten bemüht und durch eine kurze zusammenfassende Beschreibung der ihm damals bekannten Resultate im »Vogtländischen Anzeiger« vom 11. Januar d. J. viel dazu beigetragen, das allgemeine Interesse auf jene Erderschütterung zu lenken und

Digitized by Google

dadurch zu noch mehrfachen nachträglichen Mittheilungen über dieselbe zu veranlassen. Die Bemühungen des Herrn Hofrath Professor Dr. Liebe in Gera, die sich auf das reussische Vogtland erstreckten, waren insofern nicht fruchtlos, als durch dieselben festgestellt wurde, dass das Erdbeben jene Landstriche nicht in Mitleidenschaft gezogen hat, — eine Thatsache, welche bei Abgrenzung des Erdbebenareales ihre Verwerthung gefunden hat. Wie allen den Genannten, so schulde ich den Redactionen aller derjenigen Zeitungen besonderen Dank, welche meinen obenerwähnten Erdbeben-Aufruf durch bereitwillige Aufnahme in ihren Blättern zur allgemeinen Kenntniss gebracht haben.

I. Zusammenfassende Darstellung der Erscheinungsweise und der Wirkungen des Erdbebens.

1. Das Verbreitungsgebiet des Erdbebens.

Die Ausdehnung, welche das Erdbeben vom 26. December v. J. im Vogtlande und angrenzenden Landstrichen erreicht hat, ergiebt sich aus der Aufzählung aller derjenigen Ortschaften, aus welchen Berichte über die stattgefundene Erschütterung eingegangen sind. (Vergl. das Übersichtskärtchen auf Taf. III.) Es sind dies in im Südwesten beginnender und im Nordosten endender Aneinanderreihung die folgenden: Feilitzsch bei Hof, Adorf, Markneukirchen, Untersachsenberg, Schöneck, Wohlbach, Hundsgrün, Unter-Hermsgrün, Lauterbach, Oelsnitz, Planschwitz, Gross-Zöbern, Grobau, Misslareuth, Reuth, Tobertitz, Kloschwitz, Weischlitz, Messbach, Thiergarten, Strassberg, Kobitzschwalde, Hartmannsgrün, Altmannsgrün, Tirbersdorf, Lottengrün, Bergen, Theuma, Plauen, Neuendorf, Neuhaselbrunn, Crieschwitz, Neuensalz, Thossfell, Helmsgrün, Pöhl, Röttis, Syrau, Jocketa, Elsterberg, Netzschkau, Voigtsgrün, Lengenfeld, Hartmannsgrün, Eich, Treuen, Reumtengrün, Falkenstein, Ellefeld, Auerbach, Sorga, Rebesgrün, Rodewisch, Koltzenkirchen, Schönhaide, Eibenstock, Sosa, Antonsthal, Bermsgrün, Alberoda, Poppenwald bei Hartenstein, ausserdem noch 12 Bahnwärterposten zwischen einzelnen der in obiger Aufzählung genannten Eisenbahnstationen.

Von diesen 73 Beobachtungsorten des Erdbebens concentriren sich die meisten auf die Gegend zwischen Lengenfeld,

Digitized by Google

Misslareuth und Hundsgrün bei Oelsnitz; spärlicher vertheilen sie sich über die Grenzareale des Erschütterungsgebietes. Von vornherein darf man annehmen, dass das Erdbeben im Allgemeinen innerhalb der erstgenannten Gegend am intensivsten, in den von dort entfernteren Zonen weniger fühlbar gewesen und deshalb leichter der Beobachtung entgangen ist. Naturgemäss darf vorausgesetzt werden, dass auch die zwischen den dichter gelegenen Beobachtungsorten befindlichen Flächen von der Erschütterung betroffen worden sind, dass jedoch von dort keine Nachrichten zu uns gelangten.

Nach Obigem dürfte sich das Erdbeben über ein Areal von 63 km Länge (Feilitzsch-Poppenwald) und von 35 km Breite (Markneukirchen-Voigtsgrün) ausgedehnt haben. Die Längsaxe dieses Erschütterungsgebietes liegt in ostnordöstlicher Richtung, also in derjenigen des erzgebirgischen Falten- und Bruchsystemes. Dass sich die Erschütterung der Erdoberfläche thatsächlich auf das durch die Aufzählung obiger Ortschaften bezeichnete Gebiet beschränkt hat, wird dadurch erhärtet, dass die im ganzen Umkreise jenes Erschütterungsareals angestellten Erhebungen durchweg nur negative Resultate geliefert haben. Aus Mylau, Reichenbach und Zwickau im Norden und Nordwesten, — aus Elster *im* Süden, — aus Thum im Osten, aus dem reussischen Vogtlande im Westen, also von allen Seiten des Erschütterungsgebietes, gingen Nachrichten ein, dass das Erdbeben dort nirgends verspürt worden sei.

2. Der Zeitpunkt des Erdbebeneintrittes.

Die grosse Mehrzahl der eingelaufenen Berichte und unter diesen namentlich auch derjenigen der Post- und Bahnbeamten bezeichnen den Zeitpunkt 15 Minuten nach 12 Uhr in der Nacht vom 25. zum 26. December als denjenigen der Erderschütterung. Die mehr oder weniger beträchtlichen Abweichungen der übrigen Angaben erklären sich aus dem verschiedenen Gange der Uhren. An eine Ausnutzung von Zeitbestimmungen zum Zwecke der Berechnung der einzelnen Erdbebenfactoren könnte bei der durch die Kleinheit des Erdbebenareals bedingten Winzigkeit der Zeitdifferenzen des Erdbebeneintrittes überhaupt nicht gedacht werden.

Digitized by Google

3. Die Art der Erdbebenbewegung

ist nach den darin fast übereinstimmenden Berichten diejenige eines, local zweier, ja dreier ziemlich heftiger, kurzer Stösse gewesen, durch welche die Erdoberfläche in eine nur wenige Secunden dauernde, wellenförmig schaukelnde Schwankung oder in eine schütternde, fibrirende Bewegung versetzt wurde. An den unregelmässig im Erschütterungsgebiete vertheilten Orten, wo mehrere Stösse bemerkt wurden (Adorf, Untersachsenberg, Lauterbach, Plauen, Treuen, Sorga, Auerbach, Rodewisch, Reumtengrün, Netzschkau, Misslareuth), folgten dieselben in kurzen Zwischenräumen auf einander; der erste war der stärkere.

Die *Richtung* dieser Erdbebenbewegung wurde von der Mehrzahl der über dieselbe berichtenden Beobachter als eine ungefähr von N. nach S. oder von S. nach N. verlaufende empfunden. Wie in allen ähnlichen Fällen bezeichnen diese Angaben nur das Azimuth der Bewegung, also nur die allgemeine Himmelsrichtung derselben. Die von letzterer abweichenden Beobachtungen werden in dem weiter unten Gesagten ihre Erklärung finden.

4. Das begleitende Schallphänomen

wird fast ausnahmslos mit Donnerrollen, dumpfem Wagenrasseln, brausendem Dröhnen und Krachen verglichen, welches dem Erdstoss voranging und folgte. Einzelnen Personen schien es, als ob dieses Geräusch direct unter ihrer Behausung durchziehe; von Anderen wurde beobachtet, wie das anfänglich entfernt klingende unterirdische Donnern immer lauter wird, bis zu dem Augenblick, wo der Erdbebenstoss erfolgt, um dann decrescendo wieder zu verlaufen. Bei Eich im Freien sich befindende Leute hörten das rollende Brausen aus der Ferne kommen, immer stärker werden, unter sich weg und dann weiter ziehen. Auch diese Erscheinung hatte nur 6—10 Secunden Dauer.

Von den *Einzelerscheinungen*, aus welchen sich das Erdbeben vom 26. December zusammensetzte, geben die Berichte einiger Beobachter, welche zur Zeit des Erdbebeneintritts wach lagen und deshalb dasselbe in allen Theilen seines Vollzugs wahrnahmen, ein instructives Bild.

Ueber den Verlauf des Erdbebens in *Plauen* schreibt Herr H. Oehme etwa wie folgt: Ich lag noch wach, als gegen ¼1 Uhr

Digitized by Google

plötzlich ein heftiger Erdstoss das Haus erschütterte, dessen Mauern erzittern, die Fenster erklirren machte und mich im Bette hin und her rüttelte. Ich hörte einen an der Wand hängenden Kober an dieser hin und her scheuern, das Pendel des Regulators einige Male an dessen Holzwand anschlagen. Ein rasselndes, rollendes Geräusch folgte dem Stoss. Dann war Alles wieder ruhig; das Pendel der Uhr schlug wieder ganz regelmässig, als ein zweiter schwacher und dann ein dritter wieder etwas kräftigerer Stoss, beide verknüpft mit ähnlichem Getöse, erfolgte, ohne jedoch wie der erste Gegenstände in Bewegung zu setzen.

In *Auerbach* vernahm der Ingenieur Herr KÖTZ etwa 15 Minuten nach Mitternacht ein dumpfes Rollen sich nähern, dann plötzlich einen heftigen Stoss, der das Haus erschütterte, und danach das Geräusch sich rollend verlaufen. Einige Minuten später erfolgte eine zweite, weit schwächere, von unterirdischem Getöse begleitete Erschütterung.

In *Adorf* war Herr L. NICOLAI durch das heftige Erzittern seiner Wohnung eben aus dem Schlafe geweckt worden, als dieselbe von einem so heftigen, ruckförmigen Stoss betroffen wurde, dass er glaubte, sämmtlicher Stuck müsse von dem Hause herabgeworfen werden. Nach einem Zeitraume von angeblich höchstens 3 Minuten erhob sich ein von N. herkommendes dumpfes Rollen und verlief gleichmässig unter dem Hause weg, welches sich im selbigen Momente wie auf einer Welle hob und senkte.

Ganz ähnlich lauten die Berichte über den seismischen Vorgang in Lauterbach, Treuen, Kloschwitz und anderen Orten des Erschütterungsgebietes.

5. Die Wirkungen

dieses Erdbebens waren in ihrer Allgemeinheit heftiger, als bei irgend einer der früher stattgehabten vogtländischen Erderschütterungen. Bewohnern einzelner Häuser erschienen die letzteren sich empor zu heben und dann wieder zu senken, die Wände der Zimmer sich überzubiegen oder zu schwanken, so dass man deren Zusammensturz oder das Herabfallen des Stuckes befürchtete. Die Stubendiele knisterte, die Dachsparren knackten. Nicht fest eingeklinkte Thüren schlugen auf und zu; die Fenster klirrten. Die in den Betten Liegenden fühlten sich förmlich in

Digitized by Google

die Höhe gehoben oder schaukelartig gerüttelt, ja hin und her geworfen. Schränke und Tische schwankten, in und auf ihnen stehendes Geschirr klirrte gegeneinander, eiserne Öfen rasselten. In Untersachsenberg und Auerbach blieben mehrere Pendeluhren stehen. Einzelne Gegenstände wurden sogar umgeworfen, so in Kottengrün und in Auerbach an der Wand stehende Stöcke, in letzterem Orte eine Blumenvase, bei Rodewisch die an ein Bahnwärterhaus gelehnten Bretter und Stangen, in Elsterberg ein im Schuppen aufgeschichteter Holzstoss.

Der Bewohner der auf solche Weise betroffenen Behausungen bemächtigte sich allgemein ein lebhaftes Angst- und Schreckgefühl. Es wird berichtet, wie die noch um den Tisch Versammelten einander bleich und starr angeblickt haben, wie sich Einzelner ein nervöses Zittern bemächtigte, wie Kinder laut aufgeschrien hätten, ja dass mehrere Frauen von den Stühlen gefallen seien. Schlafende sind wach gerüttelt worden, rasch aufgestanden oder aus ihren Betten gesprungen und haben sich z. B. stundenlang nicht wieder in diese zurückgetraut. Die grösste Mehrzahl der zu jener mitternächtigen Stunde bereits schlafenden Bewohner des Erschütterungsareals vermochte freilich selbst eine so intensive Bewegung des Untergrundes und ihrer Umgebung nicht zu wecken, so dass sich dieselbe ihnen unbewusst vollzog. Von mehreren Ortschaften hingegen, so von Messbach und Thiergarten, wird ausdrücklich berichtet, dass der Erdstoss wohl in jedem Hause wahrgenommen worden sei.

Sehr empfindlich gegen die ungewohnte Erscheinung verhielten sich die *Hausthiere*. Das Vieh blökte in den Ställen, Pferde rissen sich los oder blieben stundenlang unruhig, Hunde heulten jämmerlich und rissen sich von ihren Ketten, Hähne krähten, Singvögel flatterten ängstlich im Käfig herum.

6. Nachfolgende Erderschütterungen.

An einigen Orten des Erschütterungsgebietes sind mehrere Stunden nach dem beschriebenen Erdbeben nochmals z. Th. ziemlich energische Stösse verspürt worden. So in *Bergen*, wo sich in der Frühe des 26. December zwischen $^1/_2$ und $^3/_4$3 Uhr, also etwa 2 Stunden nach dem auch dort allgemein wahrgenommenen Erdbeben, eine schwächere Wiederholung desselben abspielte. Rasselndes Rollen ertönte von N nach S ziehend, die

Digitized by Google

Häuser erzitterten, die Fenster klirrten, die Hofhunde heulten laut auf (A. PUMCKER). Ganz Aehnliches wird von *Untersachsenberg* berichtet, wo jedoch die zweite Erschütterung um $^1/_2 4$ Morgens und eine dritte Abends gegen 9 Uhr stattfand.

II. Theoretische Betrachtungen.

Kaum irgend ein anderer Theil Deutschlands ist in solchem Maasse tektonischen Störungen durch seitliche Druckwirkungen ausgesetzt gewesen, wie das ostthüringisch-vogtländische Schiefergebirge und mit diesem der Schauplatz des Erdbebens vom 26. December 1888. In das Chaos von Schichtenstauchungen und Gebirgszerstückelungen, welches jenes Areal vorzustellen schien, haben K. Th. LIEBE's bewundernswerthe Untersuchungen Klarheit gebracht [1]). Danach ist jenes Gebiet der Kernpunkt, in welchem sich der Faltenwurf von nicht weniger als fünf Sattelungen kreuzt. Am engsten schaaren sich die dem erzgebirgischen Faltensystem angehörigen, nordöstlich verlaufenden, steil zusammengeschobenen Sättel. Etwas weniger intensiv ist die nach NW. gerichtete frankenwalder Faltung. Neben diesen beiden, den geologischen Bau allgemein beherrschenden Zusammenschüben der Schichten, machen sich in schwächerem Maasse oder innerhalb engerer Grenzen noch drei andere Sattelungsrichtungen geltend: eine nordnordöstliche, eine oststüdöstliche und endlich eine mit der Entstehung des Fichtelgebirges zusammenhängende ostwestliche. Jede dieser Stauchungen hatte die Aufreissung von ihnen parallel verlaufenden Spalten und dadurch ermöglichte Verwerfungen im Gefolge, welche das vogtländische Gebirge durchkreuzen, wenn auch unter ihnen die erzgebirgische Richtung vorzuherrschen pflegt.

LIEBE's Untersuchungen hat E. WEISE im sächsischen Vogtlande weiter geführt und in dessen Tektonik eine vollkommene Uebereinstimmung mit den skizzirten Grundlinien des westlich angrenzenden Nachbarlandes nachgewiesen [2]). In diesem Areale kommt neben dem erzgebirgischen und frankenwalder Haupt-

1) LIEBE. Schichtenaufbau Ostthüringens. Abh. z. geol. Specialkarte von Preussen. B. V. Heft 4. Berlin 1884.

2) Erläuterungen zu Section Plauen-Oelsnitz der geolog. Specialkarte von Sachsen. Leipzig 1887. S. 65 u. f.

Digitized by Google

faltensysteme auch die ostwestliche und eine nordsüdliche Sattelung zu schärferem Ausdruck. Sie stehen gleichfalls sämmtlich mit Verwerfungen in Verbindung, durch welche die Gebirgskeile sowohl verticale, wie horizontale Verschiebungen erlitten haben, und welche dieses vogtländische Terrain in solcher Unzahl durchsetzen und zerstückeln, dass dasselbe einer Riesenbreccie vergleichbar wird.

Mit der neueren Anschauung über die Ursächlichkeit der Mehrzahl der Erdbeben, welche die letzteren als directe Aeusserungen oder als secundäre Folgen des gebirgsbildenden Schubes anerkennt, steht es im Einklang, dass gerade solche ganz besonders intensiv gestauchte, zerborstene und in ihren Einzeltheilen verschobene Gebirgsmassen zum Ausgangspunkte von Erderschütterungen werden. Dieser Auffassung entspricht es vollkommen, wenn gerade das Vogtland häufiger von Erdbeben betroffen wird, als irgend ein anderer Theil von Mitteldeutschland. Seitdem sich unsere Aufmerksamkeit auf diese seismischen Erscheinungen gelenkt hat, konnte bereits über die folgenden vogtländischen Erderschütterungen Bericht erstattet werden:

1. das Erdbeben vom 23. November 1875; Erschütterungsareal 40 □Meil.[1]);
2. den Weischlitzer Erdstoss am 12. December 1880[2]);
3. das Erdbeben im vogtländischen Oberlande am 29. September 1883;
4. das reussisch-sächsische Erdbeben am 20. October 1883; Erschütterungsareal 160 □Meil.;
5. die Erdstösse von Greiz und Gera am 22. October 1883;
6. die Erdstösse von Brockau am 10. December 1883.

Auch

7. das Erdbeben vom 26. December 1888 gehört dem vogtländischen Schüttergebiete an.

Endlich wird gemeldet, dass

8. am 18. Januar 1889 Morgens $3^1/_2$ Uhr in Oelsnitz ein Erdstoss verspürt worden ist.

Auf Grund obiger Darlegungen darf man alle diese seismischen Vorgänge zur Gruppe der *tektonischen* Erderschütterungen rechnen. Bei dem oben beschriebenen Erdbeben vom

1) Zeitschrift für die gesammten Naturwiss. Halle 1876. S. 246.
2) 2 bis 6 in der Zeitschr. f. Naturwissensch. Halle 1884. S. 1.

Digitized by Google

26. December v. J. offenbart sich diese seine Zugehörigkeit in fast allen seinen Einzelheiten:

1. Die Längsachse seines Erschütterungsareals liegt in ostnordöstlicher, also erzgebirgischer Richtung, sonach in derjenigen der auch im Vogtlande vorherrschenden Sattelungen und Verwerfungen.

2. Die Mehrzahl der Beobachter geben, selbst an den beiden äussersten Endpunkten der Erschütterungszone, Nord-Süd als die ungefähre, allgemeine Himmelsrichtung der Erdbebenbewegung an. Es weist dies darauf hin, dass der Anstoss zu der Erderschütterung in einer, wenn auch höchst geringfügigen Verschiebung auf erzgebirgischen Spalten oder entlang einer erzgebirgischen Schichtenstauchung zu suchen ist, von wo aus sich die stossförmig schütternde Bewegung rechtwinklig nach ungefähr N und S ausbreitete.

3. Die mehrfach constatirten Abweichungen der Erdbebenrichtung von der N-S-Linie lassen sich auf Ablenkungen der seismischen Wellen durch grössere Bruchflächen zurückführen. So erklärt sich die nordöstliche Richtung der Erdbebenbewegung in Plauen und in dem benachbarten Dorfe Thiergarten dadurch, dass diese beiden Orte an der grossen nach NO verlaufenden Elsterthal-Verwerfung liegen, auf welcher das Oberdevon bis in das Niveau des Untersilurs abgesunken ist. Die sehr weit auseinander gehenden Meldungen über die Richtung der Erderschütterung in der Gegend von Auerbach finden weiter unten ihre Deutung.

4. Die Erdbebenbewegung hat die innerhalb des vogtländisch-erzgebirgischen Schichtengebietes gelegenen *Granitmassive* (vergl. das Übersichtskärtchen auf Taf. III) entweder umgangen und sie ganz verschont, oder sie in weit schwächerem Maasse betroffen, als die benachbarten Complexe der Phyllit-, Silur- und Devonformation. Aus dem Kirchberger Granitmassiv liegt keine einzige Erdbebenmeldung vor, obwohl die Landstriche von Lengenfeld und Voigtsgrün im Nordwesten, zwischen Rebesgrün, Rodewisch und Rothenkirchen im Süden, und bei Alberoda und Poppenwald im Osten desselben meist recht intensive Erschütterungen aufzuweisen hatten. Von den auf dem Lauterbacher Granitmassiv zerstreuten Ortschaften wurde das Erdbeben nur in Bergen beobachtet, während es sich innerhalb des Eibenstocker Granitareals nur in sehr abgeschwächter Form äusserte.

Digitized by Google

Inmitten des verhältnissmässig schmalen Schieferstreifens zwischen diesen drei Granitinseln liegen die Orte Auerbach, Sorga und Rodewisch, von denen aus die widersprechendsten Berichte über die Richtung der Erdbebenbewegung eingelaufen sind. Es liegt nahe, die Ursache dieser Erscheinung in der Brechung und Ablenkung der innerhalb des Schiefergebirges erzeugten und sich in demselben fortbewegenden Erdbebenwellen an den benachbarten Granitmassivs zu suchen. Auf diese Weise erklärt sich auch die Wahrnehmung, dass die Erdbebenwelle am Nordwestrande des Kirchberger Granites (Voigtsgrün) in der Richtung von SW nach NO verlief.

Digitized by Google

SITZUNG VOM 4. MÄRZ 1889.

W. Scheibner, *Ueber den Zusammenhang der Thetafunctionen mit den elliptischen Integralen.*

1.

Die im Folgenden benutzte Bezeichnung der coordinirten Thetafunctionen gründet sich auf die Functionalgleichung

$$\Theta_\delta^\varepsilon(u, h) = \delta\,\Theta(u + \pi) = \varepsilon\, q\, e^{2ui}\,\Theta(u + hi)\ ,$$

in welcher $q = e^{-h}$, $\delta^2 = \varepsilon^2 = 1$ gesetzt ist. In Verbindung mit der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2} = 4\,\frac{\partial\Theta}{\partial h} \quad \text{oder} \quad \Theta'' u = 4\,\frac{\partial\Theta u}{\partial h}$$

sind dadurch bis auf einen numerischen Factor die vier Jacobischen Functionen bestimmt:

$$\Theta_1^1(u, h) = \vartheta_3(u, q) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{m^2} e^{2mui}\ ,$$

$$\Theta_1^{-1}(u, h) = \vartheta\ (u, q) = \sum (-1)^m q^{m^2} e^{2mui}\ ,$$

$$\Theta_{-1}^1(u, h) = \vartheta_2(u, q) = \sum q^{(m+\frac{1}{2})^2} e^{(2m+1)ui}\ ,$$

$$\Theta_{-1}^{-1}(u, h) = \vartheta_1(u, q) = \frac{1}{i}\sum (-1)^m q^{(m+\frac{1}{2})^2} e^{(2m+1)ui}\ ,$$

deren gegenseitiger Zusammenhang durch die Formel

$$\Theta_\delta^\varepsilon(u) = \varepsilon^{\frac{\delta-1}{2}}\,\Theta_\delta^{-\varepsilon}\left(u + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\, q^{\frac{1}{4}} e^{ui}\,\Theta_{-\delta}^{\varepsilon}\left(u + \frac{hi}{2}\right)$$

$$= \varepsilon^{\frac{\delta}{2}}\, q^{\frac{1}{4}} e^{ui}\,\Theta_{-\delta}^{-\varepsilon}\left(u + \frac{\pi + hi}{2}\right)$$

ausgedrückt wird. Der absolute Werth von q wird < 1, der reelle Theil von h mithin als positiv vorausgesetzt.

Digitized by Google

2.

Um die Beziehung dieser Functionen zu den elliptischen Integralen abzuleiten[1]), gehen wir von der Additionsformel

(A.) $$\vartheta^2\vartheta_1(u+v)\,\vartheta_1(u-v) = \vartheta_1^2 u\,\vartheta^2 v - \vartheta^2 u\,\vartheta_1^2 v$$

aus. Setzt man hier $u - v = w$, so wird

$$\vartheta^2\vartheta_1(2u-w)\,\vartheta_1 w = \vartheta_1^2 u\,\vartheta^2(u-w) - \vartheta^2 u\,\vartheta_1^2(u-w) .$$

Bei der Entwickelung nach den Potenzen von w erhält man sogleich

$$\vartheta^2\vartheta_1'\vartheta_1(2u)\,w\ldots = \{\vartheta^2 u\frac{d}{du}\vartheta_1^2 u - \vartheta_1^2 u\frac{d}{du}\vartheta^2 u\}\,w\cdots ,$$

also

(B.) $$\vartheta^2\vartheta_1'\vartheta_1(2u) = \vartheta^2 u\frac{d}{du}\vartheta_1^2 u - \vartheta_1^2 u\frac{d}{du}\vartheta^2 u$$

$$= 2\vartheta^2\vartheta u\,\vartheta_1 u\,\vartheta_2 u\,\vartheta_3 u .$$

Aendert man u und v um $\frac{\pi}{2}$, so kehrt die linke Seite von (A.) ihr Vorzeichen um, mithin folgt

$$\vartheta^2 u\,\vartheta_1^2 v - \vartheta_1^2 u\,\vartheta^2 v = \vartheta_2^2 u\,\vartheta_3^2 v - \vartheta_3^2 u\,\vartheta_2^2 v ,$$

und durch Aenderung der Argumente um $\frac{\pi}{2}$ resp. $\frac{i}{2}\log\frac{1}{q} = \frac{hi}{2}$:

$$\vartheta^2 u\,\vartheta_2^2 v - \vartheta_2^2 u\,\vartheta^2 v = \vartheta_1^2 u\,\vartheta_3^2 v - \vartheta_3^2 u\,\vartheta_1^2 v ,$$

$$\vartheta^2 u\,\vartheta_3^2 v - \vartheta_3^2 u\,\vartheta^2 v = \vartheta_1^2 u\,\vartheta_2^2 v - \vartheta_2^2 u\,\vartheta_1^2 v ,$$

$$\vartheta^2 u\,\vartheta^2 v - \vartheta_1^2 u\,\vartheta_1^2 v = \vartheta_3^2 u\,\vartheta_3^2 v - \vartheta_2^2 u\,\vartheta_2^2 v .$$

Diese Gleichungen werden erfüllt durch die Werthe $v = 0$,

$$\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_1 u}{\vartheta u} = \sin\varphi , \quad \frac{\vartheta}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_2 u}{\vartheta u} = \cos\varphi , \quad \frac{\vartheta_3}{\vartheta}\frac{\vartheta_1 u}{\vartheta_2 u} = \operatorname{tang}\varphi ,$$

---

[1]) Der Verf. hat sich bemüht, aus der Theorie der elliptischen Thetafunctionen nur die elementarsten Sätze, welche aus der Definition dieser Functionen durch die bekannten Exponentialreihen folgen, zu Hülfe zu nehmen, um die Prämissen der Rechnung nach Möglichkeit zu vereinfachen, und für eine ähnliche Behandlung der hyperelliptischen Thetafunctionen in ihrer Beziehung zu den mehrfachen Integralen den Weg zu bahnen.

Digitized by Google

während

$$\vartheta\,\vartheta_3\,\frac{\vartheta_3 u}{\vartheta u} = \sqrt{\vartheta_3^4\cos^2\varphi + \vartheta^4\sin^2\varphi}\ ,$$

oder nach LEGENDRE's Bezeichnung

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_3}\,\frac{\vartheta_3 u}{\vartheta u} = \Delta\varphi = \sqrt{1 - \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4}\sin^2\varphi}\ .$$

Die Substitution in (*B.*) liefert durch eine leichte Rechnung die GAUSS'sche Form des *elliptischen Integrals erster Gattung*:

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\vartheta_3^4\cos^2\varphi + \vartheta^4\sin^2\varphi}} \text{ neben } \varphi = \vartheta\,\vartheta_3 \int_0^{u} \frac{\vartheta_3 u}{\vartheta u}\,du\ ,$$

wo u und φ gleichzeitig die vier Quadranten durchlaufen.

3.

Die nämlichen Gleichungen werden ferner erfüllt durch die Werthe

$$v = 0\ , \quad \frac{\vartheta_3}{\vartheta}\,\frac{\vartheta_1 u}{\vartheta_2 u} = i\sin\varphi'\ , \quad \frac{\vartheta_2}{\vartheta}\,\frac{\vartheta u}{\vartheta_2 u} = \cos\varphi'\ ,$$

$$\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\,\frac{\vartheta_1 u}{\vartheta u} = i\,\mathrm{tang}\,\varphi'\ , \quad \vartheta_2\,\vartheta_3\,\frac{\vartheta_3 u}{\vartheta_2 u} = \sqrt{\vartheta_3^4\cos^2\varphi' + \vartheta_2^4\sin^2\varphi'}\ .$$

Damit folgt aus (*B.*)

$$i\,d\varphi' = \vartheta_2\,\vartheta_3\,\frac{\vartheta_3 u}{\vartheta_2 u}\,du\ .$$

Die Variable φ' ist imaginär für reelle Werthe von u und umgekehrt. Vertauscht man desshalb u mit $u'i$, so bleiben

$$\vartheta(u'i)\ , \quad \frac{1}{i}\,\vartheta_1(u'i)\ , \quad \vartheta_2(u'i)\ , \quad \vartheta_3(u'i)$$

reell und man erhält das Gleichungensystem:

$$\sin\varphi' = \frac{\vartheta_3}{\vartheta}\,\frac{\vartheta_1(u'i)}{i\vartheta_2(u'i)}\ , \quad \cos\varphi' = \frac{\vartheta_2}{\vartheta}\,\frac{\vartheta(u'i)}{\vartheta_2(u'i)}\ , \quad \mathrm{tg}\,\varphi' = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\,\frac{\vartheta_1(u'i)}{i\vartheta(u'i)}\ ,$$

$$\vartheta_2\,\vartheta_3\,\frac{\vartheta_3(u'i)}{\vartheta_2(u'i)} = \sqrt{\vartheta_3^4\cos^2\varphi' + \vartheta_2^4\sin^2\varphi'}\ ,$$

$$u' = \int_0^{\varphi'} \frac{d\varphi}{\sqrt{\vartheta_3^4\cos^2\varphi + \vartheta_2^4\sin^2\varphi}}\ , \quad \varphi' = \vartheta_2\,\vartheta_3 \int_0^{u'} \frac{\vartheta_3(ui)}{\vartheta_2(ui)}\,du\ .$$

Digitized by Google

Hier wird $u' = \frac{1}{2}h$ für $\varphi' = \frac{1}{2}\pi$. Man wird folglich $u' = \frac{uh}{\pi}$ zu setzen haben, damit

$$u = \frac{\pi}{h}\int_0^{\varphi'} \frac{d\varphi}{\sqrt{\vartheta_3^4 \cos^2\varphi + \vartheta_2^4 \sin^2\varphi}}$$

mit

$$\varphi' = \vartheta_2\vartheta_3 \frac{h}{\pi}\int_0^u \frac{\vartheta_3(u'i)}{\vartheta_2(u'i)}\,du$$

gleichzeitig die vier Quadranten durchläuft.

Selbstverständlich sind noch andere Integralformen für u zulässig. So kann man auch setzen

$$\sin\psi = \frac{\vartheta}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_1 u}{\vartheta_3 u}, \quad \cos\psi = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_2 u}{\vartheta_3 u}, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{\vartheta}{\vartheta_3}\frac{\vartheta_1 u}{\vartheta_2 u},$$

$$\vartheta\vartheta_3\frac{\vartheta u}{\vartheta_3 u} = \sqrt{\vartheta^4\cos^2\psi + \vartheta_3^4\sin^2\psi},$$

$$u = \int_0^{\psi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\vartheta^4\cos^2\varphi + \vartheta_3^4\sin^2\varphi}}, \quad \psi = \vartheta\vartheta_3\int_0^u \frac{\vartheta_3 u}{\vartheta u}\,du.$$

Ferner

$$\sin\psi' = \frac{\vartheta_2}{\vartheta}\frac{\vartheta_1(u'i)}{i\vartheta_3(u'i)}, \quad \cos\psi' = \frac{\vartheta_3}{\vartheta}\frac{\vartheta(u'i)}{\vartheta_3(u'i)}, \quad \operatorname{tg}\psi' = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\frac{\vartheta_1(u'i)}{i\vartheta(u'i)},$$

$$\vartheta_2\vartheta_3\frac{\vartheta_2(u'i)}{\vartheta_3(u'i)} = \sqrt{\vartheta_2^4\cos^2\psi' + \vartheta_3^4\sin^2\psi'},$$

$$u' = \frac{hu}{\pi} = \int_0^{\psi'} \frac{d\varphi}{\sqrt{\vartheta_2^4\cos^2\varphi + \vartheta_3^4\sin^2\varphi}},$$

$$\psi' = \vartheta_2\vartheta_3\int_0^{u'} \frac{\vartheta_2(ui)}{\vartheta_3(ui)}\,du.$$

4.

Durch directe Multiplication der Thetareihen erhält man sogleich die Formel

(C.) $$\vartheta_3(u, q)\,\vartheta_3(v, q) =$$

$$= \vartheta_3(u+v, q^2)\,\vartheta_3(u-v, q^2) + \vartheta_2(u+v, q^2)\,\vartheta_2(u-v, q^2),$$

Digitized by Google

aus welcher die specielleren Gleichungen hervorgehen:

$$(C.^*)\quad \begin{cases} \vartheta_3^2 u + \vartheta^2 u = 2\,\vartheta_3(q^2)\,\vartheta_3(2u, q^2)\,, \\ \vartheta u\,\vartheta_3 u \;\; = \vartheta(q^2)\,\vartheta(2u, q^2)\,, \\ \vartheta_3^2 u + \vartheta_2^2 u = \vartheta_3(q^{\frac{1}{2}})\,\vartheta_3(u, q^{\frac{1}{2}})\,, \\ \vartheta_2 u\,\vartheta_3 u \;\; = \frac{1}{2}\,\vartheta_2(q^{\frac{1}{2}})\,\vartheta_2(u, q^{\frac{1}{2}})\,. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke enthalten für $u = 0$ den Satz, dass $\vartheta_3^2(q^2)$ das arithmetische und $\vartheta^2(q^2)$ das geometrische Mittel aus ϑ_3^2 und ϑ^2 darstellt, ebenso wie resp. $\frac{1}{2}\vartheta_3^2(q^{\frac{1}{2}})$ und $\frac{1}{2}\vartheta_2^2(q^{\frac{1}{2}})$ die betreffenden Mittel aus ϑ_3^2 und ϑ_2^2.

Das von GAUSS erfundene *arithmetisch-geometrische* Mittel aus ϑ_3^2 und ϑ^2, welches durch fortgesetzte Wiederholung des Ueberganges von q zu q^2 erhalten wird, ist folglich für $\nu = 2^n$

$$\lim_{n=\infty} \vartheta_3(q^\nu) = \lim \vartheta(q^\nu) = 1\,.$$

Schreibt man daher mit GAUSS

$$m = \mu\,\vartheta_3^2\,, \quad n = \mu\,\vartheta^2\,,$$

so stellt μ das arithmetisch-geometrische Mittel aus m und n dar, so dass

$$u = \mu \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{m^2\cos^2\varphi + n^2\sin^2\varphi}}\,.$$

Ebenso wird das betreffende Mittel aus ϑ_3^2 und ϑ_2^2 durch den Uebergang von q zu $\sqrt{q}$ gefunden und liefert

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\nu}\,\vartheta_3^2(q^{\frac{1}{\nu}}) = \lim \frac{1}{\nu}\,\vartheta_2^2(q^{\frac{1}{\nu}})\,.$$

Zur Aufsuchung dieses Grenzwerthes setzen wir für $q = e^{-h}$

$$\frac{1}{\sqrt{\nu}}\,\vartheta_2(q^{\frac{1}{\nu}}) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\sqrt{\nu}}\,e^{-(m+\frac{1}{2})^2\frac{h}{\nu}}\,, \quad \frac{1}{\sqrt{\nu}}\,\vartheta_3(q^{\frac{1}{\nu}}) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\sqrt{\nu}}\,e^{-m^2\frac{h}{\nu}}\,,$$

und für $\frac{h}{\nu} = \pi\delta^2$:

$$\frac{1}{\sqrt{\nu}}\,\vartheta_2(q^{\frac{1}{\nu}}) = \sqrt{\frac{\pi}{h}}\,\sum \delta\, e^{-(m+\frac{1}{2})^2\pi\delta^2}\,,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\nu}}\,\vartheta_3(q^{\frac{1}{\nu}}) = \sqrt{\frac{\pi}{h}}\,\sum \delta\, e^{-m^2\pi\delta^2}\,.$$

Digitized by Google

Da für wachsende Werthe von ν δ ohne Grenze abnimmt, so wird

$$\lim_{\delta=0} \sum' \delta e^{-(m+\frac{1}{2})^2 \pi \delta^2} = \lim \sum' \delta e^{-m^2 \pi \delta^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1 ,$$

und das gesuchte arithmetisch-geometrische Mittel $= \frac{\pi}{h}$. [1])

5.

Dieser Satz gibt das Mittel zur Berechnung von q aus m und n. Denn setzt man

$$m^2 = n^2 + n'^2 , \quad \text{so folgt} \quad n' = \mu \vartheta_2^2 ,$$

und das arithmetisch-geometrische Mittel aus m und n' wird $\mu' = \frac{\mu \pi}{h}$. Daraus geht

$$q = e^{-h} = e^{-\frac{\mu\pi}{\mu'}}$$

hervor. Sei jetzt

$$q' = e^{-\frac{\mu'\pi}{\mu}} = e^{-\frac{\pi^2}{h}} ,$$

so gelten die analogen Gleichungen

$$m = \mu' \vartheta_3^2(q') , \quad n = \mu' \vartheta_2^2(q') , \quad n' = \mu' \vartheta^2(q') ,$$

folglich

$$\frac{\pi}{h} = \frac{\mu'}{\mu} = \frac{\vartheta_3^2 q}{\vartheta_3^2 q'} = \frac{\vartheta^2 q}{\vartheta_2^2 q'} = \frac{\vartheta_2^2 q}{\vartheta^2 q'} .$$

Damit verwandelt sich der Art. 3. gefundene Ausdruck

$$u = \frac{\pi}{h} \int_0^{\varphi'} \frac{d\varphi}{\sqrt{\vartheta_3^4 \cos^2\varphi + \vartheta_2^4 \sin^2\varphi}}$$

in

$$u = \int_0^{\varphi'} \frac{d\varphi}{\sqrt{\vartheta_3^4(q') \cos^2\varphi + \vartheta^4(q') \sin^2\varphi}} ,$$

---

1) Die Vieldeutigkeit des arithmetisch-geometrischen Mittels findet sich in diesen Berichten, Jahrgang 1862, S. 123 erörtert.

Digitized by Google

so dass φ und q gleichzeitig in φ' und q' übergehen, wenn u unverändert bleiben soll. Folglich erhält man gleichzeitig

$$\sin\varphi' = \frac{\vartheta_3 q'}{\vartheta_2 q'}\,\frac{\vartheta_1(u,q')}{\vartheta(u,q')} = \frac{\vartheta_3}{\vartheta}\,\frac{\vartheta_1(u'i,q)}{i\vartheta_2(u'i,q)}\,,$$

$$\cos\varphi' = \frac{\vartheta q'}{\vartheta_2 q'}\,\frac{\vartheta_2(u,q')}{\vartheta(u,q')} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta}\,\frac{\vartheta(u'i,q)}{\vartheta_2(u'i,q)}\,,$$

$$\Delta(\varphi',q') = \frac{\vartheta q'}{\vartheta_3 q'}\,\frac{\vartheta_3(u,q')}{\vartheta(u,q')} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\,\frac{\vartheta_3(u'i,q)}{\vartheta_2(u'i,q)}\,.$$ [1])

Hieraus entspringt die Proportion

$$\frac{\vartheta(u'i,q)}{\vartheta_2(u,q')} = \frac{\vartheta_1(u'i,q)}{i\vartheta_1(u,q')} = \frac{\vartheta_2(u'i,q)}{\vartheta(u,q')} = \frac{\vartheta_3(u'i,q)}{\vartheta_3(u,q')} = f(u,h)\,,$$

wo $f(0,h) = \sqrt{\frac{\pi}{h}}$ (mit positivem reellen Theile) gefunden worden ist. Im Folgenden (Art. 11) wird sich der Werth

$$f(u,h) = e^{\frac{uu'}{\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{h}}$$

ergeben.

---

[1]) Schreibt man zur Abkürzung neben

$$u' = \frac{uh}{\pi} = u\,\frac{\vartheta_3^2 q'}{\vartheta_3^2 q}\,,\qquad u'' = \frac{u\pi}{h} = u\,\frac{\vartheta_3^2 q}{\vartheta_3^2 q'}\,,$$

so ergeben sich ferner die Gleichungen:

$$\sin\varphi = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\,\frac{\vartheta_1 u}{\vartheta u} = \frac{\vartheta_3 q'}{\vartheta q'}\,\frac{\vartheta_1(u''i,q')}{i\vartheta_2(u''i,q')}\,,$$

$$\cos\varphi = \frac{\vartheta}{\vartheta_2}\,\frac{\vartheta_2 u}{\vartheta u} = \frac{\vartheta_2 q'}{\vartheta q'}\,\frac{\vartheta(u''i,q')}{\vartheta_2(u''i,q')}\,,$$

$$\Delta(\varphi,q) = \frac{\vartheta}{\vartheta_3}\,\frac{\vartheta_3 u}{\vartheta u} = \frac{\vartheta_2 q'}{\vartheta_3 q'}\,\frac{\vartheta_3(u''i,q')}{\vartheta_2(u''i,q')}\,;$$

$$\sin\varphi'' = \frac{\vartheta_3 q'}{\vartheta_2 q'}\,\frac{\vartheta_1(u'',q')}{\vartheta(u'',q')} = \frac{\vartheta_3}{\vartheta}\,\frac{\vartheta_1(ui)}{i\vartheta_2(ui)}\,,$$

$$\cos\varphi'' = \frac{\vartheta q'}{\vartheta_2 q'}\,\frac{\vartheta_2(u'',q')}{\vartheta(u'',q')} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta}\,\frac{\vartheta(ui)}{\vartheta_2(ui)}\,,$$

$$\Delta(\varphi'',q') = \frac{\vartheta q'}{\vartheta_3 q'}\,\frac{\vartheta_3(u'',q')}{\vartheta(u'',q')} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\,\frac{\vartheta_3(ui)}{\vartheta_2(ui)}\,,$$

nebst

$$u\vartheta_3^2 q = u''\vartheta_3^2 q' = \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi,q)} = \int_0^{\varphi''}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi,q')}\,.$$

Digitized by Google

6.

Weitere Formen für u erhält man, wenn man die Quotienten der Thetafunctionen oder ihrer Quadrate direct als Integrationsvariable einführt. Für

$$x = \frac{\vartheta_1^2 u}{\vartheta^2 u} \quad \text{wird} \quad u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{4x(\vartheta_2^2 - x\vartheta_3^2)(\vartheta_3^2 - x\vartheta_2^2)}} ,$$

mit den Invarianten [1])

$$g_2 = \tfrac{4}{3}(\vartheta_3^8 - \vartheta^4\vartheta_2^4) , \quad g_3 = \tfrac{4}{27}(\vartheta^4 - \vartheta_2^4)(2\vartheta_3^8 + \vartheta^4\vartheta_2^4) ,$$

folglich

$$g_2^3 - 27g_3^2 = 16\vartheta^8\vartheta_2^8\vartheta_3^8 = 16\vartheta_1'^4 ,$$

während für

$$x_1 = \frac{\vartheta_1 u}{\vartheta u} , \quad u = \int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{(\vartheta_2^2 - x^2\vartheta_3^2)(\vartheta_3^2 - x^2\vartheta_2^2)}}$$

die Werthe der Invarianten folgen:

$$g_2 = \tfrac{1}{12}(\vartheta^8 + 16\vartheta_2^4\vartheta_3^4) , \quad g_3 = \tfrac{1}{216}(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)(\vartheta^8 - 32\vartheta_2^4\vartheta_3^4) ,$$

nebst der Discriminante

$$g_2^3 - 27g_3^2 = \tfrac{1}{16}\vartheta^{16}\vartheta_2^4\vartheta_3^4 = \{\tfrac{1}{2}\vartheta_1'(q^{\frac{1}{2}})\}^8 .$$

In den betrachteten Fällen besitzt das Radical unter dem Integralzeichen vier reelle Wurzeln. Setzt man dagegen

$$x_2 = \frac{\vartheta_1 u}{\vartheta_2 u} , \quad u = \int_0^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{(\vartheta_3^2 + x^2\vartheta^2)(\vartheta^2 + x^2\vartheta_3^2)}} ,$$

so hat man zwei conjugirte Wurzelpaare und die Invarianten

$$g_2 = \tfrac{1}{12}(\vartheta_2^8 + 16\vartheta^4\vartheta_3^4) , \quad g_3 = \tfrac{1}{216}(\vartheta^4 + \vartheta_3^4)(32\vartheta^4\vartheta_3^4 - \vartheta_2^8) ,$$

$$g_2^3 - 27g_3^2 = \tfrac{1}{16}\vartheta^4\vartheta_2^{16}\vartheta_3^4 = 16\{\vartheta_1'(q^2)\}^8 .$$

---

1) Nach WEIERSTRASS bezeichnet man die Invarianten des Polynoms $f = ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e$ durch $g_2 = ae - 4bd + 3cc$ und $g_3 = ace + 2bcd - ad^2 - b^2e - c^3$.

Digitized by Google

Endlich wird für

$$x_3 = \frac{\vartheta_1 u}{\vartheta_3 u}\,, \quad u = \int_0^{x_3} \frac{dx}{\sqrt{(\vartheta^2 + x^2\vartheta_2^2)(\vartheta_2^2 - x^2\vartheta^2)}}\,,$$

$$g_2 = \tfrac{1}{12}(\vartheta_3^8 - 16\vartheta^4\vartheta_2^4)\,, \quad g_3 = \tfrac{1}{216}(\vartheta^4 - \vartheta_2^4)(\vartheta_3^8 + 32\vartheta^4\vartheta_2^4)\,,$$

$$g_2^3 - 27g_3^2 = -\tfrac{1}{16}\vartheta^4\vartheta_2^4\vartheta_3^{16} = \{\tfrac{1}{2}\vartheta_1'(iq^{\frac{1}{4}})\}^8\,.$$

Im letzteren Falle besteht die Ungleichung $g_2^3 < 27g_3^2$, weil die Function $(\vartheta^2 + x^2\vartheta_2^2)(\vartheta_2^2 - x^2\vartheta^2)$ zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln besitzt.

7.

Wir wenden uns jetzt zur logarithmischen Differentiation der Formel (*A*). Dieselbe ergibt

$$\frac{\vartheta_1'(u+v)}{\vartheta_1(u+v)} + \frac{\vartheta_1'(u-v)}{\vartheta_1(u-v)} - 2\frac{\vartheta_1' u}{\vartheta_1 u} = \frac{d}{du}\log\left(1 - \frac{\vartheta^2 u\,\vartheta_1^2 v}{\vartheta_1^2 u\,\vartheta^2 v}\right)$$

$$= \frac{\vartheta_1^2 v}{\vartheta_1^2 u}\,\frac{\vartheta^2 u\frac{d}{du}\vartheta_1^2 u - \vartheta_1^2 u\frac{d}{du}\vartheta^2 u}{\vartheta_1^2 u\,\vartheta^2 v - \vartheta^2 u\,\vartheta_1^2 v}$$

$$= \frac{\vartheta_1'\vartheta_1^2 v\,\vartheta_1(2u)}{\vartheta_1^2 u\,\vartheta_1(u+v)\,\vartheta_1(u-v)}\,.$$

Entwickelt man nach den Potenzen von v, so folgt

$$v^2\left(\frac{d}{du}\right)^3 \log\vartheta_1 u \;\cdots\; = v^2\frac{\vartheta_1'^3\,\vartheta_1(2u)}{\vartheta_1^4 u} \;\cdots\,,$$

mithin

$$(D.) \qquad \left(\frac{d}{du}\right)^3 \log\vartheta_1 u = \vartheta_1'^3\frac{\vartheta_1(2u)}{\vartheta_1^4 u} = 2\vartheta_1'^3\frac{\vartheta u\,\vartheta_2 u\,\vartheta_3 u}{\vartheta_1^3 u}\,.$$

Die gefundene Gleichung ist von fundamentalem Charakter und liefert zugleich Formen der elliptischen Integrale *erster* und *zweiter* Gattung[1]).

Durch Aenderung des Arguments um $\frac{\pi}{2}$ resp. $\frac{hi}{2}$ ergibt sich:

---

1) Abhandlungen der K. Sächs. Gesellsch. Bd. XX, S. 448, *Zur Reduction elliptischer Integrale in reeller Form*, 1879, S. 92.

Digitized by Google

$$\left(\frac{d}{du}\right)^3 \log \vartheta_2 u = -\vartheta_1'^3 \frac{\vartheta_1(2u)}{\vartheta_2^4 u} = -2\vartheta_1'\vartheta_1' \frac{\vartheta u \vartheta_1 u \vartheta_3 u}{\vartheta_2^3 u} ,$$

$$\left(\frac{d}{du}\right)^3 \log \vartheta u = -\vartheta_1'^3 \frac{\vartheta_1(2u)}{\vartheta^4 u} = -2\vartheta_1'\vartheta_1' \frac{\vartheta_1 u \vartheta_2 u \vartheta_3 u}{\vartheta^3 u} ,$$

$$\left(\frac{d}{du}\right)^3 \log \vartheta_3 u = \vartheta_1'^3 \frac{\vartheta_1(2u)}{\vartheta_3^4 u} = 2\vartheta_1'\vartheta_1' \frac{\vartheta u \vartheta_1 u \vartheta_2 u}{\vartheta_3^3 u} ,$$

so dass man kürzer schreiben kann:

$$(D.^*) \qquad \Theta^4 u \left(\frac{d}{du}\right)^3 \log \Theta_\delta^\varepsilon u = \delta\varepsilon\vartheta_1'^3 \vartheta_1(2u) .$$

Integrirt man diese vier Formeln zwischen den geeigneten Grenzen, so erhält man die den zwölf Quotienten der vier Thetafunctionen entsprechenden Ausdrücke von vier neuen coordinirten Functionen:

$$\eta u = \left(\frac{d}{du}\right)^2 \log \vartheta u = \frac{\vartheta''}{\vartheta} - \vartheta_2^2\vartheta_3^2 \frac{\vartheta_1^2 u}{\vartheta^2 u}$$

$$= \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} + \vartheta^2\vartheta_3^2 \frac{\vartheta_3^2 u}{\vartheta^2 u} = \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} + \vartheta^2\vartheta_2^2 \frac{\vartheta_2^2 u}{\vartheta^2 u} ,$$

$$\eta_1 u = \left(\frac{d}{du}\right)^2 \log \vartheta_1 u = \frac{\vartheta''}{\vartheta} - \vartheta_2^2\vartheta_3^2 \frac{\vartheta^2 u}{\vartheta_1^2 u}$$

$$= \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \vartheta^2\vartheta_3^2 \frac{\vartheta_2^2 u}{\vartheta_1^2 u} = \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \vartheta^2\vartheta_2^2 \frac{\vartheta_3^2 u}{\vartheta_1^2 u} ,$$

$$\eta_2 u = \left(\frac{d}{du}\right)^2 \log \vartheta_2 u = \frac{\vartheta''}{\vartheta} - \vartheta_2^2\vartheta_3^2 \frac{\vartheta_3^2 u}{\vartheta_2^2 u}$$

$$= \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \vartheta^2\vartheta_3^2 \frac{\vartheta_1^2 u}{\vartheta_2^2 u} = \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \vartheta^2\vartheta_2^2 \frac{\vartheta^2 u}{\vartheta_2^2 u} ,$$

$$\eta_3 u = \left(\frac{d}{du}\right)^2 \log \vartheta_3 u = \frac{\vartheta''}{\vartheta} - \vartheta_2^2\vartheta_3^2 \frac{\vartheta_2^2 u}{\vartheta_3^2 u}$$

$$= \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} + \vartheta^2\vartheta_3^2 \frac{\vartheta^2 u}{\vartheta_3^2 u} = \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} + \vartheta^2\vartheta_2^2 \frac{\vartheta_1^2 u}{\vartheta_3^2 u} .$$

Hier ist $\frac{\vartheta''}{\vartheta} = \frac{\delta \log \vartheta^4}{\delta h}$ u. s. w. geschrieben, weil allge-

Digitized by Google

mein $\vartheta'' u = 4 \frac{\partial \vartheta u}{\partial h}$. Die zwölf Quotienten der Thetafunctionen werden durch Gleichungen von der Form

$$\vartheta_2 \vartheta_3 \frac{\vartheta_1 u}{\vartheta u} = \sqrt{\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \eta u}\,, \qquad \vartheta \vartheta_3 \frac{\vartheta_3 u}{\vartheta u} = \sqrt{\eta u - \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}}\,,$$

$$\vartheta \vartheta_2 \frac{\vartheta_2 u}{\vartheta u} = \sqrt{\eta u - \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}}\,,$$ u. s. w., ausgedrückt.

8.

Hieraus entspringen die Differentialformeln

$$\eta' u\, \eta' u = 4 \left(\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \eta u\right)\left(\eta u - \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)\left(\eta u - \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right),$$

$$\eta_1' u\, \eta_1' u = 4 \left(\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \eta_1 u\right)\left(\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \eta_1 u\right)\left(\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \eta_1 u\right),$$

$$\eta_2' u\, \eta_2' u = 4 \left(\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \eta_2 u\right)\left(\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \eta_2 u\right)\left(\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \eta_2 u\right),$$

$$\eta_3' u\, \eta_3' u = 4 \left(\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \eta_3 u\right)\left(\eta_3 u - \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)\left(\eta_3 u - \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right),$$

welche die *Integrale erster Gattung* in der Form liefern:

$$u = \int_{\eta}^{\frac{\vartheta''}{\vartheta}} \frac{d\eta}{\sqrt{4\left(\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \eta\right)\left(\eta - \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)\left(\eta - \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right)}}\,, \quad d\eta = -\vartheta_1'^3 \frac{\vartheta_1(2u)}{\vartheta^4 u}\, du\,,$$

$$u = \int_{-\infty}^{\eta_1} \frac{d\eta}{\sqrt{4\left(\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \eta\right)\left(\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \eta\right)\left(\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \eta\right)}}\,, \quad d\eta_1 = \vartheta_1'^3 \frac{\vartheta_1(2u)}{\vartheta_1^4 u}\, du\,,$$

$$u = \int_{\eta_2}^{\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}} \frac{d\eta}{\sqrt{4\left(\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \eta\right)\left(\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \eta\right)\left(\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \eta\right)}}\,, \quad d\eta_2 = -\vartheta_1'^3 \frac{\vartheta_1(2u)}{\vartheta_2^4 u}\, du\,,$$

$$u = \int_{\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}}^{\eta_3} \frac{d\eta}{\sqrt{4\left(\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \eta\right)\left(\eta - \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)\left(\eta - \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right)}}\,, \quad d\eta_3 = \vartheta_1'^3 \frac{\vartheta_1(2u)}{\vartheta_3^4 u}\, du\,.$$

Digitized by Google

Das Radical H unter dem Integralzeichen aber ist gegeben durch den Ausdruck

$$H_\delta^\varepsilon = \vartheta_1'^3 \frac{\vartheta_\delta(2u)}{\Theta^4 u} .$$

Schreibt man ui für u, so erhält man für imaginäre Werthe des Arguments

$$\eta_i = \eta(ui) = \left(\frac{d}{du\,i}\right)^2 \log \vartheta(ui) = \frac{\vartheta''}{\vartheta} + \vartheta_2^2\vartheta_3^2\left(\frac{\vartheta_1(ui)}{i\,\vartheta(ui)}\right)^2 ,$$

$$\eta'(ui) = -\vartheta_1'^3 \frac{\vartheta_1(2ui)}{\vartheta^4(ui)} \quad \text{oder} \quad d\bar{\eta} = \vartheta_1'^3 \frac{\vartheta_1(2ui)}{i\vartheta^4(ui)}\,du ,$$

und quadrirt

$$\eta'(u)\eta'(u) = 4\left(\eta - \frac{\vartheta''}{\vartheta}\right)\left(\eta - \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)\left(\eta - \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right) = H^2 ;$$

ferner

$$\bar{\eta}_1 = \eta_1(ui) = \frac{\vartheta''}{\vartheta} + \vartheta_2^2\vartheta_3^2\left(\frac{i\vartheta(ui)}{\vartheta_1(ui)}\right)^2 ,$$

$$\bar{\eta}_2 = \eta_2(ui) = \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} + \vartheta^2\vartheta_3^2\left(\frac{\vartheta_1(ui)}{i\,\vartheta_2(ui)}\right)^2 ,$$

$$\bar{\eta}_3 = \eta_3(ui) = \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \vartheta^2\vartheta_2^2\left(\frac{\vartheta_1(ui)}{i\vartheta_3(ui)}\right)^2 ,$$

so dass die Integralformen hervorgehen:

$$u = \int_{\frac{\vartheta''}{\vartheta}}^{\bar{\eta}} \frac{d\eta}{\sqrt{4\left(\eta - \frac{\vartheta''}{\vartheta}\right)\left(\eta - \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)\left(\eta - \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right)}} , \quad d\eta = \vartheta_1'^3 \frac{\vartheta_1(2ui)}{i\vartheta^4(ui)}\,du ,$$

$$u = \int_{\bar{\eta}_1}^{\infty} \frac{d\eta}{\sqrt{4\left(\eta - \frac{\vartheta''}{\vartheta}\right)\left(\eta - \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)\left(\eta - \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right)}} , \quad d\bar{\eta}_1 = -\vartheta_1'^3 \frac{\vartheta_1(2ui)}{i\vartheta_1^4(ui)}\,du ,$$

$$u = \int_{\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}}^{\bar{\eta}_2} \frac{d\eta}{\sqrt{4\left(\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \eta\right)\left(\eta - \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)\left(\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \eta\right)}} , \quad d\bar{\eta}_2 = \vartheta_1'^3 \frac{\vartheta_1(2ui)}{i\vartheta_2^4(ui)}\,du ,$$

$$u = \int_{\bar{\eta}_3}^{\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}} \frac{d\eta}{\sqrt{4\left(\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \eta\right)\left(\eta - \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)\left(\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \eta\right)}} , \quad d\bar{\eta}_3 = -\vartheta_1'^3 \frac{\vartheta_1(2ui)}{i\vartheta_3^4(ui)}\,du ,$$

Digitized by Google

in denen das Radical unter dem Integralzeichen durch

$$\overline{H}_\delta^\varepsilon = \vartheta_1'^3 \frac{\vartheta_1(2ui)}{i\Theta^4(ui)}$$

ausgedrückt wird.

9.

Die Gleichung (*D.**)

$$\Theta^4 u \left(\frac{d}{du}\right)^3 \log \Theta_\delta^\varepsilon(u) = \delta\varepsilon\vartheta_1'^3\vartheta_1(2u)$$

liefert zugleich die Differentialgleichung dritter Ordnung, welcher die Thetafunctionen genügen. Eine leichte Rechnung ergibt:

$$2z'^3 - 3zz'z'' + z^2z''' = 2\delta\varepsilon\sqrt{H}\left(\frac{\vartheta''}{\vartheta}z^2 + z'z' - zz''\right)$$

oder quadrirt

$$zz'''^3 - \tfrac{3}{4}z'^2z''^2 + z'^3z''' - \tfrac{3}{2}zz'z''z''' + \tfrac{1}{4}z^2z'''^2 =$$

$$\frac{\vartheta''\vartheta_2''\vartheta_3''}{\vartheta_1'}z^4 + \tfrac{1}{3}\left\{\left(\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}\right)^2 - \vartheta_3^4 + \vartheta^4\vartheta_2^4\right\}z^2(z'z' - zz'') + \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}(z'z' - zz'')^2$$

Diese Gleichung kann als Seitenstück zu der von Jacobi gegebenen (Crelle Band 36, Seite 103) angesehen werden:

$$30y'^3 - 15yy'y'' + y^2y''' = \pm(3y'y' - yy'')\sqrt{y^{10} + 96y'y' - 32yy''},$$

bei welcher h als die unabhängige Variable zu nehmen ist, während $u = 0$ gesetzt worden ist[1]).

Die Invarianten des Polynoms

$$H^2 = 4\left(\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \eta\right)\left(\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \eta\right)\left(\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \eta\right)$$

$$= 4\left(\tfrac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} - \eta\right)^3 - g_2\left(\tfrac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} - \eta\right) - g_3$$

[1]) Vergl. auch die in diesen Berichten, Jahrgang 1862, S. 145/6 aufgestellten Differentialformeln.

Digitized by Google

sind von den früher für $x = \frac{\vartheta_1^2 u}{\vartheta^2 u}$ berechneten, wie schon aus dem linearen Zusammenhange zwischen η und x erhellt, nicht verschieden, nämlich

$$g_2 = \tfrac{4}{3}(\vartheta_3^8 - \vartheta^4\vartheta_2^4) \ , \quad g_3 = \tfrac{4}{27}(\vartheta^4 - \vartheta_2^4)(2\vartheta_3^8 + \vartheta^4\vartheta_2^4) \ .$$

Für $\overline{H}$ kehrt g_3 das Vorzeichen um.

Aus der Gleichung

$$\vartheta_1'\vartheta_1(2u) = 2\vartheta u\,\vartheta_1 u\,\vartheta_2 u\,\vartheta_3 u$$

folgt nicht allein $\vartheta_1' = \vartheta\vartheta_2\vartheta_3$, sondern durch logarithmische Differentiation nach h auch

$$\frac{\partial}{\partial h}\lg\vartheta_1'^4 = \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} = \frac{\vartheta''}{\vartheta} + \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} + \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} \ ,$$

wo $$\frac{\vartheta''}{\vartheta} = \frac{2}{\pi}\vartheta_2^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\,du \ , \quad \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} = -\frac{2}{\pi}\vartheta_3^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Delta^2\varphi\,du \ ,$$

und $$\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} = -\frac{2}{\pi}\vartheta_2^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\,du \ .$$

Die Relationen

$$\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} = \vartheta_3^4 \ , \quad \frac{\vartheta''}{\vartheta} - \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} = \vartheta_2^4 \ , \quad \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} = \vartheta^4$$

zeigen, dass $$\frac{\vartheta''}{\vartheta} > \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} > \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} \ ;$$

η und η_3 liegen für reelle Werthe von u zwischen $\frac{\vartheta''}{\vartheta}$ und $\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}$, während η_1 und η_2 kleiner sind als $\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}$, dagegen werden für imaginäre Argumente $\eta(ui)$ und $\eta_1(ui)$ grösser als $\frac{\vartheta''}{\vartheta}$, während $\eta_2(ui)$ und $\eta_3(ui)$ zwischen $\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}$ und $\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}$ enthalten sind.

Der Zusammenhang der coordinirten Etafunctionen ist durch die Gleichungen

$$\eta u = \eta_3\left(u + \frac{\pi}{2}\right) = \eta_4\left(u + \frac{hi}{2}\right) = \eta_2\left(u + \frac{\pi + hi}{2}\right)$$

gegeben: dieselben sind folglich doppelt periodisch mit den Perioden π und hi.

10.

Von Interesse sind die Entwickelungen der Etafunctionen nach den Potenzen des Arguments u. Mittelst der stets convergirenden Reihen

$$\vartheta u = \vartheta\left(1 + \tfrac{1}{2}\frac{\vartheta''}{\vartheta}u^2 + \tfrac{1}{24}\frac{\vartheta^{IV}}{\vartheta}u^4 \cdots\right),$$

$$\vartheta_1 u = \vartheta_1'\left(u + \tfrac{1}{6}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}u^3 + \tfrac{1}{120}\frac{\vartheta_1^{V}}{\vartheta_1'}u^5 \cdots\right),$$

$$\vartheta_2 u = \vartheta_2\left(1 + \tfrac{1}{2}\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}u^2 + \tfrac{1}{24}\frac{\vartheta_2^{IV}}{\vartheta_2}u^4 \cdots\right),$$

$$\vartheta_3 u = \vartheta_3\left(1 + \tfrac{1}{2}\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}u^2 + \tfrac{1}{24}\frac{\vartheta_3^{IV}}{\vartheta_3}u^4 \cdots\right),$$

folgt nach einer leichten Rechnung:

$$\eta u = \frac{\vartheta''}{\vartheta} - \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^4 \cdots,$$

$$\alpha_2 = \vartheta_2^4\vartheta_3^4, \qquad \alpha_3 = \tfrac{1}{3}\alpha_2(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4),$$

$$\eta_1 u = -\frac{1}{u^2} + \tfrac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} - \beta_2 u^2 - \beta_3 u^4 \cdots,$$

$$\beta_2 = \tfrac{1}{20}g_2, \qquad \beta_3 = \tfrac{1}{28}g_3,$$

$$\eta_2 u = \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \gamma_2 u^2 - \gamma_3 u^4 \cdots,$$

$$\gamma_2 = \vartheta^4\vartheta_3^4, \qquad \gamma_3 = \tfrac{1}{3}\gamma_2(\vartheta^4 + \vartheta_3^4),$$

$$\eta_3 u = \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} + \delta_2 u^2 + \delta_3 u^4 \cdots,$$

$$\delta_2 = \vartheta^4\vartheta_2^4, \qquad \delta_3 = \tfrac{1}{3}\delta_2(\vartheta_2^4 - \vartheta^4).$$

Digitized by Google

Durch Integration der vorstehenden Gleichungen erhält man die Entwickelungen der logarithmischen Differentialquotienten oder Integrale *zweiter* Gattung:

$$\frac{\vartheta' u}{\vartheta u} = \frac{\vartheta''}{\vartheta} u - \tfrac{1}{3} \alpha_2 u^3 + \tfrac{1}{5} \alpha_3 u^5 \cdots ,$$

$$\frac{\vartheta_1' u}{\vartheta_1 u} = \frac{1}{u} + \tfrac{1}{3} \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} u - \tfrac{1}{3} \beta_2 u^3 - \tfrac{1}{5} \beta_3 u^5 \cdots ,$$

$$\frac{\vartheta_2' u}{\vartheta_2 u} = \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} u - \tfrac{1}{3} \gamma_2 u^3 - \tfrac{1}{5} \gamma_3 u^5 \cdots ,$$

$$\frac{\vartheta_3' u}{\vartheta_3 u} = \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} u + \tfrac{1}{3} \delta_2 u^3 + \tfrac{1}{5} \delta_3 u^5 \cdots ,$$

woraus durch abermalige Integration die Potenzreihen für die Logarithmen der Thetafunctionen hervorgehen:

$$\log \frac{\vartheta u}{\vartheta} = \tfrac{1}{2} \frac{\vartheta''}{\vartheta} u^2 - \tfrac{1}{12} \alpha_2 u^4 + \tfrac{1}{30} \alpha_3 u^6 - \tfrac{1}{56} \alpha_4 u^8 \cdots ,$$

$$\log \frac{\vartheta_1 u}{\vartheta_1'} = \log u + \tfrac{1}{6} \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} u^2 - \tfrac{1}{12} \beta_2 u^4 - \tfrac{1}{30} \beta_3 u^6 - \tfrac{1}{56} \beta_4 u^8 \cdots ,$$

$$\log \frac{\vartheta_2 u}{\vartheta_2} = \tfrac{1}{2} \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} u^2 - \tfrac{1}{12} \gamma_2 u^4 - \tfrac{1}{30} \gamma_3 u^6 - \tfrac{1}{56} \gamma_4 u^8 \cdots ,$$

$$\log \frac{\vartheta_3 u}{\vartheta_3} = \tfrac{1}{2} \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} u^2 + \tfrac{1}{12} \delta_2 u^4 + \tfrac{1}{30} \delta_3 u^6 + \tfrac{1}{56} \delta_4 u^8 \cdots .$$

Das Convergenzgebiet der bisher entwickelten Reihen erstreckt sich bis zu der dem Nullpunkte zunächst liegenden Wurzel der Gleichung $\vartheta_i u = 0$, während sich durch den Uebergang von den Logarithmen zu den Zahlen stets convergirende Reihen ergeben müssen. So wird

$$\vartheta u = \vartheta e^{\frac{1}{2}\frac{\vartheta''}{\vartheta} u^2 - \frac{1}{12}\alpha_2 u^4 \cdots} = \vartheta e^{\frac{1}{2}\frac{\vartheta''}{\vartheta} u^2} \zeta u ,$$

wo $\zeta u = 1 - \tfrac{1}{12} \alpha_2 u^4 + \tfrac{1}{30} \alpha_3 u^6 - \tfrac{1}{8} (\tfrac{1}{7} \alpha_4 - \tfrac{1}{36} \alpha_2^2) u^8 \cdots ,$

$$\vartheta_1 u = \vartheta_1' e^{\frac{1}{6}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} u^2} u \cdot \zeta_1 u ,$$

$$\zeta_1 u = 1 - \tfrac{1}{12} \beta_2 u^4 - \tfrac{1}{30} \beta_3 u^6 - \tfrac{1}{8} (\tfrac{1}{7} \beta_4 - \tfrac{1}{36} \beta_2^2) u^8 \cdots ,$$

Digitized by Google

$$\vartheta_2 u = \vartheta_2 e^{\frac{1}{2}\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}u^2}\,\zeta_2 u\ ,$$

$$\zeta_2 u = 1 - \tfrac{1}{12}\gamma_2 u^4 - \tfrac{1}{30}\gamma_3 u^6 - \tfrac{1}{8}\left(\tfrac{1}{7}\gamma_4 - \tfrac{1}{36}\gamma_2^2\right)u^8 \cdots\ ,$$

$$\vartheta_3 u = \vartheta_3 e^{\frac{1}{2}\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}u^2}\,\zeta_3 u\ ,$$

$$\zeta_3 u = 1 + \tfrac{1}{12}\delta_2 u^4 + \tfrac{1}{30}\delta_3 u^6 + \tfrac{1}{8}\left(\tfrac{1}{7}\delta_4 + \tfrac{1}{36}\delta_2^2\right)u^8 \cdots\ .$$

Die Reihen für ζu, $\zeta_2 u$ und $\zeta_3 u$ sind von JACOBI gefunden worden (CRELLE Band 54, Seite 97), dessen nachgelassene Abhandlung *Darstellung der elliptischen Functionen durch Potenzreihen* BORCHARDT herausgegeben hat. In WEIERSTRASS' *Theorie der Abel'schen Functionen* (Band 52, Seite 344, 357) erscheint die Reihe für $\zeta\left(\frac{u}{\vartheta_3^2}\right)$ unter der Bezeichnung $Al\,(u, \varkappa)$, weil schon ABEL den Satz aufgestellt hatte (CRELLE Bd. IV, S. 244; Bd. VI, S. 76), dass für

$$x = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\varkappa^2 y^2)}}\ ,\quad y = \frac{\varphi x}{fx}\ ,$$

$$\varphi x = x + A_1 x^3 + A_2 x^5 \cdots\ ,\quad fx = 1 + B_2 x^4 + B_3 x^6 \cdots,$$

$$\varphi(u\vartheta_3^2 q) = A e^{a u^2}\vartheta_1(u, q)\ ,\quad f(u\vartheta_3^2 q) = B e^{a u^2}\vartheta(u, q)\ ,$$

$$\varphi(u\vartheta_3^2 q') = A' e^{a' u^2}\vartheta_1(ui, q')\ ,\quad f(u\vartheta_3^2 q') = B' e^{a' u^2}\vartheta(ui, q')\ .$$

BORCHARDT bemerkt a. a. O., dass auch

$$\zeta_2\left(\frac{u}{\vartheta_3^2}\right) = Al\,(ui, \varkappa') \quad \text{und} \quad \zeta_3\left(\frac{u}{\vartheta_3^2}\right) = Al\left(\varkappa' u, \frac{\varkappa i}{\varkappa'}\right)^1)\ .$$

Die Function

$$u\,\zeta_1\left(\frac{u}{\vartheta_3^2}\right) = \sigma u$$

endlich hat Herr WEIERSTRASS in seinen späteren Arbeiten über elliptische Functionen in die Theorie eingeführt und durch das unendliche Doppelproduct definirt:

$$\zeta_1 u = \prod_{p\,p'}\left(1 - \frac{u}{\omega}\right)e^{\frac{u}{\omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{\omega}\right)^2}\ ,$$

1) Die Herren BRIOT und BOUQUET definiren in ihrer *Théorie des fonctions elliptiques*, 2. éd. p. 465, *Al* als »*initiales du mot* alle«!

Digitized by Google

wo $\omega = p\pi + p'hi$, und die Indices pp' alle ganzen Zahlen zwischen $\pm\infty$ durchlaufen, mit einziger Ausnahme von $\omega = 0$.

Die Differenz $\frac{1}{\vartheta_3^4}\{\frac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} - \eta_1\}\left(\frac{u}{\vartheta_3^2}\right)$ bezeichnet WEIERSTRASS durch $pu = -\left(\frac{d}{du}\right)^2 \log \sigma u$.[1])

11.

Für die *elliptischen Integrale zweiter Gattung* von der Form $v = \int \eta\, du$ ergeben sich die einfachen Ausdrücke:

$$\frac{\vartheta' u}{\vartheta u} = \int_0^u \eta\, du = \int_\eta^{\frac{\vartheta''}{\vartheta}} \frac{\eta\, d\eta}{H} ,$$

$$= -\int_u^{\frac{\pi}{2}} \eta\, du = -\int_{\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}}^{\eta} \frac{\eta\, d\eta}{H} ,$$

$$\frac{\vartheta_1' u}{\vartheta_1 u} = -\int_u^{\frac{\pi}{2}} \eta_1\, du = -\int_{\eta_1}^{\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}} \frac{\eta\, d\eta}{H} ,$$

$$\frac{\vartheta_2' u}{\vartheta_2 u} = \int_0^u \eta_2\, du = \int_{\eta_2}^{\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}} \frac{\eta\, d\eta}{H} ,$$

$$\frac{\vartheta_3' u}{\vartheta_3 u} = \int_0^u \eta_3\, du = \int_{\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}}^{\eta_3} \frac{\eta\, d\eta}{H} ,$$

$$= -\int_u^{\frac{\pi}{2}} \eta_3\, du = -\int_{\eta_3}^{\frac{\vartheta''}{\vartheta}} \frac{\eta\, d\eta}{H} ,$$

nebst den Werthen

$$\int_{\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}}^{\frac{\vartheta''}{\vartheta}} \frac{d\eta}{H} = \int_{-\infty}^{\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}} \frac{d\eta}{H} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} du = \tfrac{1}{2}\pi ,$$

$$\int_{\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}}^{\frac{\vartheta''}{\vartheta}} \frac{\eta\, d\eta}{H} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta_3\, du = 0 .$$

---

1) Vergl. die von H. A. SCHWARZ herausgegebenen *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen*, nach K. WEIERSTRASS, 1885, S. 5, 10.

Digitized by Google

Analog erhält man die Gleichungen

$$\frac{1}{i}\frac{\vartheta(ui)}{\vartheta(ui)} = \int_{\frac{\vartheta''}{\vartheta}}^{\bar{\eta}} \frac{\eta\, d\eta}{\bar{H}} ,$$

$$\frac{1}{i}\frac{\vartheta_1'(ui)}{\vartheta_1(ui)} = -1 - \int_{\frac{\vartheta''}{\vartheta}}^{\eta_1} \frac{\eta\, d\eta}{\bar{H}} ,$$

$$\frac{1}{i}\frac{\vartheta_2'(ui)}{\vartheta_2(ui)} = \int_{\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}}^{\eta_2} \frac{\eta\, d\eta}{\bar{H}} = -1 - \int_{\bar{\eta}_2}^{\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}} \frac{\eta\, d\eta}{\bar{H}} ,$$

$$\frac{1}{i}\frac{\vartheta_3'(ui)}{\vartheta_3(ui)} = \int_{\bar{\eta}_3}^{\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}} \frac{\eta\, d\eta}{\bar{H}} = -1 - \int_{\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}}^{\bar{\eta}_3} \frac{\eta\, d\eta}{\bar{H}} ,$$

nebst

$$\int_{\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}}^{\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}} \frac{d\eta}{\bar{H}} = \int_{\frac{\vartheta''}{\vartheta}}^{x} \frac{d\eta}{\bar{H}} = \tfrac{1}{2}h , \qquad \int_{\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}}^{\frac{\vartheta_3'}{\vartheta_3}} \frac{\eta\, d\eta}{\bar{H}} = -1 .$$

Man beweist jetzt durch eine leichte Rechnung für $u' = \frac{uh}{\pi}$ die Gleichungen

$$h^2\eta(u'i, q') + \pi^2\eta_2(u, q') + 2h = 0 ,$$
$$h^2\eta_1(u'i, q') + \pi^2\eta_1(u, q') + 2h = 0 ,$$
$$h^2\eta_2(u'i, q') + \pi^2\eta(u, q') + 2h = 0 ,$$
$$h^2\eta_3(u'i, q') + \pi^2\eta_3(u, q') + 2h = 0 ,$$

woraus durch Integration

$$0 = h^2\int_0^u \eta_3\left(\frac{uhi}{\pi}\right) du + \pi^2\int_0^u \eta_3(u, q')\, du + 2hu$$
$$= \pi^2\left\{\frac{\vartheta_3'(u, q')}{\vartheta_3(u, q')} - \frac{hi}{\pi}\frac{\vartheta_3'(u'i)}{\vartheta_3(u'i)}\right\} + 2hu .$$

Die nochmalige Integration liefert

$$hu^2 + c = \pi^2 \log\frac{\vartheta_3(u'i, q)}{\vartheta_3(u, q')} = \pi^2 \log f(u, h) ,$$

mithin

$$f(u, h) = \sqrt{\frac{\pi}{h}}\, e^{\frac{hu^2}{\pi^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{h}}\, e^{\frac{uu'}{\pi}} ,$$

wie bereits im Art. 5 bemerkt wurde.

Digitized by Google

Hiermit ergeben sich die Transformationsformeln:

$$\vartheta\,(u'i,\,q) = \sqrt{\frac{\pi}{h}}\,e^{\frac{uu'}{\pi}}\,\vartheta_2(u,\,q')\ ,$$

$$\frac{1}{i}\,\vartheta_1(u'i,\,q) = \sqrt{\frac{\pi}{h}}\,e^{\frac{uu'}{\pi}}\,\vartheta_1(u,\,q')\ ,$$

$$\vartheta_2(u'i,\,q) = \sqrt{\frac{\pi}{h}}\,e^{\frac{uu'}{\pi}}\,\vartheta\,(u,\,q')\ ,$$

$$\vartheta_3(u'i,\,q) = \sqrt{\frac{\pi}{h}}\,e^{\frac{uu'}{\pi}}\,\vartheta_3(u,\,q')\ ,$$

nebst

$$\frac{1}{i}\,\frac{\vartheta'(u'i)}{\vartheta(u'i)} + \frac{\pi}{h}\,\frac{\vartheta_2'(u,\,q')}{\vartheta_2(u,\,q')} + \frac{2u}{\pi} = 0\ ,$$

$$\frac{1}{i}\,\frac{\vartheta_1'(u'i)}{\vartheta_1(u'i)} + \frac{\pi}{h}\,\frac{\vartheta_1'(u,\,q')}{\vartheta_1(u,\,q')} + \frac{2u}{\pi} = 0\ ,$$

$$\frac{1}{i}\,\frac{\vartheta_2'(u'i)}{\vartheta_2(u'i)} + \frac{\pi}{h}\,\frac{\vartheta'(u,\,q')}{\vartheta(u,\,q')} + \frac{2u}{\pi} = 0\ ,$$

$$\frac{1}{i}\,\frac{\vartheta_3'(u'i)}{\vartheta_3(u'i)} + \frac{\pi}{h}\,\frac{\vartheta_3'(u,\,q')}{\vartheta_3(u,\,q')} + \frac{2u}{\pi} = 0\ .$$

Von Interesse sind auch die Ausdrücke der Differenzen

$$\eta u - \eta v = \vartheta_2^2\vartheta_3^2\left(\frac{\vartheta_1^2 v}{\vartheta^2 v} - \frac{\vartheta_1^2 u}{\vartheta^2 u}\right) = -\,\vartheta_1'^2\,\frac{\vartheta_1(u+v)\,\vartheta_1(u-v)}{\vartheta^2 u\,\vartheta^2 v}\ ,$$

$$\eta_1 u - \eta_1 v = \vartheta_1'^2\,\frac{\vartheta_1(u+v)\,\vartheta_1(u-v)}{\vartheta_1^2 u\,\vartheta_1^2 v}\ ,$$

$$\eta_2 u - \eta_2 v = -\,\vartheta_1'^2\,\frac{\vartheta_1(u+v)\,\vartheta_1(u-v)}{\vartheta_2^2 u\,\vartheta_2^2 v}\ ,$$

$$\eta_3 u - \eta_3 v = \vartheta_1'^2\,\frac{\vartheta_1(u+v)\,\vartheta_1(u-v)}{\vartheta_3^2 u\,\vartheta_3^2 v}\ ,$$

nebst den entsprechenden Formeln für $\eta_k u - \eta_l v$.

Digitized by Google

12.

Es handelt sich noch um die *elliptischen Integrale dritter Gattung* von der Form $w = \int \frac{du}{\eta - p}$, welche gleichfalls mit Hülfe der Gl. (A.) des Art. 2 abgeleitet werden können.

Differentiirt man dieselbe logarithmisch nach v, so folgt:

$$\frac{\vartheta_1'(u+v)}{\vartheta_1(u+v)} - \frac{\vartheta_1'(u-v)}{\vartheta_1(u-v)} = 2\frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v} + \frac{d}{dv}\log\left(\frac{\vartheta^2 v}{\vartheta_1^2 v} - \frac{\vartheta^2 u}{\vartheta_1^2 u}\right)$$

$$= 2\frac{\vartheta' v}{\vartheta v} + \frac{d}{dv}\log\left(\frac{\vartheta_1^2 u}{\vartheta^2 u} - \frac{\vartheta_1^2 v}{\vartheta^2 v}\right),$$

oder

$$\frac{d}{du}\log\frac{\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_1(u-v)} = 2\frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v} + \frac{d}{dv}\log(\eta_1 u - \eta_1 v)$$

$$= 2\frac{\vartheta' v}{\vartheta v} + \frac{d}{dv}\log(\eta v - \eta u).$$

Aendert man u und v um $\frac{\pi}{2}$, so erhält man analog:

$$\frac{d}{du}\log\frac{\vartheta_1(v+u)}{\vartheta_1(v-u)} = 2\frac{\vartheta_2' v}{\vartheta_2 v} + \frac{d}{dv}\log(\eta_2 u - \eta_2 v)$$

$$= 2\frac{\vartheta_3' v}{\vartheta_3 v} + \frac{d}{dv}\log(\eta_3 v - \eta_3 u).$$

Schreibt man

$$\eta v = p\ ,\quad \eta_1 v = p_1\ ,\quad \eta_2 v = p_2\ ,\quad \eta_3 v = p_3$$

und integrirt nach u zwischen den Grenzen 0 und $u < v$, damit das Integral endlich bleibe, so ergeben sich hieraus die Gleichungen:

$$\log\frac{\vartheta_1(v+u)}{\vartheta_1(v-u)} = 2u\frac{\vartheta' v}{\vartheta v} + \vartheta_1'^3\frac{\vartheta_1(2v)}{\vartheta^4 v}\int_0^u \frac{du}{\eta - p}$$

$$= 2u\frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v} - \vartheta_1'^3\frac{\vartheta_1(2v)}{\vartheta_1^4 v}\int_0^u \frac{du}{\eta_1 - p_1}$$

$$= 2u\frac{\vartheta_2' v}{\vartheta_2 v} + \vartheta_1'^3\frac{\vartheta_1(2u)}{\vartheta_2^4 v}\int_0^u \frac{du}{\eta_2 - p_2}$$

$$= 2u\frac{\vartheta_3' v}{\vartheta_3 v} - \vartheta_1'^3\frac{\vartheta_1(2v)}{\vartheta_3^4 v}\int_0^u \frac{du}{\eta_3 - p_3}.$$

Digitized by Google

Durch Aenderung von v um $\frac{\pi}{2}$ gehen für $u < \frac{1}{2}\pi - v$ die Ausdrücke hervor:

$$\log\frac{\vartheta_2(v+u)}{\vartheta_2(v-u)} = 2u\frac{\vartheta_3' v}{\vartheta_3 v} - \vartheta_1'^3\frac{\vartheta_1(2v)}{\vartheta_3^4 v}\int_0^u \frac{du}{\eta - p_3}$$

$$= 2u\frac{\vartheta_2' v}{\vartheta_2 v} + \vartheta_1'^3\frac{\vartheta_1(2v)}{\vartheta_2^4 v}\int_0^u \frac{du}{\eta_1 - p_2}$$

$$= 2u\frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v} - \vartheta_1'^3\frac{\vartheta_1(2v)}{\vartheta_1^4 v}\int_0^u \frac{du}{\eta_2 - p_1}$$

$$= 2u\frac{\vartheta' v}{\vartheta v} + \vartheta_1'^3\frac{\vartheta_1(2v)}{\vartheta^4 v}\int_0^u \frac{du}{\eta_3 - p} .$$

Ebenso wird durch Substitution von $v + \frac{hi}{2}$ für v:

$$\log\frac{\vartheta_3(v+u)}{\vartheta_3(v-u)} = 2u\frac{\vartheta_2' v}{\vartheta_2 v} + \vartheta_1'^3\frac{\vartheta_1(2v)}{\vartheta_2^4 v}\int_0^u \frac{du}{\eta - p_2}$$

$$= 2u\frac{\vartheta_3' v}{\vartheta_3 v} - \vartheta_1'^3\frac{\vartheta_1(2v)}{\vartheta_3^4 v}\int_0^u \frac{du}{\eta_1 - p_3}$$

$$= 2u\frac{\vartheta' v}{\vartheta v} + \vartheta_1'^3\frac{\vartheta_1(2v)}{\vartheta^4 v}\int_0^u \frac{du}{\eta_2 - p}$$

$$= 2u\frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v} - \vartheta_1'^3\frac{\vartheta_1(2v)}{\vartheta_1^4 v}\int_0^u \frac{du}{\eta_3 - p_1} ,$$

nebst

$$\log\frac{\vartheta(v+u)}{\vartheta(v-u)} = 2u\frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v} - \vartheta_1'^3\frac{\vartheta_1(2v)}{\vartheta_1^4 v}\int_0^u \frac{du}{\eta - p_1}$$

$$= 2u\frac{\vartheta' v}{\vartheta v} + \vartheta_1'^3\frac{\vartheta_1(2u)}{\vartheta^4 v}\int_0^u \frac{du}{\eta_1 - p}$$

$$= 2u\frac{\vartheta_3' v}{\vartheta_3 v} - \vartheta_1'^3\frac{\vartheta_1(2v)}{\vartheta_3^4 v}\int_0^u \frac{du}{\eta_2 - p_3}$$

$$= 2u\frac{\vartheta_2' v}{\vartheta_2 v} + \vartheta_1'^3\frac{\vartheta_1(2v)}{\vartheta_2^4 v}\int_0^u \frac{du}{\eta_3 - p_2} .$$

Digitized by Google

13.

Eine Zusammenstellung der sechszehn verschiedenen Formen der elliptischen Integrale dritter Gattung hat bekanntlich zuerst Jacobi in seiner Abhandlung über die Rotation (*Sur la rotation d'un corps*, in Band 39 des Crelle'schen Journals) gegeben. Er hat zugleich darauf aufmerksam gemacht, dass die von Legendre eingeführte Unterscheidung der *logarithmischen* und *trigonometrischen* Integrale auf dem Umstande beruht, dass der Parameter p auch für imaginäre Werthe des Argumentes v reell wird, so dass, wenn p alle reellen Werthe durchlaufen soll, v sowohl reell als imaginär genommen werden muss.

Setzt man demgemäss für $v = v'i$

$$\bar{p} = \eta(v'i) \ , \quad \bar{p}_1 = \eta_1(v'i) \ , \quad \bar{p}_2 = \eta_2(v'i) \ , \quad \bar{p}_3 = \eta_3(v'i) \ ,$$

so erhält man z. B. die von η_1 abhängigen Integrale:

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\vartheta_1(v'i+u)}{\vartheta_1(v'i-u)} = u\frac{\vartheta_1'(v'i)}{i\vartheta_1(v'i)} - \vartheta_1'^3\frac{\vartheta_1(2v'i)}{2i\vartheta_1^4(v'i)}\int_0^u \frac{du}{\eta_1 - p_1} \ ,$$

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\vartheta_2(v'i+u)}{\vartheta_2(v'i-u)} = u\frac{\vartheta_2'(v'i)}{i\vartheta_2(v'i)} + \vartheta_1'^3\frac{\vartheta_1(2v'i)}{2i\vartheta_2^4(v'i)}\int_0^u \frac{du}{\eta_1 - \bar{p}_2} \ ,$$

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\vartheta_3(v'i+u)}{\vartheta_3(v'i-u)} = u\frac{\vartheta_3'(v'i)}{i\vartheta_3(v'i)} - \vartheta_1'^3\frac{\vartheta_1(2v'i)}{2i\vartheta_3^4(v'i)}\int_0^u \frac{du}{\eta_1 - \bar{p}_3} \ ,$$

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\vartheta(v'i+u)}{\vartheta(v'i-u)} = u\frac{\vartheta'(v'i)}{i\vartheta(v'i)} + \vartheta_1'^3\frac{\vartheta_1(2v'i)}{2i\vartheta^4(v'i)}\int_0^u \frac{du}{\eta_1 - p} \ ,$$

wo die einschränkenden Bedingungen $u < v$ resp. $u < \frac{\Delta}{2} - v$ in den beiden ersten Gleichungen für reelle Werthe von u jetzt wegfallen. Dagegen ist zu bemerken, dass von den (reellen) vieldeutigen Werthen von $\frac{1}{2i}\log = \text{arc tg}$ derjenige zu nehmen ist, der mit u verschwindet, dass aber die beiden Ausdrücke $\frac{1}{2i}\log\frac{\vartheta_1(v'i+u)}{\vartheta_1(v'i-u)}$ und $\frac{1}{2i}\log\frac{\vartheta_2(v'i+u)}{\vartheta_2(v'i-u)}$ die Periode π *nicht* besitzen, weil bei einer *stetigen* Aenderung von u um π nicht der nämliche Werth des Logarithmus wiedererhalten wird [1].

---

[1] Jacobi, a. a. O. S. 329. Vergl. die Abhandlung »zur Reduction elliptischer Integrale«. Suppl. S. 165—166.

Digitized by Google

Da bei der Berechnung reeller elliptischer Integrale auch (conjugirte) complexe Werthe des Parameters p auftreten können, so ist es nöthig, die Integrale dritter Gattung auch für complexe Werthe des Arguments $v + v'i$ zu untersuchen. Schon LEGENDRE hat erkannt, dass hierbei eine Reduction auf die getrennten Argumente v und $v'i$ möglich ist, mit anderen Worten, dass die reellen und imaginären Theile der Integrale mit *complexem* Parameter selbst wieder von solchen mit *reellem* Parameter abhängig gemacht werden können. Die betreffende Reduction findet sich in meiner Abhandlung *über die Reduction elliptischer Integrale in reeller Form* S. 188—97 näher auseinandergesetzt.

Es möge hier noch bemerkt werden, dass die *Vieldeutigkeit* der elliptischen Integrale der drei Gattungen eine wesentlich verschiedene ist. Während die Integrale u der *ersten* Gattung *doppelt* vieldeutig, also die umgekehrten Functionen ηu *doppelt periodisch* sind, erhält man für die Integrale *zweiter* Gattung nur *einfache*, bei denen der *dritten* Gattung dagegen *dreifache* Vieldeutigkeit. In der That ergibt sich sogleich, dass wenn man u und v mit $u + m\pi + nhi$ und resp. $v + m'\pi + n'hi$ vertauscht, wobei η und p ungeändert bleiben, sich die logarithmischen Differentialquotienten $\frac{\Theta' u}{\Theta u} = \lambda(u)$ um $2ni$, die Werthe der Integrale

$$\tfrac{1}{2}\vartheta_1'^3 \frac{\vartheta_1(2v)}{\Theta^4 v}\int \frac{du}{\eta - p}$$

dagegen, mit Rücksicht auf die Vieldeutigkeit des Logarithmus, um

$$l\pi i + m\pi\lambda(v) + ni(2v + h\lambda v)$$

ändern. Drückt man η als Function von λ aus, so wird diese Function periodisch wie $e^{\lambda\pi} + e^{-\lambda\pi}$, folglich ist für $\bar{\lambda} = \frac{1}{i}\lambda(vi)$ $\bar{\eta}$ periodisch wie $\cos\bar{\lambda}\pi$. Es werden hierbei die von Herrn WEIERSTRASS im *Berliner Monatsbericht* vom Februar 1866 gelehrten Entwickelungen mit Vortheil Anwendung finden.

(Fortsetzung folgt.)

Digitized by Google

Martin Krause, *Ueber einige Differentialbeziehungen im Gebiete der doppelt periodischen Functionen dritter Art.*

In einer grossen Reihe wichtiger und interessanter Arbeiten der Herren Hermite, Brioschi, Fuchs, Picard u. A. ist gezeigt worden, dass die doppelt periodischen Functionen zweiter Art einfachen linearen Differentialgleichungen Genüge leisten, die mannigfache Anwendungen zulassen. Es möge in Bezug hierauf vor Allem auf den soeben erschienenen zweiten Theil des Werkes von Herrn Halphén über die elliptischen Functionen verwiesen werden.

Im Gegensatz hierzu sind die doppelt periodischen Functionen dritter Art nach dieser Richtung hin noch sehr wenig untersucht worden.

In der neuesten Zeit ist eine Arbeit von Herrn Appell »Sur des équations linéaires intégrables à l'aide de la fonction $\chi_m(x, y)$« in den »Annales de l'école normale supérieure« erschienen, in welcher gezeigt wird, dass die Functionen $\chi_m(x, y)$, die die Grundfunctionen der doppelt periodischen Functionen dritter Art sind, auch ihrerseits linearen Differentialgleichungen Genüge leisten. Die Form derselben wird wirklich angegeben, ist aber so complicirt, dass sie nicht genügen kann, dass vielmehr versucht werden muss, andere und einfachere Differentialbeziehungen herzustellen.

Ausser der Appell'schen Arbeit ist dem Verfasser nichts weiter über den genannten Gegenstand bekannt geworden.

Es soll nun im Folgenden nachgewiesen werden, dass auch die doppelt periodischen Functionen dritter Art einer unendlichen Fülle einfacher Differentialgleichungen Genüge leisten, die nach angegebenen Methoden construirt werden können.

Digitized by Google

Es sollen hierbei zwei principiell von einander verschiedene Ausgangspunkte gewählt werden. In früheren Arbeiten ist gezeigt worden, dass alle doppelt periodischen Functionen dritter Art, die mehr Null- als Unendlichkeitspunkte besitzen, sich auf die Primfunctionen reduciren lassen:

$$\frac{\vartheta_\alpha(nv + na, n\tau}{\vartheta_\beta(v)}$$

oder, wenn wir mehrfache Wurzeln zulassen, auf:

$$\frac{\vartheta_\alpha(nv + na, n\tau)}{\vartheta_\beta(v)^r}.$$

Es sollen nun im ersten Paragraphen Methoden angegeben werden, mit deren Hülfe für diese Ausdrücke Differentialgleichungen construirt werden können.

Dann aber wollen wir ganz allgemein die Function betrachten:

$$\frac{\vartheta_1(v - a_1) \cdot \vartheta_1(v - a_2) \cdots \vartheta_1(v - a_m)}{\vartheta_0(v)^\mu} e^{\lambda v},$$

bei welcher μ grösser oder kleiner als m sein kann und zeigen, dass dieselbe unendlich vielen Differentialgleichungen Genüge leistet. Es geschieht dieses im wesentlichen durch Reduction auf das Problem, Differentialgleichungen aufzustellen, denen die Functionen zweiter Art Genüge leisten. Dieses letztere Problem soll zunächst im zweiten Paragraphen auf Grund des Transformationsprincipes in einfacher Weise gelöst werden. Es erfolgt dann im dritten Paragraphen die Ableitung von Differentialgleichungen für die Functionen dritter Art.

§ 1.

Aufstellung von Differentialgleichungen, denen die Grössen:

$$\frac{\vartheta_1(nv + na, n\tau)}{\vartheta_0(v, \tau)^\nu} \text{ und } \frac{\vartheta_0(nv + na, n\tau)}{\vartheta_0(v, \tau)^\nu}$$

Genüge leisten.

Wir wollen die beiden Ausdrücke in Betracht ziehen:

$$U = \frac{\vartheta_1(nv + na, n\tau)}{\vartheta_0(v, \tau)^\nu} \text{ und } V = \frac{\vartheta_0(nv + na, n\tau)}{\vartheta_0(v, \tau)^\nu}.$$

Digitized by Google

Aus der Definition derselben folgt:

$$\frac{d^2 \log U}{dv^2} = \frac{d^2 \log \vartheta_1(w, n\tau)}{dv^2} - \frac{d^2 \log \vartheta_0(v, \tau)^\nu}{dv^2}$$

$$= n^2 \frac{d^2 \log \vartheta_1(w, n\tau)}{dw^2} - \nu \frac{d^2 \log \vartheta_0(v, \tau)}{dv^2} ,$$

wenn gesetzt wird:

$$w = nv + na .$$

Genau so wird:

$$\frac{d^2 \log V}{dv^2} = n^2 \frac{d^2 \log \vartheta_0(w, n\tau)}{dw^2} - \nu \frac{d^2 \log \vartheta_0(v, \tau)}{dv^2} .$$

Wir wollen nun die transformirten Thetafunctionen für den Nullwerth des Argumentes bezeichnen durch Θ_α, ihre ersten Differentialquotienten für denselben Werth durch Θ'_α, Θ''_α; dann gelten bekanntlich die Gleichungen:

$$\frac{d^2 \log \vartheta_1(w, n\tau)}{dw^2} =$$

$$\frac{\Theta''_0}{\Theta_0} - \left(\frac{\Theta'_1}{\Theta_0}\right)^2 \frac{\vartheta_0(w, n\tau)^2}{\vartheta_2(w, n\tau)^2} = \frac{\Theta''_0}{\Theta_0} - \left(\frac{\Theta'_1}{\Theta_0}\right)^2 \frac{V^2}{U^2} ,$$

$$\frac{d^2 \log \vartheta_0(w, n\tau)}{dw^2} =$$

$$\frac{\Theta''_0}{\Theta_0} - \left(\frac{\Theta'_1}{\Theta_0}\right)^2 \frac{\vartheta_1(w, n\tau)^2}{\vartheta_0(w, n\tau)^2} = \frac{\Theta''_0}{\Theta_0} - \left(\frac{\Theta'_1}{\Theta_0}\right)^2 \frac{U^2}{V^2} ,$$

$$\frac{d^2 \log \vartheta_0(v, \tau)}{dv^2} = \frac{\vartheta''_0}{\vartheta_0} - \left(\frac{\vartheta'_1}{\vartheta_0}\right)^2 \frac{\vartheta_1(v, \tau)^2}{\vartheta_0(v, \tau)^2} .$$

Setzen wir diese Ausdrücke ein, so erhalten wir:

$$(2) \begin{cases} \frac{d^2 \log U}{dv^2} = n^2 \left[\frac{\Theta''_0}{\Theta_0} - \left(\frac{\Theta'_1}{\Theta_0}\right)^2 \frac{V^2}{U^2}\right] - \nu \left[\frac{\vartheta''_0}{\vartheta_0} - \left(\frac{\vartheta'_1}{\vartheta_0}\right)^2 \frac{\vartheta_1(v, \tau)^2}{\vartheta_0(v, \tau)^2}\right] , \\ \frac{d^2 \log V}{dv^2} = n^2 \left[\frac{\Theta''_0}{\Theta_0} - \left(\frac{\Theta'_1}{\Theta_0}\right)^2 \frac{U^2}{V^2}\right] - \nu \left[\frac{\vartheta''_0}{\vartheta_0} - \left(\frac{\vartheta'_1}{\vartheta_0}\right)^2 \frac{\vartheta_1(v, \tau)^2}{\vartheta_0(v, \tau)^2}\right] . \end{cases}$$

Andererseits ist:

$$(3) \quad \frac{d\frac{U}{V}}{dv} = n \frac{d\frac{U}{V}}{dw} = n \frac{\Theta_0 . \Theta'_1}{\Theta_2 . \Theta_3} \cdot \frac{\vartheta_2(w, n\tau)}{\vartheta_0(w, n\tau)} \cdot \frac{\vartheta_3(w, n\tau)}{\vartheta_0(w, n\tau)} .$$

Digitized by Google

Erheben wir die rechte und linke Seite dieser Gleichung ins Quadrat, so kann die rechte Seite nach bekannten Formeln rational durch U und V ausgedrückt werden.

Aus diesen Gleichungen kann einmal U, ein andermal V eliminirt werden, dann ergeben sich die gesuchten Differentialgleichungen.

Die soeben entwickelte Methode ist der Jacobi'schen analog, die Differentialgleichungen aufzustellen, denen Zähler und Nenner der Transformationsgleichungen Genüge leisten.

§ 2.

Einfache Methode, um Differentialgleichungen aufzustellen, denen doppelt periodische Functionen zweiter Art Genüge leisten.

Es sei eine ganze transcendente Function der Veränderlichen v vorgelegt, welche den folgenden Bedingungsgleichungen Genüge leistet:

$$(1)\qquad \begin{aligned} f(v+1) &= (-1)^r e^{\lambda} f(v), \\ f(v+\tau) &= (-1)^s e^{\lambda\tau + 2a\pi i - n\pi i(2v+\tau)} f(v), \end{aligned}$$

wobei λ und a beliebig gegebene Parameter bedeuten, während r, s, n positive ganze Zahlen bedeuten. Eine solche Function gehört dann bekanntlich zu der Kategorie der doppelt periodischen Functionen dritter Art.

Der Fundamentalsatz nun, auf welchen sich alles Folgende stützt, lautet:

Zwischen je $(n+1)$ solcher Functionen $f(v)$, die denselben Bedingungsgleichungen Genüge leisten, besteht mindestens eine lineare Relation.

Das Verfahren, Differentialgleichungen aufzusuchen, denen die Functionen zweiter Art Genüge leisten, besteht einfach darin, Functionen zu suchen, die den obigen Bedingungsgleichungen Genüge leisten und zwischen einer genügenden Zahl derselben die angedeuteten linearen Relationen herzustellen.

Erstens genügen folgende Functionen den Gleichungen (1):

$$\vartheta_0(v)^{\nu} \cdot \vartheta_1(v)^{\nu_1} \cdot \vartheta_2(v)^{\nu_2} \cdot \vartheta_3(v)^{\nu_3} \cdot \vartheta_1(v-a_1) \cdot \vartheta_1(v-a_2) \cdots \vartheta_1(v-a_m) e^{\lambda v},$$

wenn die Beziehungen stattfinden:

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
&\nu_1 + \nu_2 + m \equiv r \bmod 2 \ , \\
&\nu + \nu_1 + m \equiv s \bmod 2 \ , \\
&a_1 + a_2 + \cdots + a_m = a \ , \\
&\nu + \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + m = n \ .
\end{aligned} \tag{2}
$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus den bekannten elementaren Eigenschaften der Thetafunctionen. Zweitens aber findet dasselbe für die Grössen statt:

$$\vartheta_0(v)^{\nu+m} \cdot \vartheta_1(v)^{\nu_1} \cdot \vartheta_2(v)^{\nu_2} \cdot \vartheta_3(v)^{\nu_3}$$

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{\vartheta_1(v-a_1)\cdot\vartheta_1(v-a_2)\cdot\cdots\vartheta_1(v-a_m)}{\vartheta_0(v)^m} \cdot e^{\lambda v}\right) ,$$

vorausgesetzt, dass ν gleich oder grösser als 1 ist. In der That, ist diese Bedingung erfüllt, so ist der soeben betrachtete Ausdruck eine ganze transcendente Function von v, welche den vorhin aufgestellten Bedingungsgleichungen Genüge leistet.

Dasselbe Resultat gilt für die Grössen:

$$\vartheta_0(v)^{\nu+m} \cdot \vartheta_1(v)^{\nu_1} \cdot \vartheta_2(v)^{\nu_2} \cdot \vartheta_3(v)^{\nu_3} \cdot$$

$$\frac{d^k}{dv^k}\left(\frac{\vartheta_1(v-a_1)\cdot\vartheta_1(v-a_2)\cdots\vartheta_1(v-a_m)}{\vartheta_0(v)^m} e^{\lambda v}\right) ,$$

vorausgesetzt, dass ν grösser oder gleich k ist.

So haben wir eine grosse Reihe von Functionen gefunden, die alle denselben Bedingungsgleichungen Genüge leisten. Nennen wir $n+1$ derselben $f_1(v) \cdots f_{n+1}(v)$, so muss zwischen ihnen eine lineare Relation der Form bestehen:

$$c_1 f_1(v) + c_2 f_2(v) + \cdots + c_{n+1} f_{n+1}(v) = 0 \ .$$

Nehmen wir an, dass die Grössen $a_1, a_2, \cdots a_m, \lambda$ für alle Functionen denselben Werth besitzen, so ist klar, dass alle aufgestellten linearen Relationen im Allgemeinen Differentialgleichungen sein werden, denen die Function:

$$\varphi(v) = \frac{\vartheta_1(v-a_1)\cdot\vartheta_1(v-a_2)\cdots\vartheta_1(v-a_m)}{\vartheta_0(v)^m} e^{\lambda v}$$

Genüge leistet.

Diese Function $\varphi(v)$ ist aber eine doppelt periodische Function *zweiter* Art. Da nun die Zahl der Differentialgleichungen

Digitized by Google

ins Unendliche vermehrt werden kann, *so finden wir auf diesem Wege unendlich viele lineare Differentialgleichungen, denen die doppelt periodische Function zweiter Art $\varphi(v)$ Genüge leistet.*

Die Constanten $c_1, c_2, \cdots c_{n+1}$ können am einfachsten durch Reihenentwickelungen gefunden werden und zwar empfiehlt es sich, hierzu an Stelle der Argumente der Thetafunctionen die Argumente der elliptischen Functionen einzuführen. Hierbei kann über die Constanten $c_1 \cdots c_{n+1}$ noch in gewisser Weise verfügt werden. In der That, die Grössen $a_1 \cdots a_n$ und λ sind völlig willkürliche Grössen. Dieselben können im Allgemeinen so bestimmt werden, dass eine entsprechende Anzahl von Grössen c vorgeschriebene Werthe annimmt. Man kann auf diesem Wege in ganz besonders einfacher Weise die Lamé'sche Differentialgleichung ableiten.

§ 3.

Ableitung von Differentialgleichungen, denen doppelt periodische Functionen dritter Art Genüge leisten.

Betrachten wir jetzt die Function:

$$f(v) = \frac{\vartheta_1(v-a_1)\cdots\vartheta_1(v-a_m)}{\vartheta_0(v)^\mu}\, e^{\lambda v}\,, \tag{1}$$

bei welcher $\mu \leqq m$ sein kann, so ist dieses eine doppelt periodische Function dritter Art, auf welche alle andern derselben Art zurückgeführt werden können.

Brauchen wir die frühere Bezeichnungsweise, so können wir schreiben:

$$f(v) = \varphi(v)\cdot\vartheta_0(v)^{m-\mu}\,.$$

Hieraus folgt, dass aus einer jeden Differentialgleichung, welcher $\varphi(v)$ Genüge leistet, eine Differentialgleichung hergeleitet werden kann, welcher $f(v)$ Genüge leistet. In den Coefficienten derselben tritt die Function $\vartheta_0(v)$ neben ihren Differentialquotienten auf. Diese Differentialquotienten lassen sich aber rational durch $\vartheta_0'(v)$ und die vier Thetafunctionen ausdrücken.

Hieraus folgt der *Lehrsatz*:

Die doppelt periodischen Functionen dritter Art $f(v)$ leisten unendlich vielen linearen Differentialgleichungen Genüge, deren Coefficienten sich rational aus $\vartheta_0'(v)$ und den vier Thetafunctionen $\vartheta_a(v)$ darstellen lassen.

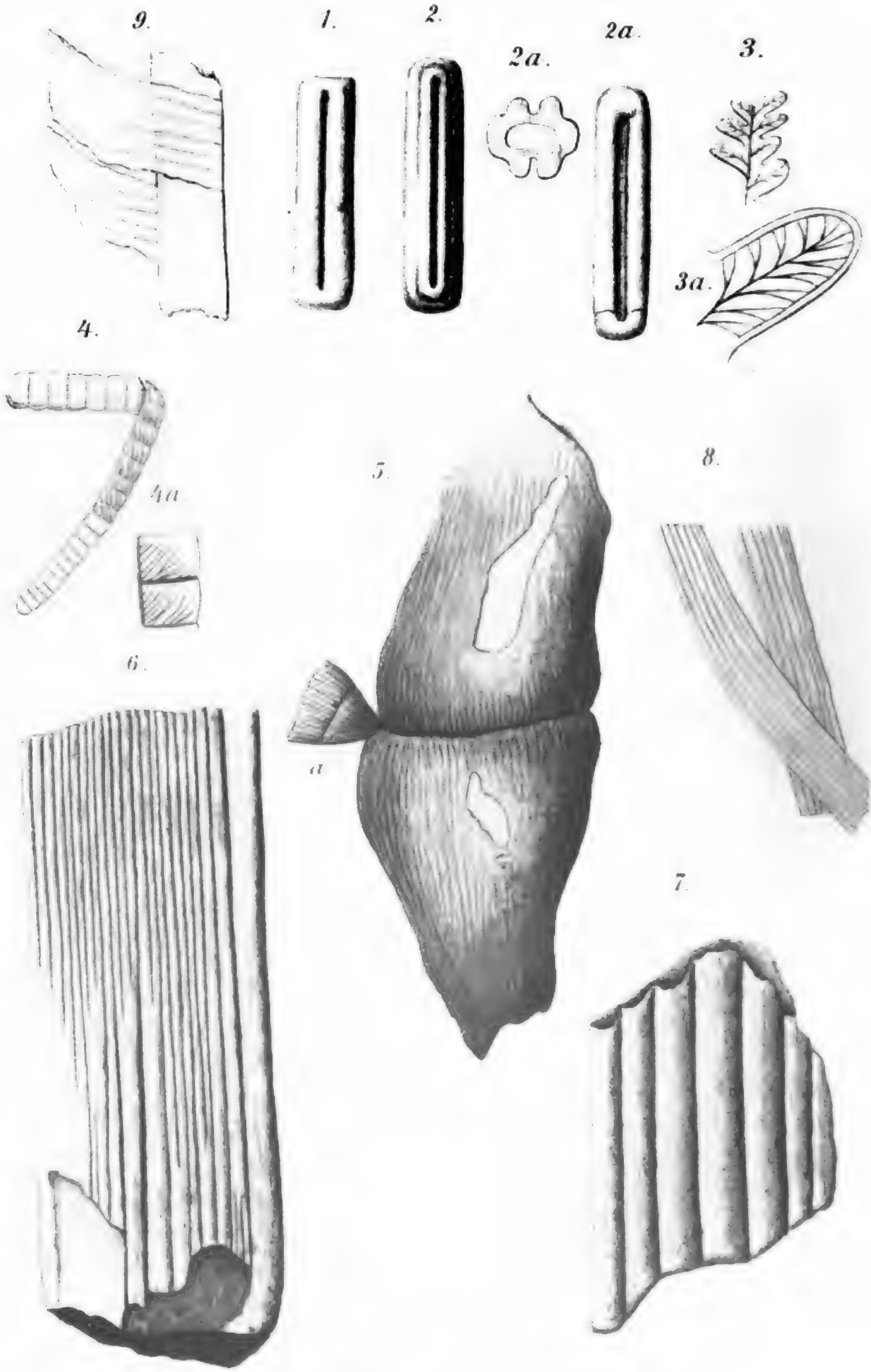
Digitized by Google

Die in diesen Gleichungen auftretenden Constanten können wie vorhin bestimmt werden.

Durch Elimination von $\vartheta_0'(v)$ aus zweien der aufgestellten Gleichungen ergiebt sich der *Lehrsatz*:

Die doppelt periodischen Functionen dritter Art $f(v)$ leisten unendlich vielen Differentialgleichungen Genüge, deren Coefficienten sich rational aus den vier Thetafunctionen $\vartheta_\alpha(v)$ darstellen lassen.

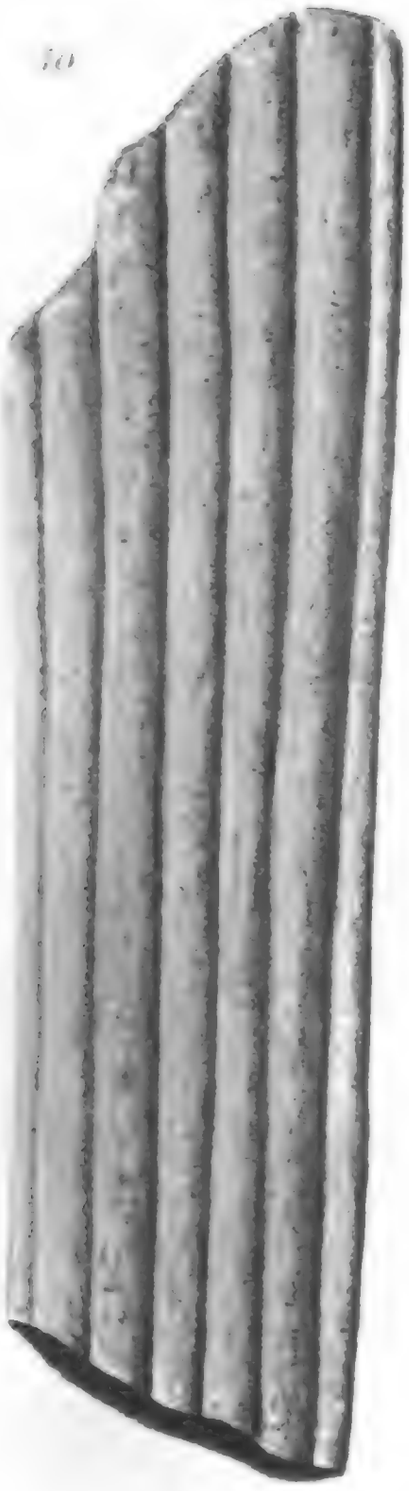
Digitized by Google



Berichte d. K. S. Ges. d. Wiss. math. phys. Cl. 1889.
Zur Abhandlung von A. Schenk.

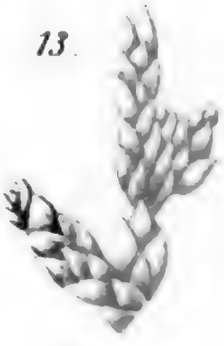
Digitized by Google

10.



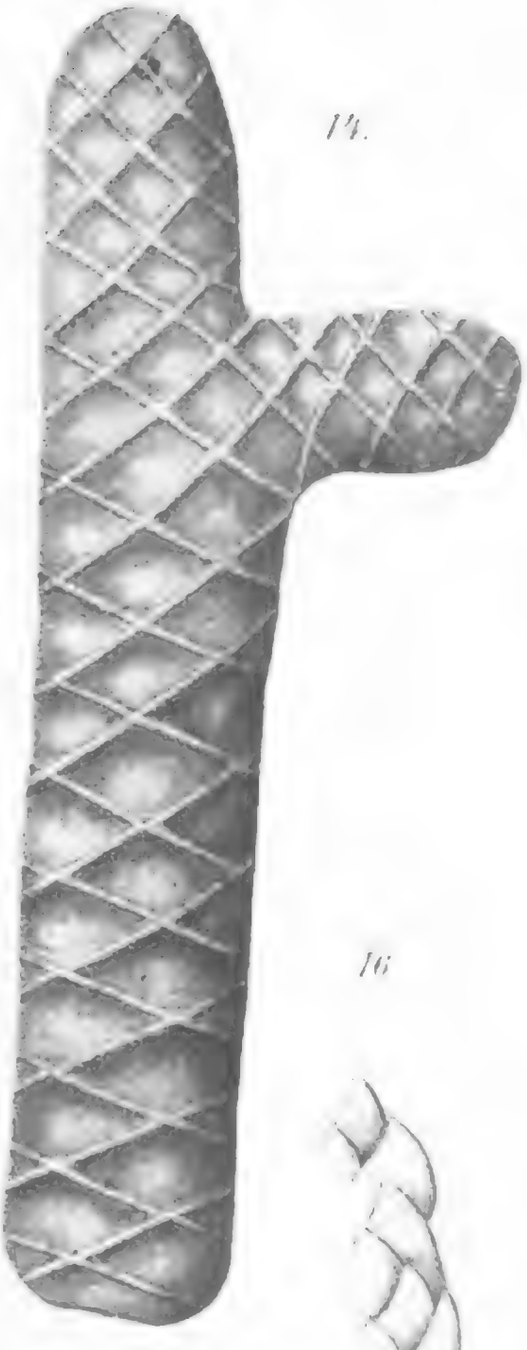
11.

13.



12.

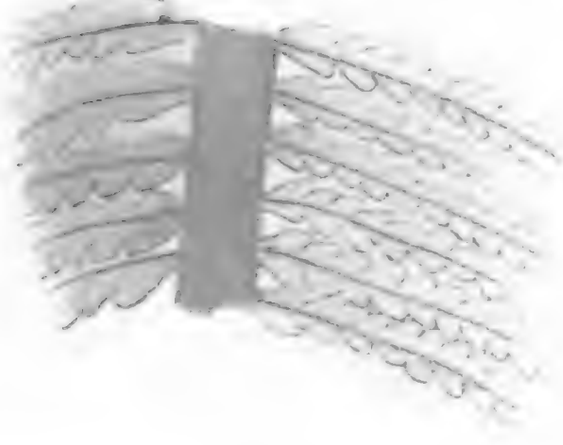
14.



16.

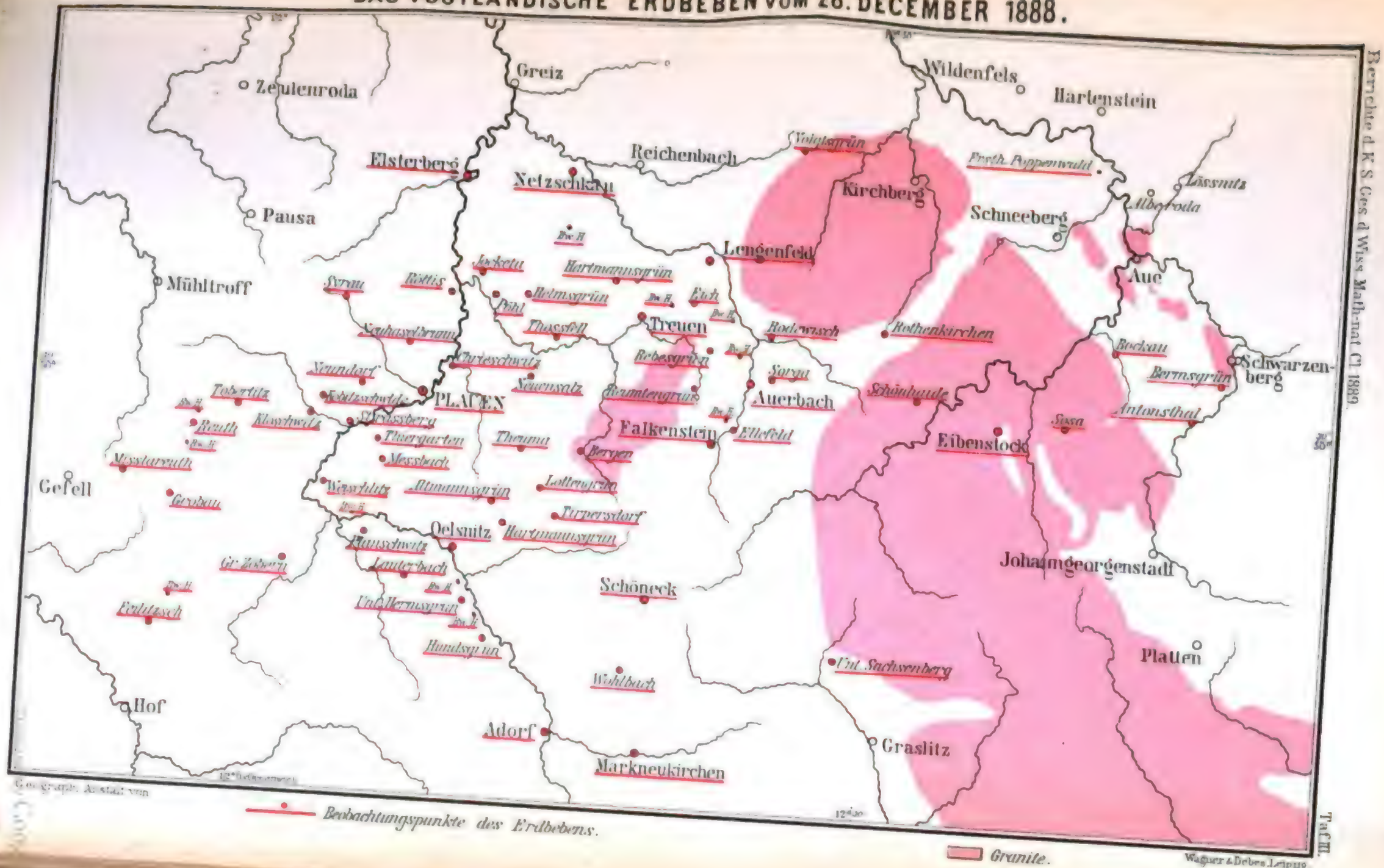
15.

17.



Digitized by Google

DAS VOGTLÄNDISCHE ERDBEBEN VOM 26. DECEMBER 1888.



Berichte d. K. S. Ges. d. Wiss. Math-nat. Cl. 1889.

Taf. III.

Wagner & Debes, Leipzig

SITZUNG VOM 23. APRIL 1889.

E. Drechsel, *Zur Kenntniss der Spaltungsproducte des Caseïns.* Vorläufige Mittheilung.

Vor einigen Jahren schon habe ich in einer Monographie über Eiweisskörper [1]) darauf hingewiesen, dass die gewöhnliche Annahme, nach welcher starke Säuren und Basen in derselben Weise spaltend auf Eiweiss einwirken sollen, durch die bekannten Thatsachen nicht gestützt wird. Ich bemerkte damals: »Beide Processe haben zwar das gemeinsam, dass Ammoniak und Amidosäuren entstehen, aber sie differiren sehr wesentlich in dem Umstande, dass bei der Einwirkung des Baryts Kohlensäure, Oxalsäure und Essigsäure gebildet werden, bei der Einwirkung der Säuren aber nicht.« Die genaueste und vollständigste Untersuchung über die Einwirkung concentrirter Salzsäure auf den Eiweissstoff der Milch, das Caseïn, verdanken wir Hlasiwetz und Habermann, welche beiden Forscher fanden, dass die fragliche Zersetzung glatt und unter Bildung krystallisirbarer Substanzen verläuft, wenn man noch Zinnchlorür zusetzt; dann entstehen Leucin, Tyrosin, Glutaminsäure, Asparaginsäure und Ammoniak, nach deren möglichst vollständiger Abscheidung noch eine geringe Menge einer dicklichen Mutterlauge übrig bleibt, aus welcher keine anderen krystallisirbaren Substanzen mehr erhalten werden konnten. Später ist namentlich von Horbaczewski nachgewiesen worden, dass auch aus anderen Eiweissstoffen mittelst derselben Methode die nämlichen Zersetzungsproducte, manchmal auch noch Schwefelwasserstoff, erhalten werden. Einige Jahre später fand dann Schützenberger, dass bei der Einwirkung von Barythydrat in höherer Temperatur auf Eiweisskörper der verschiedensten Art ebenfalls die genannten Zersetzungsproducte ent-

1) Ladenburg's Handwörterbuch der Chemie III, 548.

Digitized by Google

stehen, ausserdem aber noch andere, theils auch Amidosäuren, theils Kohlensäure, Oxalsäure und Essigsäure. Dieser Unterschied in den Resultaten der Zusetzung gewinnt noch an Gewicht, wenn man bedenkt, dass die Summe der durch Salzsäure erhaltenen Producte bei weitem nicht 100 % des angewandten Eiweisses erreicht, trotzdem, dass die Zersetzung unter Aufnahme von Wasser erfolgt; Horbaczewski erhielt aus Horn 16—18 % salzsaure Glutaminsäure, 3—5 % Tyrosin, 15 % Leucin, sehr wenig Asparaginsäure, und selbst wenn wir annehmen, dass er nur die Hälfte der entstandenen Producte hätte abscheiden und krystallisirt erhalten können, so fehlten immer noch ca. 30 % am Gewichte des angewandten Eiweisses, welche durch Ammoniak nicht annähernd gedeckt werden können, da alle die genannten Substanzen schon Stickstoff enthalten und im Eiweiss selbst nur ca. 16—17 % Stickstoff vorhanden sind. Da nun ferner besonders angestellte Versuche mir mit Sicherheit ergaben, dass Kohlensäure bei der Einwirkung chlorfreier Salzsäure auf Eiweiss *nicht* entsteht, so liessen diese Ueberlegungen nur den Schluss zu, dass bei der Spaltung der Eiweisskörper durch concentrirte Salzsäure noch andere, bisher noch nicht aufgefundene Producte entstehen, welche sich in den Mutterlaugen der genannten Amidokörper finden, und wenigstens zum Theil beim Erhitzen mit Barythydrat Kohlensäure liefern müssen.

Um die Richtigkeit dieser Schlussfolgerung durch das Experiment zu beweisen, wiederholte ich die Versuche von Hlasiwetz und Habermann, wobei ich mir nur insofern eine kleine Aenderung erlaubte, als ich zur Vermeidung des sonst eintretenden Stossens der kochenden Flüssigkeit von Zeit zu Zeit ein kleines Stückchen compacten metallischen Zinns zusetzte, welches eine gelinde Wasserstoffentwicklung veranlasste und so das lästige Stossen völlig verhinderte. Aus der nach dreitägigem Kochen erhaltenen hellbraunen Lösung entfernte ich dann nach den Angaben der genannten Forscher die Amidosäuren, und als ich nun die wieder verdünnte dicke saure Mutterlauge mit Phosphorwolframsäure versetzte, erhielt ich einen ausserordentlich starken Niederschlag, welcher auf die Gegenwart einer Base hindeutete. Derselbe wurde mit 5 % Schwefelsäure auf dem Saugfilter chlorfrei gewaschen, dann durch kochendes Barytwasser zersetzt, aus dem Filtrate der überschüssige Baryt durch Schwefelsäure möglichst genau ausgefällt, das Filtrat mit Salzsäure übersättigt und auf dem

Digitized by Google

Wasserbade eingedampft. Dabei hinterblieb zuletzt ein dicker Syrup, welcher beim Stehen über Schwefelsäure krystallinisch erstarrte.

Zur weiteren Verarbeitung wurde derselbe unter Zusatz einer geringen Menge Wasser auf dem Wasserbade wieder verflüssigt und dann in absolutem Alkohol gelöst; Zusatz von Aether zu dieser Lösung erzeugte einen reichlichen öligen Niederschlag, welcher beim Stehen unter der Flüssigkeit allmählich theilweise krystallisirte. Die Krystalle wurden abgepresst, mit absolutem Alkohol, worin sie sehr schwer löslich sind, mehrmals gewaschen und dann über Schwefelsäure getrocknet. Sie sind das Chlorid einer starken Base; behandelt man ihre wässerige Lösung mit kohlensaurem Silberoxyd, so erhält man eine stark alkalische Flüssigkeit, welche beim Eindunsten einen krystallinischen Rückstand hinterlässt; kocht man die noch silberhaltige Lösung, so entwickelt sich ein schwacher, an Sperma erinnernder Geruch. Das in schönen rothgelben langen Prismen krystallisirende Chloroplatinat wurde über Schwefelsäure getrocknet analysirt [1]):

1) 0,3165 g verloren bei 102°: 0,0238 g = 7,52 % H_2O; der trockne Rückstand gab bei der Verbrennung 0,1484 g CO_2 und 0,0777 g H_2O; das im Schiffchen gebliebene Platin wog 0,0917 g, doch war durch starkes Aufblähen der Substanz ein Theil verloren gegangen.
2) 0,3398 g verloren bei ca. 110°: 0,0281 g = 8,27 % H_2O; 0,3032 g des trocknen Rückstandes gaben 12,4 ccm N bei 14° und 753 mm Hg.
3) 0,3186 g des Chlorides der Base verloren bei 110°: 0,0027 g an Gewicht und lieferten 0,4003 g $AgCl$ + 0,0015 g Ag.

Bezüglich des Chloroplatinates ist zu bemerken, dass dasselbe bei 110° bereits anfängt sich braun zu färben; deshalb wurde das Trocknen nicht fortgesetzt, und die Analyse auf wasserhaltige Substanz berechnet, wodurch man erhält: 12,79 % C; 3,56 % H (28,97 % Pt); für das Chlorid: 31,51 % Cl. Aus diesen Zahlen kann man die Formel $C_7H_{14}N_2O_2PtCl_6 + 4H_2O$ ableiten, welche verlangt: 13,11 % C; 3,44 % H; 4,37 % N; 30,80 % Pt; das Krystallwasser würde 14,24 % ausmachen. Das Chlorid $C_7H_{14}N_2O_2Cl_2$ würde 31,00 % Cl enthalten.

1) Die folgenden Verbrennungen verdanke ich Herrn Dr. Siegfried, dem ich auch an dieser Stelle dafür meinen besten Dank ausspreche.

Digitized by Google

Aus den syrupösen Mutterlaugen des erwähnten Chlorides wurde durch alkoholisches Platinchlorid ein zweites Chloroplatinat erhalten, welches nach dem Umkrystallisiren etwas heller als das erste gefärbt und auch hygroskopischer war. Es wurde, da es sich bei längerem Erhitzen zu zersetzen schien, nur über Schwefelsäure getrocknet und in diesem Zustande analysirt:

1) 0,2473 g gaben bei der Verbrennung: 0,1473 g CO_2, 0,0811 g H_2O und 0,0769 g *Pt* (Verlust).
2) 0,2060 g gaben bei der Verbrennung: 0,1219 g CO_2, 0,0697 g H_2O und 0,0672 g *Pt* (Spur verloren).
3) 0,3625 g gaben 6,4 ccm *N* bei 12°,5 und 755 mm *Hg*.
4) 0,2430 g im bedeckten Platintiegel sehr vorichtig zersetzt (wobei starkes Aufblähen stattfand) und geglüht hinterliessen 0,0798 g *Pt*.

Aus diesen Zahlen lässt sich die Formel $C_8H_{16}N_2O_2Cl_2 . PtCl_4 + H_2O$ ableiten:

		Ber.:	I.	II.	III.	IV.
C_8 =	96	16,02	16,24	16,13	—	—
H_{18} =	18	3,00	3,64	3,76	—	—
N_2 =	28	4,67	—	—	5,32	—
O_3 =	48	8,01	—	—	—	—
Pt =	197,2	33,06	(31,1)	32,62	—	32,84
Cl_6 =	212,2	35,24	—	—	—	—
	599,4	100,00				

Die Basis dieses Salzes ist demnach mit der des ersten Chloroplatinates nicht identisch, sondern anscheinend homolog; selbstverständlich werden weitere Analysen mit neuem Material die Richtigkeit der aufgestellten Formeln zu beweisen haben. Ausserdem ist noch wenigstens eine andere Basis vorhanden, von welcher jedoch bisher krystallinische Verbindungen nicht erhalten werden konnten.

Ueber das weitere Verhalten dieser Basen kann ich vorläufig noch nicht viel berichten; nur eine Beobachtung sei mitgetheilt, weil sie ein besonderes Interesse beansprucht. Man kann nämlich das rohe Gemenge der Chloride mit concentrirter Salzsäure auf 150° erhitzen, ohne dass es anscheinend Zersetzung erlitte; im Rohr zeigt sich kein Druck nach dem Erkalten. Erhitzt man es aber, oder auch das beschriebene krystallisirte Chlorid, mit concentrirtem Barytwasser auf 120°—130°, so erfolgt Zersetzung unter

Digitized by Google

Abscheidung von Krystallen von kohlensaurem Baryt. Dieses Verhalten giebt also den gewünschten Schlüssel für das Verständniss der Schützenberger'schen Versuche und ihres abweichenden Ergebnisses von dem der Versuche von Hlasiwetz und Habermann; *diese Basen sind die oder eine Quelle der Kohlensäure, welche* Schützenberger *fand.*

Die vorstehend beschriebenen Versuche eröffnen ein neues Feld für die Chemie der Eiweisskörper, dessen Bebauung reichlichen Lohn für die aufgewandte Arbeit erwarten lässt. Geben alle Eiweisskörper bei ihrer Zersetzung mit concentrirter Salzsäure solche Basen? und stets dieselbe oder verschiedene? Verhalten sich thierische und pflanzliche Eiweissarten gleich oder nicht? In welchen Beziehungen stehen diese Basen zu den Ptomaïnen? Diese und ähnliche Fragen erheben sich in Menge, und Versuche zu ihrer Beantwortung habe ich bereits unternommen; die erste ist allem Anschein nach namentlich bezüglich der Gelatine in bejahendem Sinne zu beantworten. Weiter wird aber noch zu untersuchen sein, ob nicht ausser diesen Basen noch andere bisher unbekannte Zersetzungsproducte in der Mutterlauge von der Phosphorwolframsäurefällung stecken, und auch diesem Punkte werde ich meine Aufmerksamkeit widmen. Ueberhaupt werde ich diese Versuche fortsetzen und vervollständigen; Zweck dieser vorläufigen Mittheilung war nur, mir die Priorität und die ungestörte Weiterbearbeitung des erschlossenen Gebietes zu sichern.

Leipzig, Ostern 1889.

Digitized by Google

SITZUNG VOM 6. MAI 1889.

A. Mayer, *Zur Theorie des gewöhnlichen Maximums und Minimums.* Mit einer Figur.

In der Theorie des Maximums und Minimums einer Function von n Variabeln kennen wir im Falle $n > 2$ bis jetzt nur einen einzigen allgemeinen Satz, der die Existenz eines Maximums oder Minimums zweifellos nachzuweisen gestattet. Dieser längst bekannte Satz, der aber erst von Herrn GIUSEPPE PEANO streng bewiesen worden ist und von dem später LUDWIG SCHEEFFER einen kürzeren Beweis gegeben hat[1]), lässt sich so aussprechen:

I. *Es sei $F(x_1 \dots x_n)$ eine gegebene Function von n unabhängigen Variabeln $x_1 \dots x_n$, die sich in der Umgebung der Stelle $a_1 \dots a_n$ regulär verhält*[2]). *Ist dann in der Entwicklung der Differenz:*

$$F(a_1 + \alpha\delta x_1, \cdots, a_n + \alpha\delta x_n) - F(a_1 \cdots a_n)$$

nach steigenden ganzen positiven Potenzen von α das Anfangsglied eine definite Function der willkürlichen Variabeln $\delta x_1 \dots \delta x_n$, so erreicht, jenachdem dasselbe negativ oder positiv ist, die Function $F(x_1 \dots x_n)$ an der Stelle $a_1 \dots a_n$ sicher ein Maximum oder ein Minimum.

Was man gewöhnlich noch hinzufügt, dass nämlich die Function F an der Stelle $a_1 \dots a_n$ keinenfalls einen grössten oder kleinsten Werth besitzt, so oft jenes Anfangsglied indefinit ausfällt, habe ich, obgleich auch dieses im Folgenden gebraucht

---

1) *Vergl.* A. GENOCCHI, *Calcolo differenziale pubblicato con aggiunte dal* G. PEANO, *Torino* 1884, p. 197 und L. SCHEEFFER, *Theorie der Maxima und Minima einer Function von zwei Variabeln*, diese Berichte 1886, p. 120.

2) Es versteht sich von selbst, dass es sich hier und in allem Folgenden immer nur um reelle Functionen und um reelle Werthe ihrer Variabeln handelt.

Digitized by Google

wird, doch in den Satz selbst deshalb nicht mit aufgenommen, weil es einerseits unmittelbar evident, und bekanntlich andererseits durchaus nicht das einzige sichere Kriterium für das Nichtstattfinden eines Maximums oder Minimums an der betrachteten Stelle ist.

Von der Theorie des absoluten Maximums und Minimums aus kann man in bekannter Weise zu der des relativen Maximums und Minimums gelangen, bei welchem die Variabeln der vorgelegten Function nicht mehr unabhängig, sondern gegebenen Bedingungsgleichungen unterworfen sind.

Aus dieser Uebergangsart erkennt man unmittelbar, wie sich der angegebene Satz für das relative Maximum und Minimum gestaltet. Trotzdem schien es mir zweckmässig, diese Uebertragung in § 1 ausführlich zu begründen, um damit zugleich dasjenige aus der Theorie des relativen Maximums und Minimums selbst zu gewinnen, was für das Weitere erforderlich ist. Ich wende den erhaltenen Satz sodann auf einen gewissen, besonderen Fall des Maximums oder Minimums bei vorgeschriebenen *Bedingungsungleichungen* an, einen Fall, der dadurch ausgezeichnet ist, dass bei ihm die Existenz oder Nichtexistenz des Maximums oder Minimums lediglich von der Beschaffenheit der dritten Variation abhängt. Es verschwinden nämlich alle Variationen bis zur sechsten, diese aber reducirt sich factisch auf die dritte[1]. Dieser Fall erscheint allerdings an und für sich betrachtet zunächst nur als ein äusserst künstlicher Ausnahmefall. Indessen stellt er sich doch gar nicht so selten bei gewissen geometrischen Aufgaben der Variationsrechnung ein. Namentlich zeigen von den Problemen, welche Steiner in seiner ersten Abhandlung »*Ueber Maximum und Minimum bei den Figuren in der Ebene, auf der Kugelfläche und im Raume überhaupt*« geometrisch gelöst hat, fast alle diejenigen, in denen es sich um eine Figur von festem Umfange und grösster Fläche zwischen

1) Solche Verschiebungen zwischen höheren und niederen Variationen können bei den Problemen des Max. und Min. unter vorgeschriebenen Bedingungsungleichungen allerdings auch noch in anderer Weise auftreten. Sie hängen dann aber wesentlich damit zusammen, dass im Falle von Bedingungsungleichungen das Max. oder Min. im Allgemeinen sich bereits in der ersten Variation, nämlich im Vorzeichen der Multiplicatoren kennzeichnet. Die im Text behandelten Probleme dagegen haben gerade das Eigenthümliche, dass diese Multiplicatoren sämmtlich Null werden.

Digitized by Google

gegebenen Begrenzungen handelt, wenn man sie analytisch angreift, die angegebene oder wenigstens ähnliche Eigenthümlichkeiten. Eine dieser Aufgaben wird im letzten § ausführlich als Beispiel behandelt.

§ 1.

Um aus dem obigen Satze das entsprechende Theorem für das relative Maximum und Minimum, und zwar gleich in einer symmetrischen Form abzuleiten, bemerke ich zunächst, dass Satz I ganz unverändert bleibt, wenn man in der Differenz

$$F(a_1 + \alpha\delta x_1, \cdots, a_n + \alpha\delta x_n) - F(a_1 \cdots a_n)$$

jedes $\alpha\delta x_i$ durch eine beliebig weit fortgeführte Potenzreihe:

$$\alpha\delta x_i + \frac{\alpha^2}{2}\delta^2 x_i + \frac{\alpha^3}{2.3}\delta^3 x_i + \cdots$$

ersetzt, weil sich ja hierdurch das Anfangsglied der Entwicklung dieser Differenz gar nicht ändert.

Verstehen wir daher allgemein unter der p^{ten} *Variation* einer gegebenen Function $\varphi(x_1 \ldots x_q)$ für die Werthe

$$x_1 = a_1, \cdots, x_q = a_q$$

den Coefficienten von $\frac{\alpha^p}{1.2 \ldots p}$ in der MACLAURIN'schen Entwicklung derjenigen Function von α, die aus der gegebenen durch die q Substitutionen:

$$x_i = a_i + \alpha\delta x_i + \frac{\alpha^2}{2}\delta^2 x_i + \frac{\alpha^3}{2.3}\delta^3 x_i + \cdots$$

entsteht, oder also den Werth, den der p^{te} Differentialquotient dieser Function für $\alpha = 0$ erhält, und bezeichnen diese p^{te} Variation durch

$$\delta^p\varphi(a_1 \cdots a_q) \quad , \quad \text{oder kurz} \quad \delta^p\varphi \quad ,$$

so können wir Satz I auch so wiedergeben:

Ia. *Wenn für die Werthe*

$$x_1 = a_1, \cdots, x_n = a_n$$

die erste der Variationen

$$\delta F \ , \quad \delta^2 F \ , \quad \delta^3 F \ , \quad \cdots \ ,$$

Digitized by Google

welche nicht identisch verschwindet, für alle reellen, nicht gleichzeitig verschwindenden Werthe von $\delta x_1 \dots \delta x_n$ *verschieden von Null, also beständig negativ oder beständig positiv bleibt, so ist sicher* $F(a_1 \dots a_n)$ *ein Maximum oder ein Minimum der Function* $F(x_1 \dots x_n)$.

Dies vorausgeschickt seien nun zwischen den $n+r$ Variabeln $x_1 \dots x_n\ x_{n+1} \dots x_{n+r}$ gegeben r unabhängige Gleichungen:

$$\varphi_\varrho(x_1 \cdots x_n\ x_{n+1} \cdots x_{n+r}) = 0\ , \qquad \varrho = 1\ , \cdots r\ , \tag{1.}$$

und es sei:

$$a_1 \cdots a_n\ a_{n+1} \cdots a_{n+r}$$

irgend ein solches, diesen Gleichungen genügendes Werthsystem der Variabeln, in dessen Umgebung die Functionen $\varphi_1 \dots \varphi_r$ sich regulär verhalten, und für welches überdies die Determinante

$$\Sigma' \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{n+1}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{n+2}} \cdots \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_{n+r}} \tag{2.}$$

nicht verschwindet.

Die Gleichungen (1.) bestimmen dann $x_{n+1} \dots x_{n+r}$ als Functionen von $x_1 \dots x_n$ und besitzen im Besonderen solche Auflösungen:

$$x_\mu = X_\mu(x_1 \cdots x_n)\ , \quad \mu = n+1\ , \quad \cdots n+r\ , \tag{3.}$$

welche für $x_1 = a_1\ , \dots,\ x_n = a_n$ die Werthe a_μ erhalten.

Weiter kann man die Werthe:

$$c_\mu = X_\mu(b_1 \cdots b_n)\ ,$$

welche diese Auflösungen annehmen, wenn man für $\lambda = 1, \dots n$ darin:

$$x_\lambda = b_\lambda \equiv a_\lambda + \alpha\,\delta x_\lambda + \frac{\alpha^2}{2}\,\delta^2 x_\lambda + \frac{\alpha^3}{2.3}\,\delta^3 x_\lambda + \cdots \tag{4.}$$

setzt, bei hinreichend kleinem α in der Form von Potenzreihen:

$$c_\mu = a_\mu + \alpha\,\delta x_\mu + \frac{\alpha^2}{2}\,\delta^2 x_\mu + \frac{\alpha^3}{2.3}\,\delta^3 x_\mu + \cdots \tag{5.}$$

berechnen. Denn die Forderung, dass die Ausdrücke:

$$\varphi_\varrho(b_1 \cdots b_n\ c_{n+1} \cdots c_{n+r})$$

Digitized by Google

für jedes hinreichend kleine α verschwinden sollen, verlangt, dass in ihren Entwickelungen nach Potenzen von α die Entwickelungscoefficienten einzeln gleich Null seien. Sie liefert daher, wenn wir durch

$$\varphi_\varrho' a_h\,,\quad \varphi_\varrho'' a_h a_i\,,\quad \varphi_\varrho''' a_h a_i a_k\,,\quad \cdots$$

die Werthe der partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial x_h}\,,\quad \frac{\partial^2 \varphi_\varrho}{\partial x_h \partial x_i}\,,\quad \frac{\partial^3 \varphi_\varrho}{\partial x_h \partial x_i \partial x_k}\,,\quad \cdots$$

für

$$x_1 = a_1\,,\quad \cdots\,,\quad x_{n+r} = a_{n+r}$$

bezeichnen, successive die Gleichungen:

$$(6.)\quad \begin{cases} \delta\varphi_\varrho \equiv \sum_1^{n+r}{}_h\, \varphi_\varrho' a_h \delta x_h = 0 \\ \delta^2\varphi_\varrho \equiv \sum_1^{n+r}{}_h\, \varphi_\varrho' a_h \delta^2 x_h + \sum_1^{n+r}{}_h \sum_1^{n+r}{}_i\, \varphi_\varrho'' a_h a_i \delta x_h \delta x_i = 0 \\ \delta^3\varphi_\varrho \equiv \sum_1^{n+r}{}_h\, \varphi_\varrho' a_h \delta^3 x_h + 3\sum_1^{n+r}{}_h \sum_1^{n+r}{}_i\, \varphi_\varrho'' a_h a_i \delta^2 x_h \delta x_i \\ \qquad + \sum_1^{n+r}{}_h \sum_1^{n+r}{}_i \sum_1^{n+r}{}_k\, \varphi_\varrho''' a_h a_i a_k \delta x_h \delta x_i \delta x_k = 0 \end{cases}$$

u. s. w.

Nach der über die Determinante (2.) gemachten Voraussetzung bestimmen aber von diesen Gleichungen die r ersten

$$\delta x_{n+1}\,,\quad \cdots\,,\quad \delta x_{n+r}\,,$$

hierauf die r zweiten

$$\delta^2 x_{n+1}\,,\quad \cdots\,,\quad \delta^2 x_{n+r}\,,$$

die r dritten:

$$\delta^3 x_{n+1}\,,\quad \cdots\,,\quad \delta^3 x_{n+r}$$

u. s. w. Man kann also in der That die Coefficienten der Entwickelungen (5.), soweit als man will, berechnen, und es ist auch bekannt, dass die so erhaltenen Potenzreihen bei hinreichend kleinem α wirklich den Forderungen

$$\varphi_\varrho(b_1 \cdots b_n\, c_{n+1} \cdots c_{n+r}) = 0$$

genügen.

Digitized by Google

Ist daher:

$$f(x_1 \cdots x_n\, x_{n+1} \cdots x_{n+r})$$

irgend eine gegebene Function, die sich in der Umgebung der betrachteten Stelle $a_1 \ldots a_{n+r}$ ebenfalls regulär verhält, und bezeichnet man den Werth, den diese Function durch Substitution der Auflösungen (3.) annimmt, mit:

$$F(x_1 \cdots x_n) \equiv f(x_1 \cdots x_n\, X_{n+1} \cdots X_{n+r}) \ ,$$

so wird für die auf die obige Art berechneten Potenzreihen (5.) zugleich auch:

$$F(b_1 \cdots b_n) \equiv f(b_1 \cdots b_n\, c_{n+1} \cdots c_{n+r}) \ ,$$

und es müssen demnach in den Entwickelungen der rechten und der linken Seite die nämlichen Potenzen von α gleiche Coefficienten besitzen. Für die aus den Gleichungen (6.) berechneten Werthe der δx_μ, $\delta^2 x_\mu$, $\delta^3 x_\mu$, ... hat man daher identisch:

$$\delta F = \delta f \ , \quad \delta^2 F = \delta^2 f \ , \quad \delta^3 F = \delta^3 f \ , \quad \cdots \ ,$$

woraus, weil die erste der Variationen δF, $\delta^2 F$, $\delta^3 F$, ..., welche nicht identisch verschwindet, stets eine blosse Function von $\delta x_1 \ldots \delta x_n$ ist, zugleich erhellt, dass auch die erste der Variationen von f, welche in Folge der Bedingungsgleichungen (6.) nicht identisch Null wird, durch diese Bedingungen frei werden muss von *allen* höheren Variationen $\delta^2 x_h$, $\delta^3 x_h$, ... der $n + r$ Variabeln x_h.

Nach der Definition (7.) der Function F ist aber die Frage, ob diese Function an der Stelle $a_1 \ldots a_n$ ein absolutes Maximum oder Minimum erreicht, identisch mit der, ob $f(a_1 \ldots a_n\, a_{n+1} \ldots a_{n+r})$ ein grösster oder kleinster unter den Werthen ist, welche die Function f bei den vorgeschriebenen Bedingungsgleichungen (1.) anzunehmen vermag. Aus Ia ergiebt sich daher sofort die folgende Ausdehnung des Satzes I auf das relative Maximum und Minimum:

II. *Es seien f, φ_1, ..., φ_r gegebene Functionen der $n + r$ Variabeln $x_1 \ldots x_{n+r}$, und:*

$$a_1 \cdots a_{n+r}$$

irgend ein solches, den Gleichungen

$$\varphi_1 = 0 \ , \quad \cdots \quad \varphi_r = 0$$

Digitized by Google

genügendes Werthsystem dieser Variabeln, in dessen Umgebung die Functionen $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_r$ sich regulär verhalten, und für welches überdies nicht jede der Determinanten:

$$(\alpha.) \qquad \Sigma \pm \frac{\delta \varphi_1}{\delta x_\alpha} \frac{\delta \varphi_2}{\delta x_\beta} \cdots \frac{\delta \varphi_r}{\delta x_\varrho}$$

verschwindet. Wenn dann für die Werthe $x_1 = a_1, \ldots, x_{n+r} = a_{n+r}$ die erste der Variationen

$$\delta f, \quad \delta^2 f, \quad \delta^3 f, \quad \cdots,$$

welche in Folge der Bedingungsgleichungen

$$(\beta.) \qquad \delta \varphi_\varrho = 0, \quad \delta^2 \varphi_\varrho = 0, \quad \delta^3 \varphi_\varrho = 0, \quad \cdots$$
$$\varrho = 1, \cdots r,$$

nicht identisch verschwindet, für alle solchen reellen Werthsysteme der Variabeln:

$$\delta x_\varkappa, \quad \delta^2 x_\varkappa, \quad \delta^3 x_\varkappa, \quad \cdots$$
$$\varkappa = 1, \quad \cdots, \quad n+r,$$

welche diesen Bedingungsgleichungen genügen und in denen nicht alle $\delta x_\varkappa = 0$ sind, verschieden von Null, also beständig negativ, oder beständig positiv bleibt, so ist sicher $f(a_1 \ldots a_{n+r})$ ein grösster oder ein kleinster unter allen den Werthen, welche die Function $f(x_1 \ldots x_{n+r})$ mit Rücksicht auf die vorgeschriebenen Bedingungen

$$\varphi_1 = 0, \quad \cdots, \quad \varphi_r = 0$$

anzunehmen vermag.

Dagegen ist $f(a_1 \ldots a_{n+r})$ sicher weder ein grösster, noch ein kleinster von diesen Werthen, so oft für die Werthe $x_\varkappa = a_\varkappa$ die erste der Variationen $\delta f, \delta^2 f, \ldots$, welche vermöge der Bedingungen

$$\delta \varphi_\varrho = 0, \quad \delta^2 \varphi_\varrho = 0, \quad \cdots$$

nicht identisch verschwindet, unter Erfüllung dieser Bedingungen zum Zeichenwechsel gebracht werden kann, was im Besondern immer dann der Fall ist, wenn diese erste nicht verschwindende Variation von einer ungeraden Ordnung ist.

Die erste nothwendige Bedingung dafür, dass bei den vorgeschriebenen Bedingungsgleichungen (1.) die Function f an einer Stelle $x_1 \ldots x_{n+r}$, welche die Voraussetzungen des Satzes II

Digitized by Google

erfüllt, ein relatives Maximum oder Minimum habe, ist hiernach die, dass die Gleichung $\delta f = 0$ eine blosse Folge der r Gleichungen $\delta\varphi_\varrho = 0$ werde.

Setzt man:

$$\Phi \equiv f + \sum_1^r{}_\varrho \, \lambda_\varrho \varphi_\varrho \ ,$$

so führt diese Forderung bekanntlich auf die $n + r$ Gleichungen:

$$\frac{\delta \Phi}{\delta x_\varkappa} \equiv \frac{\delta f}{\delta x_\varkappa} + \sum_1^r{}_\varrho \, \lambda_\varrho \frac{\delta \varphi_\varrho}{\delta x_\varkappa} = 0 \ .$$

Aus diesen und den r gegebenen Bedingungsgleichungen (1.) sind die $n + r$ Unbekannten $x_1 \ldots x_{n+r}\ \lambda_1 \ldots \lambda_r$ zu bestimmen, und für jedes System Auflösungen, welches nicht alle Determinanten der Form (α.) zum Verschwinden bringt, oder, was dasselbe besagt, nach dessen Substitution die r Gleichungen:

$$\delta\varphi_\varrho = \sum_1^{n+r}{}_h \frac{\delta \varphi_\varrho}{\delta x_h} \delta x_h = 0$$

noch von einander unabhängig bleiben, erhalten in Folge der Bedingungsgleichungen

$$\delta^2 \varphi_\varrho = 0 \ , \quad \delta^3 \varphi_\varrho = 0 \ , \quad \ldots$$

die höheren Variationen der Function f die Formen:

$$\delta^2 f = \sum_1^{n+r}{}_h \sum_i \frac{\delta^2 \Phi}{\delta x_h \, \delta x_i} \delta x_h \, \delta x_i \ ,$$

$$\delta^3 f = \sum_1^{n+r}{}_h \sum_i \frac{\delta^2 \Phi}{\delta x_h \, \delta x_i} \delta^2 x_h \, \delta x_i + \sum_1^{n+r}{}_h \sum_i \sum_k \frac{\delta^3 \Phi}{\delta x_h \, \delta x_i \, \delta x_k} \delta x_h \, \delta x_i \, \delta x_k \ ,$$

u. s. w.

wobei zu wiederholen ist, dass stets die erste dieser Variationen, welche in Folge der Bedingungsgleichungen (β.) nicht identisch verschwindet, durch diese Gleichungen sich auf eine blosse Function der δx reducirt.

Digitized by Google

§ 2.

Wenden wir nunmehr die gewonnenen Resultate auf den folgenden besondern Fall an.

In dem Problem:

A., *die absoluten Maxima und Minima der gegebenen Function* $F(x_1 \dots x_n)$ *zu finden,*

lassen die n Gleichungen:

$$\frac{\partial F}{\partial x_h} = 0 \ , \quad h = 1, \cdots n \tag{1.}$$

ein solches System Auflösungen

$$x_h = a_h \tag{2.}$$

zu, für welches die zweite Variation der Function F, nicht aber zugleich auch die dritte identisch verschwindet, und folglich kein absolutes Maximum oder Minimum der Function F eintritt. Zugleich aber sind n unabhängige Functionen $\psi_1 \dots \psi_n$ der Variabeln $x_1 \dots x_n$ gegeben, welche durch die Substitutionen (2.) gleichfalls verschwinden, während die Determinante

$$\sum \pm \psi_1' a_1 \, \psi_2' a_2 \cdots \psi_n' a_n \neq 0 \tag{3.}$$

ist. Es fragt sich, wann die angenommenen Lösungen (1.) alsdann ein wirkliches Maximum oder Minimum in dem Problem erzeugen:

B. *Unter allen Werthen, welche die Function* F *annehmen kann, während ihre Variabeln den vorgeschriebenen Bedingungen*

$$\psi_1 \geqq 0 \ , \quad \cdots \ , \quad \psi_n \geqq 0$$

unterliegen, die grössten und kleinsten zu finden.

Selbstverständlich wird angenommen, dass die Functionen $F, \psi_1, \dots, \psi_n$ in der Umgebung der Stelle $a_1 \dots a_n$ sich wiederum regulär verhalten.

Um das Problem *B.* auf diejenige Form zu bringen, auf welche sich Satz II bezieht, braucht man nur die gegebenen n Ungleichungen zu ersetzen durch die n Bedingungsgleichungen:

$$\psi_\varkappa - u_\varkappa^2 = 0 \ , \quad \varkappa = 1, \cdots n \ , \tag{4.}$$

welche n neue Variabeln $u_1 \dots u_n$ einführen. Dann verwandelt sich das Problem B. in das folgende:

Digitized by Google

C. *Die $2n$ Variabeln $x_1 \dots x_n\ u_1 \dots u_n$, welche durch die n Relationen (4.) verbunden sind, so zu bestimmen, dass F ein relatives Maximum oder Minimum werde.*

Dieses Problem besitzt die gewünschte Form und wird gelöst durch die $2n$ Gleichungen:

$$\frac{\partial F}{\partial x_h} + \sum_1^n{}_\varkappa \lambda_\varkappa \frac{\partial \psi_\varkappa}{\partial x_h} = 0 , \quad -\lambda_\varkappa u_\varkappa = 0 .$$

Bei unseren Annahmen bilden daher, wie ja auch von vornherein evident, die Werthe

$$x_h = a_h , \quad u_h = 0 , \tag{5.}$$

denen die Werthe Null der Multiplicatoren $\lambda_\varkappa$ zugehören, ein System Lösungen desselben, und zwar nach der Voraussetzung (3.) ein solches, auf welches Satz II anwendbar ist. Es handelt sich eben darum, mit Hülfe desselben zu entscheiden, wann diese Lösungen einem Maximum, resp. Minimum der Function F im Problem C. entsprechen.

Zu dem Ende haben wir die Function F, sowie die Bedingungsgleichungen (4.) dadurch zu variiren, dass wir darin:

$$\begin{cases} x_h = a_h + \alpha\,\delta x_h + \dfrac{\alpha^2}{2}\,\delta^2 x_h + \cdots \\ u_h = \qquad \alpha\,\delta u_h + \dfrac{\alpha^2}{2}\,\delta^2 u_h + \cdots \end{cases} \tag{6.}$$

setzen, hierauf nach Potenzen von α entwickeln und von diesen Entwicklungen die Coefficienten der aufeinanderfolgenden Potenzen von α nehmen. Auf diese Weise erhalten wir aus den Bedingungsgleichungen (4.) zunächst die n Gleichungen:

$$\sum_1^n{}_h \psi'_\varkappa a_h\,\delta x_h = 0 . \tag{7.}$$

Diese aber verlangen, da nach (3.) ihre Determinante nicht Null ist, dass jedes

$$\delta x_h = 0$$

sei. Hierdurch reduciren sich die Substitutionen (6.) auf:

$$\begin{cases} x_h = a_h + \dfrac{\alpha^2}{2}\,\delta^2 x_h + \cdots \\ u_h = \alpha\,\delta u_h + \dfrac{\alpha^2}{2}\,\delta^2 u_h + \cdots \end{cases} \tag{8.}$$

Digitized by Google

und daher ergeben sich aus den Bedingungsgleichungen (4.) weiter die n Gleichungen:

$$(9.) \qquad \sum_1^n{}_h \psi_k' a_h \delta^2 x_h = (\delta u_k)^2 \ ,$$

welche die n Variabeln $\delta^2 x_h$ als Functionen der Quadrate der δu_h bestimmen.

Nach Voraussetzung verschwindet endlich für unsere Lösungen (2.) $\delta^2 F$ identisch, während $\delta^3 F$ nicht mehr identisch Null wird, d. h. diese Lösungen bringen sämmtliche zweiten partiellen Differentialquotienten der Function F, nicht aber zugleich auch alle dritten zum Verschwinden. Die Entwicklung derjenigen Function von α, welche aus F durch die n ersten Substitutionen (8.) entsteht, beginnt daher erst mit der sechsten Potenz von α, oder die erste der Variationen δF, $\delta^2 F$, $\delta^3 F$, ..., welche in Folge der Bedingungsgleichungen (7.) nicht identisch verschwindet, ist die sechste Variation, und diese erhält durch diese Bedingungen die Form:

$$(10.) \qquad \delta^6 F = \frac{1}{8} \overline{\sum_1^n{}_h \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_k} F''' a_h a_i a_k \delta^2 x_h \delta^2 x_i \delta^2 x_k \ .$$

Nach Satz II ist daher $F(a_1 \ldots a_n)$ sicher ein Maximum resp. Minimum der Function F im Problem C. oder B., oder aber sicher kein solches, jenachdem die Form 6ten Grades in den Variabeln $\delta u_1 \ldots \delta u_n$, welche aus dem Ausdrucke (10.) entsteht, wenn man darin die Werthe der $\delta^2 x_h$ aus den Gleichungen (9.) einsetzt, definit oder indefinit ausfällt.

Bis auf den Factor $\frac{1}{8}$ und die Bezeichnung seiner Variabeln ist aber der Ausdruck (10.) identisch mit dem Werthe, welchen für die Lösungen (2.) die dritte Variation der Function F an und für sich, d. h. ohne Berücksichtigung der Bedingungen (7.) annimmt. Wir können daher das gewonnene Resultat so aussprechen:

III. *Unter den gemachten Voraussetzungen ist der Werth $F(a_1 \ldots a_n)$ sicher ein Maximum, resp. Minimum der Function F im Problem* B., *oder aber sicher kein solches, jenachdem für die betrachteten Lösungen* (2.) *die dritte Variation der Function F:*

Digitized by Google

$$\delta^3 F = \sum_1^n{}_h \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_k F''' a_h a_i a_k \delta x_h \delta x_i \delta x_k$$

durch die n Bedingungen:

$$\sum_1^n{}_h \psi_k' a_h \delta x_h = (\delta u_k)^2$$

eine definite oder eine indefinite Function der Variabeln $\delta u_1 \ldots \delta u_n$ *wird.*

Denkt man sich nun wieder die Function $F(x_1 \ldots x_n)$ aus einer gegebenen Function f von $n + r$ Variabeln $x_1 \ldots x_n$ $x_{n+1} \ldots x_{n+r}$ dadurch entstanden, dass man die r letzten Variabeln durch r unabhängige Gleichungen als Functionen der n ersten definirt, so kann man diesen Satz in der früheren Art übertragen auf den Fall, wo an die Stelle der ursprünglichen Aufgabe A. selbst schon ein Problem des relativen Maximums und Minimums getreten ist, und gelangt damit zu dem folgenden Satze, der sich auch, nur etwas umständlicher, direct aus dem Satze II. ableiten lässt:

IV. *In dem Problem diejenigen Werthe der* $n + r$, *durch* r *gegebene, unabhängige Bedingungsgleichungen*

$$\varphi_1 = 0 \ , \quad \ldots \quad \varphi_r = 0$$

verbundenen Variabeln $x_1 \ldots x_{n+r}$ *zu finden, für welche die gegebene Function* $f(x_1 \ldots x_{n+r})$ *ein relatives Maximum oder Minimum erreicht, existire ein solches (den Voraussetzungen des Satzes* II. *genügendes) System Lösungen:*

(α.) $$x_h = a_h \ , \quad \lambda_\varrho = \gamma_\varrho$$

der $n + 2r$ *Gleichungen:*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_h} \equiv \frac{\partial f}{\partial x_h} + \sum_1^r{}_\varrho \lambda_\varrho \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial x_h} = 0 \ , \quad \varphi_\varrho = 0 \ ,$$

für welches die zweite Variation der Function f ,

$$\delta^2 f \equiv \sum_1^{n+r}{}_h \sum_1^{n+r}{}_i \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_h \partial x_i} \delta x_h \delta x_i \ ,$$

identisch verschwindet in Folge der r *Bedingungsgleichungen*

(β.) $$\delta \varphi_\varrho \equiv \sum_1^{n+r}{}_h \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial x_h} \delta x_h = 0 \ ,$$

Digitized by Google

dagegen die dritte Variation:

$$\delta^3 f \equiv 3 \sum_1^{n+r}{}_h \sum_1^{n+r}{}_i \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_h \partial x_i} \delta^2 x_h \delta x_i$$

$$+ \sum_1^{n+r}{}_h \sum_1^{n+r}{}_i \sum_1^{n+r}{}_k \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_h \partial x_i \partial x_k} \delta x_h \delta x_i \delta x_k$$

durch die $2r$ Bedingungsgleichungen ($\beta.$) und:

$$(\gamma.) \qquad \delta^2 \varphi_\varrho \equiv \sum_1^{n+r}{}_h \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial x_h} \delta^2 x_h + \sum_1^{n+r}{}_h \sum_1^{n+r}{}_i \frac{\partial^2 \varphi_\varrho}{\partial x_h \partial x_i} \delta x_h \delta x_i = 0$$

nicht mehr zum identischen Verschwinden gebracht wird (sodass also die betrachteten Lösungen weder einem Max. noch einem Min. entsprechen). Es seien überdies aber n von einander und von den φ unabhängige Functionen $\psi_1 \ldots \psi_n$ der Variabeln $x_1 \ldots x_{n+r}$ bekannt, welche für die Lösungen ($\alpha.$) verschwinden, während diese Substitutionen die Determinante

$$\sum \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_r} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_{r+1}} \cdots \frac{\partial \psi_n}{\partial x_{r+n}}$$

verschieden von Null lassen. Aendert man dann das vorgelegte Problem dahin ab, dass jetzt unter allen Werthen, welche die Function f unter den $r + n$ Bedingungen:

$$\varphi_1 = 0 \ , \ \ldots \ , \ \varphi_r = 0$$
$$\psi_1 \geqq 0 \ , \ \ldots \ , \ \psi_n \geqq 0$$

anzunehmen vermag, die grössten und kleinsten gefunden werden sollen, so ist sicher $f(a_1 \ldots a_{n+r})$ ein oder kein solcher grösster resp. kleinster Werth, jenachdem für die Werthe $x_h = a_h$ die dritte Variation $\delta^3 f$ durch die $2r + n$ Bedingungsgleichungen ($\beta.$), ($\gamma.$) und

$$(\delta.) \qquad \sum_1^{n+r}{}_h \frac{\partial \psi_k}{\partial x_h} \delta x_h = (\delta u_k)^2$$

eine definite oder eine indefinite Function der n Variabeln $\delta u_1 \ldots \delta u_n$ wird.

Dass für die angenommenen Lösungen ($\alpha.$) $\delta^3 f$ durch die Bedingungen ($\beta.$), ($\gamma.$) und ($\delta.$) sich in der That auf eine blosse Function der δu_k reducirt, geht unmittelbar aus der Schlussbemerkung von § 2 hervor. —

Digitized by Google

Genau auf dieselbe Art, wie oben Satz III abgeleitet wurde, nur einfacher, lässt sich auch die folgende Frage beantworten:

Die n aus einer gegebenen Function $F(x_1 \ldots x_n)$ abgeleiteten Gleichungen:

$$\frac{\delta F}{\delta x_h} = 0 \tag{1.}$$

mögen ein solches System Auflösungen

$$x_h = a_h \tag{2.}$$

besitzen, für welches die zweiten partiellen Differentialquotienten der Function F nicht sämmtlich verschwinden und die Function F selbst weder ein Max. noch ein Min. erreicht, resp. das Max. oder Min. sich nicht mit voller Sicherheit nachweisen lässt.

Zugleich aber kennt man wiederum n unabhängige Functionen $\psi_1 \ldots \psi_n$ der Variabeln $x_1 \ldots x_n$, welche für die Werthe (2.) verschwinden, während die Determinante:

$$\sum \pm \psi_1' a_1 \; \psi_2' a_2 \ldots \psi_n' a_n \neq 0$$

ist, und fragt nunmehr, wann unter den jetzigen Voraussetzungen die Lösungen 2) einem wirklichen Max. oder Min. im Probleme B. entsprechen?

Diese Fragestellung rechtfertigt von selbst die Annahme, dass die Function F an der betrachteten Stelle $a_1 \ldots a_n$ kein sicher nachweisbares absolutes Max. oder Min. haben soll. Denn ist $F(a_1 \ldots a_n)$ ein absolutes Max. oder Min. von F, so ist es umsomehr auch im Probleme B. ein wahres Max. oder Min.

Die Frage selbst aber wird beantwortet durch den Satz:

V. *Bei den neuen Voraussetzungen ist der Werth $F(a_1 \ldots a_n)$ sicher ein oder kein Max. resp. Min. im Problem* B., *jenachdem die zweite Variation:*

$$\delta^2 F \equiv \sum_1^n{}_h \sum_1^n{}_i F'' a_h a_i \delta x_h \delta x_i$$

durch die n Gleichungen:

$$\sum_1^n{}_h \psi_k' a_h \delta x_h = (\delta u_k)^2$$

definit oder indefinit wird.

Digitized by Google

Die Voraussetzungen dieses letzten Satzes sind allgemeiner als die des Satzes III. Es ist mir jedoch noch kein geometrisches Beispiel begegnet, in welchem dieselben erfüllt wären. Vielmehr scheint bei denjenigen Aufgaben der Variationsrechnung, welche überhaupt auf solche Fragen führen, aber sich nicht den Sätzen III oder IV unterordnen lassen, letzteres in der Regel davon herzurühren, dass die Aufgabe zu wenig Bedingungsungleichungen enthält. Nimmt man aber im Problem B., unter sonst ganz entsprechenden Voraussetzungen, weniger als n Bedingungen von der Form $\psi \geqq 0$ an, so lässt sich, wenn zugleich unter den Lösungen $x_h = a_h$ das Problems $F =$ absol. Max., Min., um die es sich handelt, keine unbestimmt geblieben ist und daher auch keine als fest gegeben betrachtet werden darf, das fragliche Max. oder Min. im Allgemeinen nicht mehr durch Anwendung des Satzes II mit Sicherheit constatiren, indem dann, falls nicht noch weitere Singularitäten eintreten, die erste nicht identisch verschwindende Variation immer nur indefinit oder semidefinit ausfallen kann.

§ 3.

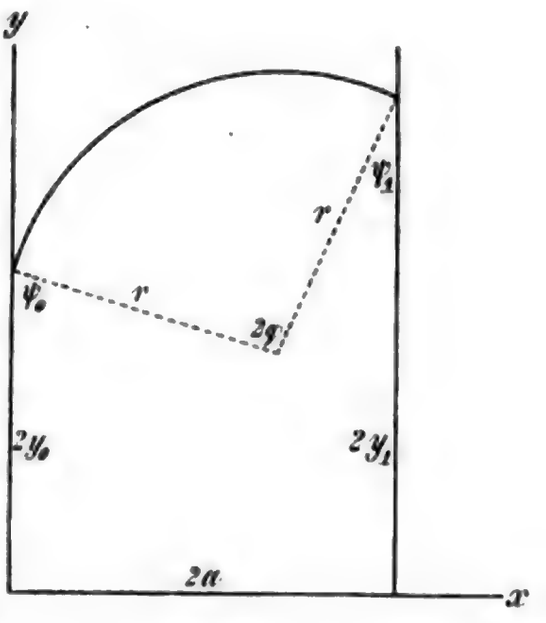
Um die im Vorhergehenden gewonnene Theorie an einem möglichst einfachen Beispiele zu erläutern, wähle ich die folgende Aufgabe:

Gegeben sind in der Ebene eine Gerade und zwei nach derselben Seite auf ihr errichtete unbegrenzte Lothe. Man soll die letzteren durch einen, über keine der drei gegebenen Geraden hinaustretenden Kreisbogen so verbinden, dass eine Figur von gegebenem Umfange und grösster Fläche entsteht.

Diese Aufgabe entspricht dem einfachsten Falle eines Problems, dessen Lösung die oben citirte Steiner'sche Abhandlung im Schlusssatze von Nr. 37 (Gesammelte Werke, Bd. II pag. 206) nicht ganz vollständig angiebt. Dass ich die Form der Curve, welche die beiden Lothe verbinden soll, nicht erst willkürlich lasse, sondern die Aufgabe gleich von vornherein für den Kreis stelle, geschieht nur deshalb, um dieselbe unmittelbar in der Form zu haben, auf welche sich die früheren Sätze beziehen, und ist zwar eine Erleichterung, aber keine Beschränkung, da man ja aus der Variationsrechnung weiss, dass unter allen Curven von gegebener Länge und gegebenen Endpunkten auf den

Digitized by Google

beiden Schenkeln stets einer der beiden entsprechenden Kreisbögen die grösste Fläche erzeugt. Uebrigens kann man die Aufgabe, wenn man sie eben direct als zweiten Theil der betreffenden allgemeineren Aufgabe der Variationsrechnung behandeln will, fast ebenso leicht mit Hülfe derjenigen Methode lösen, die ich in diesen Berichten 1884 angegeben habe. —



Nimmt man die gegebene Gerade zur x-Axe und das erste Loth zur $+y$-Axe, verbindet beide Lothe durch irgend einen gegen die x-Axe concaven Kreisbogen vom Radius r und vom Centriwinkel 2φ, und nennt $2a$ den Abstand der beiden Lothe, $2y_0$ und $2y_1$ die Stücke, welche der Kreisbogen von ihnen abschneidet, so wird die Fläche, welche ein Max. werden soll:

$$(1.) \qquad 2f = r^2\left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right) + 2a\,(y_0 + y_1)\ ,$$

während, wenn ihr gegebener Umfang durch $2(\varkappa + a)$ bezeichnet wird (sodass, damit die Aufgabe überhaupt möglich sei, $\varkappa > a$ sein muss), zwischen den vier Variabeln $r\ \varphi\ y_0\ y_1$ die beiden Relationen bestehen:

$$(2.) \qquad \begin{cases} y_0 + y_1 + r\varphi = \varkappa\ , \\ a^2 + (y_1 - y_0)^2 = r^2 \sin^2\varphi\ . \end{cases}$$

Hierzu treten aber einerseits, weil der Kreisbogen nicht unter die x-Axe herabsinken darf, die beiden Bedingungen:

$$(3.) \qquad y_0 \geqq 0\ , \qquad y_1 \geqq 0\ .$$

Andererseits soll der Kreisbogen auch die beiden Lothe nicht überschreiten. Denkt man sich denselben zum ganzen Kreise vervollständigt, so verlangt diese letzte Bedingung, dass die innerhalb des Kreises gelegenen Winkel ψ_0 und ψ_1, welche die Endradien des Bogens mit den Lothen bilden, nicht stumpf seien,

Digitized by Google

und lässt sich, wie man sofort aus der Figur erkennt, analytisch durch die beiden Ungleichungen ausdrücken:

$$(4.)\qquad \begin{cases} a\cos\varphi - (y_1 - y_0)\sin\varphi \geqq 0 \ , \\ a\cos\varphi + (y_1 - y_0)\sin\varphi \geqq 0 \ . \end{cases}$$

All' dieses gilt auch dann noch, wenn der Kreisbogen, ohne die x-Axe zu durchkreuzen, seine convexe Seite der letzteren zukehrt, sobald man alsdann nur r und φ negativ nimmt. Da man aber von vornherein übersieht, dass ein solcher Bogen zwar wohl ein Min., aber jedenfalls kein Max. der betrachteten Fläche erzeugen kann, so wollen wir den convexen Bogen ganz ausser Acht lassen und demnach nur solche Lösungen der Aufgabe berücksichtigen, in denen r und φ positive Werthe erhalten.

Sieht man nun zunächst noch ganz ab von den Bedingungen (4.), ersetzt dagegen die Ungleichungen (3.) durch die Gleichungen:

$$(5.)\qquad 2y_0 = \eta_0^2 \ , \qquad 2y_1 = \eta_1^2 \ ,$$

so gelangt man zu der Aufgabe, die sechs Variabeln $r\ \varphi\ y_0\ y_1\ \eta_0\ \eta_1$, zwischen denen die vier Relationen (2.) und (5.) bestehen, so zu bestimmen, dass der Ausdruck (1.) ein Max. werde.

Die Gleichungen, welche diese Aufgabe lösen, stellen sich, wenn man

$$(6.)\qquad 2F \equiv r^2\left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right) + 2a\,(y_0 + y_1)$$
$$+2\lambda(y_0+y_1+r\varphi-\varkappa)+\mu(a^2+(y_1-y_0)^2-r^2\sin^2\varphi)$$

und:

$$2\Phi \equiv 2F + \nu_0\,(2y_0 - \eta_0^2) + \nu_1\,(2y_1 - \eta_1^2)$$

setzt, also dar:

$$(7.)\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial r} \equiv \dfrac{\partial F}{\partial r} \equiv r\left(\varphi - \dfrac{\sin 2\varphi}{2}\right) + \lambda\varphi - \mu\, r\sin^2\varphi = 0 \ , \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \equiv \dfrac{\partial F}{\partial\varphi} \equiv r\left\{\dfrac{r}{2}(1-\cos 2\varphi) + \lambda - \dfrac{\mu}{2}\, r\sin 2\varphi\right\} = 0 \ , \end{cases}$$

$$(8.)\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial y_0} \equiv \dfrac{\partial F}{\partial y_0} + \nu_0 \equiv a + \lambda - \mu\,(y_1 - y_0) + \nu_0 = 0 \ , \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y_1} \equiv \dfrac{\partial F}{\partial y_1} + \nu_1 \equiv a + \lambda + \mu\,(y_1 - y_0) + \nu_1 = 0 \ , \end{cases}$$

$$(9.)\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\eta_0} \equiv -\nu_0\,\eta_0 = 0 \ , \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\eta_1} \equiv -\nu_1\,\eta_1 = 0 \ .$$

Digitized by Google

Die Annahme $r = 0$ hat keinen Sinn, daher ergeben die beiden Gleichungen (7.) durch Elimination von μ:

$$(r + \lambda)(\varphi \cos \varphi - \sin \varphi) = 0 \ ,$$

folglich, weil die Gleichung $\varphi \cos \varphi - \sin \varphi = 0$ zwischen 0 und π keine Wurzel besitzt:

(10.) $$r = -\lambda \quad \text{und} \quad \mu = -\operatorname{ctg} \varphi \ .$$

Den beiden Gleichungen (9.) ferner kann auf viererlei Art genügt werden. Zunächst durch

$$v_0 = 0 \ , \qquad v_1 = 0 \ .$$

Dann reduciren sich die Gleichungen (8.) auf:

(11.) $$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y_0} \equiv a + \lambda - \mu (y_1 - y_0) = 0 \ , \\ \dfrac{\partial F}{\partial y_1} \equiv a + \lambda + \mu (y_1 - y_0) = 0 \ , \end{cases}$$

und geben somit:

$$a + \lambda = 0 \ , \qquad \mu (y_1 - y_0) = 0 \ .$$

Aus der ersten dieser beiden Gleichungen folgt nach (10.)

(12.) $$r = -\lambda = a \ ,$$

während die zweite selbst wieder in die beiden zerfällt:

$$y_1 - y_0 = 0 \quad \text{oder} \quad \mu = 0 \ .$$

Die erste Annahme liefert nach (2.) und (12.)

$$2 y_0 = \varkappa - a\varphi \ , \qquad \sin^2 \varphi = 1 \ ,$$

und führt somit zu den Lösungen:

(13.) $$r = -\lambda = a \ , \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \ , \quad \mu = 0 \ , \quad 2 y_0 = 2 y_1 = \varkappa - \frac{\pi a}{2} \ .$$

Zu demselben Resultate gelangt man aber auch durch die Annahme $\mu = 0$. Denn aus dieser folgt nach (10.), (12.) und (2.)

$$\operatorname{ctg} \varphi = 0 \ , \qquad (y_1 - y_0)^2 = 0 \ .$$

Verbunden mit den zugehörigen Werthen

$$v_0 = v_1 = 0 \ , \qquad v_0^2 = v_1^2 = 2 y_0 \ ,$$

spielen hiernach die Lösungen (13.) die Rolle von Doppelwurzeln der Gleichungen (2.), (5.), (7.), (8.), (9.). *Sie entsprechen einem*

Digitized by Google

Halbkreise vom Radius a, der die beiden Lothe berührt, erfüllen aber die Bedingungen (3.) oder (5.) nur, so lange

$$2\varkappa \geqq \pi a \ ,$$

d. h. so lange der gegebene Umfang der Figur nicht kleiner ist als der Umfang dieses Halbkreises, und liefern dann eine wirkliche Lösung der Aufgabe, weil der berührende Halbkreis ganz zwischen den beiden Lothen enthalten ist. In der That werden die Bedingungen (4.) durch die Lösungen (13.) als Gleichungen erfüllt.

Den Gleichungen (9.) lässt sich weiter dadurch genügen, dass man ν_0 und η_1, oder ν_1 und $\eta_0 = 0$ setzt. Aber schon die blosse Anschauung lehrt, dass man hierdurch auf einen Kreisbogen kommt, der entweder ein Loth überschreitet oder aber unter die x-Axe herabsteigt, der also keinenfalls den Forderungen der Aufgabe genügt.

Es bleibt somit zur anderweitigen Erfüllung der beiden Gleichungen (9.) nur noch die Möglichkeit $\eta_0 = \eta_1 = 0$ übrig. Diese Annahme liefert nach (5.), (2.), (10.) und (8.) die Lösungen:

$$(14.)\begin{cases} r = -\lambda = \dfrac{\varkappa}{\varphi} \ , \qquad \dfrac{\sin\varphi}{\varphi} = \dfrac{a}{\varkappa} \ , \qquad \mu = -\operatorname{ctg}\varphi \ , \\ \eta_0 = \eta_1 = y_0 = y_1 = 0 \ , \ -\nu_0 = -\nu_1 = a + \lambda = \dfrac{\varkappa}{\varphi}(\sin\varphi - 1) \end{cases}$$

und ergiebt den Kreisbogen von der Länge $2\varkappa$, welcher die Fusspunkte der beiden Lothe verbindet. Dieser verläuft nur dann ganz zwischen den beiden Lothen, wenn

$$2\varkappa \leqq \pi a$$

ist, und tritt also gerade an der Stelle als Lösung ein, wo der berührende Halbkreis aufhört, eine Lösung zu sein. Für $2\varkappa \leqq \pi a$ ergeben die Gleichungen (14.) $\varphi \leqq \dfrac{\pi}{2}$ und erfüllen also, ausser im Grenzfalle $2\varkappa = \pi a$, wo unsere beiden Lösungen zusammenfallen, die Bedingungen (4.) nur als Ungleichungen.

Es ist nun a priori klar, dass beide Lösungen innerhalb ihrer respectiven Geltungsbereiche ein wirkliches Max. der Fläche erzeugen. Indessen ist s. z. s. der Charakter dieser beiden Maxima ein total verschiedener.

Digitized by

Was zunächst die zweite Lösung (14.) anbetrifft, so erhält man für diese durch Variation der Gleichungen (5.) und (2.) die Bedingungen:

$$\delta y_0 = 0 \ , \quad \delta y_1 = 0 \ , \quad \delta r = 0 \ , \quad \delta \varphi = 0 \ .$$

Ueberdies ist nach (9.)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta_0^2} = -\nu_0 \ , \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta_0 \partial \eta_1} = 0 \ , \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta_1^2} = -\nu_1 \ .$$

Für die Lösungen (14.) nimmt demnach die zweite Variation der Function f die Form an:

$$\delta^2 f = \frac{\varkappa}{\varphi}(\sin\varphi - 1)[(\delta\eta_0)^2 + (\delta\eta_1)^2]$$

und ist also ausser in dem Falle $\varphi = \frac{\pi}{2}$, d. h. $2\varkappa = \pi a$, definit und negativ. Der Kreisbogen von der Länge $2\varkappa$, welcher die Fusspunkte der beiden Lothe verbindet, entspricht daher nicht nur im Falle $2\varkappa < \pi a$ einem wahren Max. der Aufgabe, sondern erzeugt, sobald man die Bedingung fallen lässt, dass die beiden Lothe nicht überschritten werden sollen, auch für $2\varkappa > \pi a$ stets eine grösste Fläche. Dies gilt sogar noch für den Grenzfall $2\varkappa = \pi a$, lässt sich dann aber erst durch die 6te Variation entscheiden. Hierauf brauchen wir jedoch nicht einzugehen, da sich bei der Discussion der ersten Lösung (13.) von selbst zeigen wird, dass in unserer eigentlichen Aufgabe der genannte Fall gar keine Sonderstellung einnimmt.

Um diese erste Lösung möglichst einfach zu untersuchen und namentlich um Schwierigkeiten zu vermeiden, welche sonst eben der Grenzfall $2\varkappa = \pi a$ bereiten würde, wollen wir jetzt ganz absehen von den Bedingungen (3.), da dieselben ja durch die Lösung (13.) in ihrem Geltungsbereiche $2\varkappa \geqq \pi a$ von selbst erfüllt sind. Es tritt dann $2F$ an die Stelle von 2Φ und es bleiben zur Lösung der Aufgabe nur noch die Gleichungen (2.), (7.) und (11.), die keine anderen Auflösungen als die Werthe (13.) besitzen.

Hieraus erhellt zunächst recht deutlich, *wie die zweite Lösung* (14.) *überhaupt erst durch den Zwang der Bedingungen* (3.) *zu Stande kommt*[1]).

---

1) Die entsprechenden Bedingungen sind es auch, welche in der Aufgabe, die Schenkel eines gegebenen Winkels durch eine Curve von

Digitized by Google

Weiter folgt aus den Bedingungsgleichungen (2.) durch Variation:

$$(15.)\quad \begin{cases} \delta y_0 + \delta y_1 + r\,\delta\varphi + \varphi\,\delta r = 0 \ , \\ (y_1 - y_0)(\delta y_1 - \delta y_0) - r\sin\varphi\,(\sin\varphi\,\delta r + r\cos\varphi\,\delta\varphi) = 0 \ , \end{cases}$$

also für die Lösungen (13.):

$$(16.)\qquad \delta r = 0 \ , \qquad \delta y_0 + \delta y_1 + a\,\delta\varphi = 0 \ .$$

Wegen $\lambda = -a$, $\mu = 0$ endlich wird

$$2F = r^2\left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right) - 2a\,(r\varphi - \varkappa)$$

und daher nach (13.)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2} = r^2\sin 2\varphi = 0 \ .$$

Wegen $\delta r = 0$ verschwindet daher für die erste Lösung die zweite Variation von f identisch und die dritte reducirt sich auf

$$\delta^3 f = 3\,\frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial\varphi}\,\delta^2 r\,\delta\varphi + \frac{\partial^3 F}{\partial\varphi^3}\,(\delta\varphi)^3$$

d. h. auf:

$$\delta^3 f = (3a\,\delta^2 r - 2a^2\,(\delta\varphi)^2)\,\delta\varphi \ .$$

Dabei treten zu den Bedingungsgleichungen (16.) noch hinzu die neuen:

$$(17.)\qquad \begin{cases} \delta^2 y_0 + \delta^2 y_1 + a\,\delta^2\varphi + \dfrac{\pi}{2}\,\delta^2 r = 0 \ , \\ (\delta y_1 - \delta y_0)^2 - a\,\delta^2 r + a^2\,(\delta\varphi)^2 = 0 \ , \end{cases}$$

die man durch nochmalige Variation der Gleichungen (15.) und Substitution der Lösungen (13.) unter Berücksichtigung der Gleichung $\delta r = 0$ erhält.

Die erste dieser Gleichungen bestimmt aber nur die in $\delta^3 f$ gar nicht vorkommende Variable $\delta^2\varphi$, und durch die zweite erhält $\delta^3 f$ den Werth:

$$(18.)\qquad \delta^3 f = \{3\,(\delta y_1 - \delta y_0)^2 + a^2\,(\delta\varphi)^2\}\,\delta\varphi \ .$$

---

gegebener Länge so zu verbinden, dass eine Figur von grösster Fläche entsteht, im Falle eines convexen Winkels den von Steiner übersehenen Sturm'schen Halbkreis (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 96, p. 49) analytisch als Lösung herbeiführen.

Digitized by Google

Dieser verschwindet in Folge der allein noch übrig gebliebenen zweiten Gleichung (16.) nicht identisch. Ohne Hinzufügung der Forderung, dass die beiden Lothe nicht überschritten werden dürfen, erzeugt also der berührende Halbkreis weder eine grösste noch eine kleinste Fläche.

Führen wir nunmehr aber die Bedingungen (4.) ein, welche durch die Lösung (13.) als Gleichungen erfüllt werden, so haben wir nach Satz IV noch die beiden Bedingungen hinzuzufügen:

$$-a\delta\varphi - (\delta y_1 - \delta y_0) = (\delta u_0)^2 ,$$
$$-a\delta\varphi + (\delta y_1 - \delta y_0) = (\delta u_1)^2 ,$$

und diese ergeben

$$\delta\varphi = -\frac{(\delta u_0)^2 + (\delta u_1)^2}{2a} ,$$

machen also, gleichviel welchen Werth $2x$ auch haben möge, immer die Form (18.) definit und negativ.

Es ist also erst der Zwang der Ungleichungen (4.), *welcher bewirkt, dass im Falle* $2x \geqq \pi a$ *der berührende Halbkreis, der sich bereits ohne diesen Zwang als Lösung einstellte, einem wahren Maximum der Aufgabe entspricht.* —

Ich habe, um die Formeln nicht unnöthig zu verlängern, und weil es mir hauptsächlich nur um ein Beispiel für die vorausgeschickte Theorie zu thun war, die Bedingungen (4.) erst ganz am Schluss hinzugezogen. Man überzeugt sich aber leicht, dass man auch dann, wenn man diese Bedingungen gleich von Anfang an berücksichtigt, doch keine anderen Lösungen erhält, als die beiden gefundenen. —

Ganz dieselben Eigenschaften wie die erste Lösung zeigt auch die Aufgabe, innerhalb eines gegebenen (concaven) Winkels die Schenkel durch eine solche Curve zu verbinden, dass eine Figur von gegebenem Umfange und grösster Fläche entsteht, welche das Hauptproblem in Nr. 37 der Steiner'schen Abhandlung bildet; und dasselbe gilt daher natürlich zugleich von dem zweiten Problem dieser Nummer, wo an Stelle des Umfangs die Differenz zwischen der Länge der Verbindungscurve und der Summe ihrer Abschnitte auf den Schenkeln gegeben ist, und die Fläche ein Minimum werden soll. Ebenso lässt sich die Aufgabe (bei der die zweite Variation gleichfalls identisch verschwindet), zwei gegebene parallele Gerade durch zwei, sich weder durchsetzende, noch auch über die gegebenen Parallelen hinaustretende Curven

Digitized by Google

so zu verbinden, dass die entstehende Figur bei gegebenem Umfange die grösstmögliche Fläche umschliesse, mittelst der erhaltenen Sätze noch vollständig erledigen. Denn sie führt zwar, wenn man sie wiederum gleich für zwei Kreisbögen stellt und die Variabeln wie oben wählt, bei 8 Variabeln nur auf 7 Bedingungen, 3 Gleichungen und 4 Ungleichungen. Da aber die entstehende Maximalfigur (die von zwei, beide Parallelen berührenden und gegen einander concaven Halbkreisen erzeugt wird) längs der beiden Parallelen verschoben werden kann, so bleibt eine von den 8 Variabeln willkürlich. Man kann diese eine Variable also als fest gegeben betrachten, wodurch man gerade soviel Variabeln als Bedingungen erhält und Satz IV nun wieder anwendbar wird.

Dagegen reichen die obigen Hülfsmittel nicht mehr aus, um in dem Problem, innerhalb eines gegebenen Winkels die Schenkel durch zwei sich nicht durchschneidende Curven so zu verbinden, dass bei gegebenem Umfange die Fläche der entstehenden Figur ein Maximum werde, den Vollkreis von dem gegebenen Umfange, welcher die beiden Schenkel berührt, als Maximalfigur sicher nachzuweisen. Hier erhalten nämlich bei analoger Behandlungsart von den 8 Variabeln des Problems, denen wiederum nur 7 Bedingungen vorgeschrieben sind, alle acht vollständig bestimmte Werthe, während zugleich die zweite Variation, wenn man die 4 Bedingungsungleichungen der Aufgabe noch nicht mit berücksichtigt, nur semidefinit wird; man stösst also auf den, am Schlusse von § 2 berührten Ausnahmefall.

Digitized by Google

Sophus Lie, *Die infinitesimalen Berührungstransformationen der Mechanik.*

Bei verschiedenen Gelegenheiten habe ich schon die Wichtigkeit des allgemeinen Begriffes *infinitesimale Berührungstransformation* hervorgehoben. Der Zweck der folgenden Note ist zunächst an interessanten Beispielen zu zeigen, wie einfach sich Rechnungen mit derartigen Transformationen gestalten. Gleichzeitig wünsche ich die Aufmerksamkeit auf eine *merkwürdige Categorie von infinitesimalen Berührungstransformationen zu lenken, welche in der Mechanik eine Rolle spielen.*

1.

Eine infinitesimale Transformation in den Veränderlichen $x_1 \dots x_n, p_1 \dots p_n$:

$$\delta x_\varkappa = \xi_\varkappa(x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n)\,\delta t$$
$$\delta p_\varkappa = \pi_\varkappa(x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_n)\,\delta t$$

ist eine homogene Berührungstransformation, wenn sie die Bedingungsgleichung

$$\frac{\delta}{\delta t}\sum p_\varkappa\, dx_\varkappa = 0 = \sum \pi_\varkappa\, dx_\varkappa + \sum p_i\, d\xi_i$$

erfüllt. Hieraus ergiebt sich [1], dass die $\xi_\varkappa$ und $\pi_\varkappa$ die Form

$$\xi_\varkappa = \frac{\partial H}{\partial p_\varkappa}, \qquad \pi_\varkappa = -\frac{\partial H}{\partial x_\varkappa}$$

besitzen, und dass H hinsichtlich $p_1 \dots p_n$ homogen von erster Ordnung ist.

1) Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, Bd. 2, Christiana 1877; vgl. auch Math. Annalen Bd. VIII, 1874, S. 239.

Digitized by Google

Es bestimmen daher die Gleichungen

$$\delta x_\varkappa = \frac{\partial H}{\partial p_\varkappa}\delta t\ , \qquad \delta p_\varkappa = -\frac{\partial H}{\partial x_\varkappa}\delta t \qquad (\varkappa = 1, 2 \cdots n)$$

$$p_1\frac{\partial H}{\partial p_1} + \cdots + p_n\frac{\partial H}{\partial p_n} - H = 0$$

die allgemeinste infinitesimale homogene Berührungstransformation in den Veränderlichen $x_1 \ldots x_n, p_1 \cdots p_n$.

Setzt man z. B. $n = 3$ und

$$H = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}\ ,$$

so erhält man eine infinitesimale Berührungstransformation des dreifach ausgedehnten Raumes $x_1\, x_2\, x_3$:

$$\delta x_\varkappa = \frac{p_\varkappa}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}\delta t\ , \quad \delta p_\varkappa = 0\ ,$$

welche offenbar die Relationen

$$\frac{\delta x_1}{p_1} = \frac{\delta x_2}{p_2} = \frac{\delta x_3}{p_3}\ , \quad \delta p_\varkappa = 0\ ,$$

$$\sqrt{\delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \delta x_3^2} = \delta t$$

erfüllt. Sie führt daher alle Flächenelemente $x_1\, x_2\, x_3\, p_1\, p_2\, p_3$ des Raumes $x_1\, x_2\, x_3$ *gleichlange Strecken* δt *normal* zum betreffenden Elemente fort.

Unsere Berührungstransformation ist also eine infinitesimale Paralleltransformation: sie führt jede Fläche in eine unendlich benachbarte Parallelfläche über.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, im n-fach ausgedehnten Raume $x_1 \ldots x_n$ die allgemeinste infinitesimale homogene Berührungstransformation

$$\delta x_\varkappa = \frac{\partial H}{\partial p_\varkappa}\delta t\ , \quad \delta p_\varkappa = -\frac{\partial H}{\partial x_\varkappa}\delta t$$

zu finden, welche jedes Element x, p nach einer Richtung $\delta x_1 \ldots \delta x_n$ fortführt, welche zum betreffenden Element senkrecht steht, so dass die Gleichungen

$$\frac{\delta x_1}{p_1} = \frac{\delta x_2}{p_2} = \cdots = \frac{\delta x_n}{p_n}$$

Digitized by Google

bestehen. Diese Aufgabe findet ihren analytischen Ausdruck in den Gleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \cdots = \frac{\partial H}{\partial p_n}$$
$$p_1 \frac{\partial H}{\partial p_1} + \cdots + p_n \frac{\partial H}{\partial p_n} - H = 0 \ ,$$

unter denen die ersten aussagen, dass H von den Grössen

$$p_1^2 + \cdots + p_2^2 \ , \quad x_1 \ , \ x_2 \cdots x_n$$

abhängt, während die letzte zeigt, dass H die Form

$$H = \Omega(x_1 \cdots x_n) \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + \cdots p_n^2} \tag{1.}$$

besitzt.

Hiermit kennen wir eine *ausgedehnte Categorie von infinitesimalen homogenen Berührungstransformationen des n-fach ausgedehnten Raumes, welche die Eigenschaft besitzen, jedes Element nach der Richtung der zugehörigen Normale fortzuführen.*

Wird eine solche infinitesimale Transformation unendlich oft wiederholt, so entstehen ∞^1 endliche Berührungstransformationen, die eine eingliedrige Gruppe bilden. Werden alle Transformationen dieser Gruppe auf eine Mannigfaltigkeit

$$W(x_1, x_2 \cdots x_n) = 0$$

ausgeführt, so entsteht eine Schaar von ∞^1 Mannigfaltigkeiten

$$\pi(x_1 \cdots x_n) = \text{Const.},$$

deren Orthogonaltrajectorien Bahncurven [1]) der vorgelegten infinitesimalen Berührungstransformation sind.

Es ist nun sehr merkwürdig, dass die infinitesimalen Berührungstransformationen von der Form (1) *eine hervorragende Rolle in der Mechanik spielen.*

Die Bewegung eines Punktsystems wird nämlich definirt durch eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung

1) Werden alle Transformationen einer eingliedrigen Gruppe von Berührungstransformationen auf ein Element ausgeführt, so erhält dasselbe ∞^1 Lagen, deren Punktort im Texte als *Bahncurve* der vorgelegten infinitesimalen Transformation bezeichnet wird.

Digitized by Google

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial W}{\partial x_n}\right)^2 - 2U(x_1 \cdots x_n) - 2h = 0 \ ,$$

die sich folgendermassen schreiben lässt:

$$p_1^2 + \cdots + p_n^2 - 2(U + h) = 0 \ . \tag{2.}$$

Ich habe nun längst bemerkt, dass die Integration einer jeden partiellen Differentialgleichung

$$\varphi(x_1 \cdots x_n \ , \ p_1 \cdots p_n) - a = 0$$

dadurch geleistet werden kann, dass man die infinitesimale Berührungstransformation betrachtet, deren charakteristische Function $\varphi - a$ ist, und die zugehörige eingliedrige Gruppe von Berührungstransformationen bestimmt. Im vorliegenden Falle tritt aber eine wichtige Vereinfachung ein, indem sich die Gleichung (2.) auf die Form

$$\frac{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_n^2}}{\sqrt{2(U + h)}} = 1$$

bringen lässt. Hier ist die linke Seite homogen von der ersten Ordnung in $p_1 \ldots p_n$; sie stellt daher eine infinitesimale *homogene* Berührungstransformation dar, welche der früher besprochenen allgemeinen Categorie angehört.

Aus dieser Bemerkung liessen sich interessante Schlüsse ziehen. Es wäre andererseits leicht, die vorangehenden Betrachtungen auf den Fall auszudehnen, dass die Coordinaten $x_\varkappa$ durch gegebene Relationen verbunden sind.

2.

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe (im dreifach ausgedehnten Raume) alle infinitesimalen Berührungstransformationen zu finden, welche Krümmungslinien in eben solche Curven überführen.

Die Krümmungslinien der Flächen $f(x_1\, x_2\, x_3) = 0$ werden, wenn wir die partiellen Ableitungen von f nach x_1, x_2, x_3 wie gewöhnlich mit p_1, p_2, p_3 bezeichnen, durch die Differentialgleichung

$$dp_1(p_2\, dx_3 - p_3\, dx_2) + dp_2(p_3\, dx_1 - p_1\, dx_3) + dp_3(p_1\, dx_2 - p_2\, dx_1) = 0$$

oder durch die äquivalente

Digitized by Google

$$\Delta = \begin{vmatrix} dp_1 & dp_2 & dp_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{vmatrix} = 0$$

definirt. Unser Problem kann daher folgendermassen formulirt werden:

Es sollen alle infinitesimalen homogenen Berührungstransformationen

$$\delta x_\varkappa = \frac{\partial H}{\partial p_\varkappa}\,\delta t\,, \quad \delta p_\varkappa = -\frac{\partial H}{\partial x_\varkappa}\,\delta t$$

gefunden werden, welche das Gleichungssystem

(3.) $$\Delta = 0\,, \quad p_1\,dx_1 + \cdots + p_n\,dx_n = 0$$

invariant lassen.

Die homogene Function H muss also derart gewählt werden, dass der Ausdruck

$$\frac{\delta \Delta}{\delta t}$$

vermöge des Gleichungssystems (3.) verschwindet.

Durch Ausführung kommt

$$\frac{\delta \Delta}{\delta t} = -\begin{vmatrix} d\frac{\partial H}{\partial x_1} & d\frac{\partial H}{\partial x_2} & d\frac{\partial H}{\partial x_3} \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{vmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix} dp_1 & dp_2 & dp_3 \\ \frac{\partial H}{\partial x_1} & \frac{\partial H}{\partial x_2} & \frac{\partial H}{\partial x_3} \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} dp_1 & dp_2 & dp_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ d\frac{\partial H}{\partial p_1} & d\frac{\partial H}{\partial p_2} & d\frac{\partial H}{\partial p_3} \end{vmatrix}.$$

Dieser Ausdruck ist eine homogene Function zweiten Grades von den Differentialen dp_1, dp_2, dp_3, dx_1, dx_2, dx_3, deren Coefficienten nur von den x, p abhängen. Es besteht daher identisch in den soeben genannten Differentialen eine Gleichung

(4.) $$\frac{\delta \Delta}{\delta t} = \lambda \Delta + \sum_\varkappa p_\varkappa\,dx_\varkappa \left(\sum_\varkappa \alpha_\varkappa\,dx_\varkappa + \sum_\varkappa \beta_\varkappa\,dp_\varkappa\right),$$

in welcher λ, $\alpha_1 \ldots \beta_3$ Functionen von den x, p bezeichnen. Beide Seiten dieser Gleichung sind homogene Functionen zweiten

Digitized by Google

Grades von den Differentialen dx, dp; werden daher links wie rechts die entsprechenden Coefficienten berechnet und einander gleichgesetzt, so ergeben sich mehrere Relationen, welche nach Elimination der Hülfsgrössen λ, α, β diejenigen Differentialgleichungen liefern, die H bestimmen.

Unter den rechtsstehenden Gliedern der Gleichung (4.) findet sich keines von der Form $\nu\, dp_i\, dp_j$; daher erhält man ohne weiteres sechs von den α, β und λ freie Gleichungen, die sich mit Benutzung der Abkürzung

$$\frac{\partial H}{\partial p_\varkappa} = H_k$$

folgendermassen schreiben lassen:

$$(5.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial p_1}(p_2 H_3 - p_3 H_2) = 0 \ , \\ \dfrac{\partial}{\partial p_2}(p_3 H_1 - p_1 H_3) = 0 \ , \\ \dfrac{\partial}{\partial p_3}(p_1 H_2 - p_2 H_1) = 0 \ , \end{cases}$$

$$(6.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial p_1}(p_3 H_1 - p_1 H_3) + \dfrac{\partial}{\partial p_2}(p_2 H_3 - p_3 H_2) = 0 \ , \\ \dfrac{\partial}{\partial p_2}(p_1 H_2 - p_2 H_1) + \dfrac{\partial}{\partial p_3}(p_3 H_1 - p_1 H_3) = 0 \ , \\ \dfrac{\partial}{\partial p_3}(p_2 H_3 - p_3 H_2) + \dfrac{\partial}{\partial p_1}(p_1 H_2 - p_2 H_1) = 0 \ . \end{cases}$$

Die drei ersten geben durch Integration

$$(7.)\qquad \begin{cases} p_2 H_3 - p_3 H_2 = K_{32}(p_2 p_3 x_1 x_2 x_3) \ , \\ p_3 H_1 - p_1 H_3 = K_{13}(p_3 p_1 x_1 x_2 x_3) \ , \\ p_1 H_2 - p_2 H_1 = K_{21}(p_1 p_2 x_1 x_2 x_3) \ , \end{cases}$$

und dabei ist es einleuchtend, dass die K_{ij} wie H selbst von der ersten Ordnung in den p sein müssen; durch Einsetzung der gefundenen Werthe erhalten die Gleichungen (6.) die Form

$$\frac{\partial K_{13}(p_3 p_1 x_1 x_2 x_3)}{dp_1} + \frac{\partial K_{32}(p_2 p_3 x)}{\partial p_2} = 0 \ ,$$

$$\frac{\partial K_{21}}{\partial p_2} + \frac{\partial K_{13}}{\partial p_3} = 0 \ , \quad \frac{\partial K_{32}}{\partial p_3} + \frac{\partial K_{21}}{\partial p_1} = 0 \ ,$$

Digitized by Google

und werden daher in allgemeinster Weise erfüllt durch Ausdrücke von der Form

$$K_{13} = \mu_{13}(x)p_1 - \mu_{21}(x)p_3 \ ,$$
$$K_{21} = \mu_{21}(x)p_2 - \mu_{32}(x)p_1 \ ,$$
$$K_{32} = \mu_{32}(x)p_3 - \mu_{13}(x)p_2 \ .$$

Folglich gehen die Gleichungen (7.) in die folgenden über:

$$\frac{H_1 + \mu_{21}}{p_1} = \frac{H_2 + \mu_{32}}{p_2} = \frac{H_3 + \mu_{13}}{p_3} \ ,$$

die sich nach Einführung einer Hülfsgrösse ϱ folgendermassen schreiben lassen:

$$(8.) \qquad \begin{cases} H_1 = \varrho p_1 - \mu_{21} \ , \\ H_2 = \varrho p_2 - \mu_{32} \ , \\ H_3 = \varrho p_3 - \mu_{13} \ . \end{cases}$$

Hier sind H_1, H_2, H_3 die Differentialquotienten von H nach p_1, p_2 und p_3; also geben die bekannten Integrabilitätsbedingungen die Gleichungen

$$\frac{\frac{\partial \varrho}{\partial p_1}}{p_1} = \frac{\frac{\partial \varrho}{\partial p_2}}{p_2} = \frac{\frac{\partial \varrho}{\partial p_3}}{p_3} \ ,$$

so dass ϱ die Form

$$\varrho = P(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \ , \ x_1, x_2, x_3)$$

haben muss. Wird dieser Werth von ϱ in (8.) eingesetzt, so erhalten wir drei Gleichungen zur Bestimmung von H; und da wir andererseits wissen, dass H homogen von der ersten Ordnung in den p ist, so können wir

$$H = \Omega(x_1 x_2 x_3)\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} + \sum_1^3 \varkappa \xi_\varkappa (x_1 x_2 x_3) p_\varkappa \ .$$

setzen.

Jetzt können wir unser Problem in zwei einfachere Probleme zerlegen.

Bemerken wir nämlich, dass die Grösse H und ihre Differentialquotienten *linear* und *homogen* in der Bedingungsgleichung (4.) auftreten, so erkennen wir sofort, dass der allgemeinste Werth von H sich darstellen lässt als Summe zweier specieller

Digitized by Google

Werthe dieser Grösse, die wir finden, indem wir einmal Ω gleich Null und das andere Mal alle ξ gleich Null setzen.

Das Problem, die allgemeinste infinitesimale *Punkt*transformation

$$H = \xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \xi_3 p_3$$

zu finden, welche die Differentialgleichung der Krümmungslinien invariant lässt, deckt sich bekanntlich mit dem von LIOUVILLE erledigten Probleme, alle conforme Punkttransformationen des gewöhnlichen Raumes zu bestimmen.

Wir brauchen also nur noch die allgemeinste infinitesimale homogene Berührungstransformation von der speciellen Form:

$$H = \Omega(x_1 x_2 x_3)\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$$

zu finden, welche Krümmungslinien in ebensolche überführt. Tragen wir diesen speciellen Werth von H in (4.) ein, so erhalten wir zur Bestimmung von Ω die Relation

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2\Omega}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2\Omega}{\partial x_3^2}\ , \quad \frac{\partial^2\Omega}{\partial x_i \partial x_j} = 0\ ,$$

welche zeigen, dass H die Form

(9.) $$\{a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2b_1x_1+2b_2x_2+2b_3x_3+c\}\sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^2}$$

besitzt.

Setzt man z. B.

$$a = b_1 = b_2 = b_3 = 0\ , \quad c = 1\ ,$$

so wird

$$H = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}\ ;$$

die entsprechende Transformation ist eine infinitesimale Paralleltransformation. Setzt man andererseits

$$a = 1\ , \qquad c = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\ ,$$

so erhält H die Form

$$H' = [(x_1 + b_1)^2 + (x_2 + b_2)^2 + (x_3 + b_3)^2]\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$$

oder nach Einführung der neuen Veränderlichen

$$x_\varkappa' = \frac{x_\varkappa + b_\varkappa}{(x_1 + b_1)^2 + (x_2 + b_2)^2 + (x_3 + b_3)^2}$$

die Form

$$H' = \sqrt{p_1'^2 + p_2'^2 + p_3'^2}\ .$$

Digitized by Google

Die infinitesimale Transformation H' ist daher mittelst einer Transformation durch reciproke Radien mit einer infinitesimalen Paralleltransformation ähnlich.

Nimmt man eine beliebige infinitesimale Transformation H von der Form (9.), *bestimmt die zugehörige eingliedrige Gruppe und führt alle Transformationen derselben auf eine ganz beliebige Fläche aus, so erhält man* ∞' *Flächen, die einem Orthogonalsysteme angehören. Dabei liefert die Formel* (9.) *die allgemeinste infinitesimale Berührungstransformation von dieser Beschaffenheit.*

Eine allgemeinere Methode zur Construction von Orthogonalsystemen erhält man, indem man in (9.) die Coefficienten a, b_1, b_2, b_3, c als Functionen eines Parameters auffasst.

An einer anderen Stelle werde ich den hier angegebenen Zusammenhang zwischen meinen alten Methoden zur Construction von Orthogonalsystemen und den Problemen der Mechanik genauer ausführen.

3.

Gestattet eine Differentialgleichung zweiter Ordnung eine continuirliche Gruppe von Punkttransformationen, so sind nach meinen älteren Untersuchungen nur die folgenden Fälle möglich:

1) Die Gruppe ist ähnlich mit der achtgliedrigen Gruppe

(I.) $$p,\ q,\ xq,\ xp,\ yp,\ yq,\ x^2p + xyq,\ xyp + y^2q\ ,$$

welche nur *eine* Differentialgleichung zweiter Ordnung, nämlich $y'' = 0$ invariant lässt.

2) Die Gruppe ist ähnlich mit der dreigliedrigen Gruppe

(II.) $$p,\ 2xp + yq\ ,\qquad x^2p + xyq\ ,$$

welche ∞' Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$y^3\, y'' = A = \text{Const.}$$

invariant lässt.

3) Die Gruppe ist ähnlich mit der Gruppe

(III.) $$p + q\ ,\quad xp + yq\ ,\quad x^2p + y^2q\ ,$$

welche ∞' Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$(x - y)\, y'^{-\frac{3}{2}}\, y'' + 2\,(y'^{\frac{1}{2}} + y'^{-\frac{1}{2}}) = a = \text{Const.}$$

invariant lässt.

Digitized by Google

4) Die Gruppe ist ähnlich mit der Gruppe

(IV.) $$p,\ q,\ xp + (x+y)q \ ,$$

welche ∞' Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$y'' + ke^{-y'} = 0 \qquad (k = \text{Const.})$$

invariant lässt.

5) Die Gruppe ist ähnlich mit der Gruppe

(V.) $$p,\ q,\ xp + cyq \ , \quad c \neq 0 \ , \ c \neq \infty \ , \ c \neq 1 \ ,$$

welche ∞' Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$y'' y'^{\frac{2-c}{c-1}} = a = \text{Const.}$$

invariant lässt.

6) Die Gruppe ist ähnlich mit der Gruppe

(VI.) $$p,\ q \ ,$$

welche jede Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form:

$$y'' - f(y') = 0$$

invariant lässt.

7) Die Gruppe ist ähnlich mit der Gruppe

(VII.) $$p,\ xp + yq \ ,$$

welche jede Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form:

$$y'' - yf(y') = 0$$

invariant lässt.

8) Die Gruppe ist ähnlich mit der Gruppe p, welche jede Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form

$$y'' - f(yy') = 0$$

invariant lässt.

Wir wollen nun insbesondere annehmen, dass eine Differentialgleichung zweiter Ordnung von der speciellen Form

(10.) $$y'' + f_3(xy)\,y'^3 + f_2(xy)\,y'^2 + f_1(xy)\,y' + f(xy) = 0$$

vorgelegt ist. Da eine jede Punkttransformation eine Differentialgleichung von dieser Form in eine ebensolche überführt, können wir sogleich schliessen, dass die Gruppe einer derartigen Gleichung nie die Form (IV.) besitzt, und dass sie die Form (I.) nur dann besitzt, wenn die betreffende Differentialgleichung durch

Punkttransformation in $y'' = 0$ übergeführt werden kann. Besitzt andererseits die Gruppe einer Differentialgleichung (10.) die Form (III.), so kann diese Differentialgleichung die Form

$$(x - y)\, y'' + 2y'^2 + 2y' = 0$$

und in Folge dessen auch die Form $y'' = 0$ erhalten. Besitzt endlich die Gruppe einer Differentialgleichung (10.) die Form (V.), so muss die Constante c eine unter den drei Gleichungen

$$\frac{c-2}{c-1} = 3\,, \quad \frac{c-2}{c-1} = 2\,, \quad \frac{c-2}{c-1} = 1\,, \quad \frac{c-2}{c-1} = 0$$

erfüllen; unter den drei entsprechenden Werthen

$$c = \frac{1}{2}\,, \quad c = 0\,, \quad c = \infty\,, \quad c = 2$$

kommen nach dem Vorangehenden nur die beiden offenbar gleichberechtigten Werthe

$$c = \frac{1}{2}\,, \quad c = 2$$

in Betracht; dabei ist leicht zu erkennen, dass die entsprechende Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' - a = 0$$

durch passende Wahl der Veränderlichen die Form $y'' = 0$ erhalten kann.

Diese einfachen Ueberlegungen, die sich weiter ausführen lassen, geben u. a. den folgenden Satz:

Gestattet die Schaar der geodätischen Curven einer Fläche, deren Krümmungsmaass nicht constant ist, mehr als zwei unabhängige infinitesimale Transformationen, so erzeugen diese Transformationen eine dreigliedrige Gruppe, welche die canonische Form $p,\ 2xp + yq,\ x^2p + xyq$ *besitzt. Die Bestimmung der betreffenden Curvenschaar verlangt im ungünstigsten Falle die Integration einer Riccati'schen Gleichung erster Ordnung. Die dreigliedrige Gruppe lässt immer eine Schaar bestehend aus* ∞^1 *geodätischen Curven invariant.*

4.

Ist eine r-gliedrige continuirliche Gruppe von *reellen* Transformationen einer einfachen Mannigfaltigkeit x vorgelegt, so er-

Digitized by Google

kennt man, indem man einen reellen Punkt $x = a$ festhält, dass die entsprechenden ∞^{r-1} reellen Transformationen eine *reelle* Untergruppe bilden. Man findet in dieser Weise ∞^1 reelle $(r-1)$-gliedrigen Untergruppen.

Daraus folgt, dass jede reelle Gruppe der einfachen Mannigfaltigkeit x durch *reelle Variabelnänderung* eine unter den drei Formen

$$p; \quad p, xp; \quad p, xp, x^2p$$

erhalten kann.

Lässt eine reelle Gruppe von Punkttransformationen einer Ebene nur *eine* Differentialgleichung erster (resp. zweiter) Ordnung invariant, so ist diese Differentialgleichung reell; lässt sie zwei und nur zwei Differentialgleichungen erster Ordnung invariant, so sind dieselben entweder alle beide reell oder imaginär conjugirt.

Indem man diese Bemerkungen mit meiner allgemeinen Bestimmung von allen r-gliedrigen Gruppen einer Ebene verbindet, findet man sozusagen ohne neue Rechnungen canonische Formen, auf welche alle reelle r-gliedrigen Gruppen von Punkttransformationen einer Ebene durch reelle Aenderungen der Veränderlichen gebracht werden können.

Nur für den Fall, dass die betreffende Gruppe zwei und nur zwei Curvenschaaren $\varphi(xy) = a$, $\psi(xy) = b$, welche paarweise imaginär conjugirt sind, invariant lässt, treten neue canonische Formen auf. Man findet dieselben, indem man alle reelle Gruppen von Punkttransformationen aufstellt, welche Kreise in Kreise überführt; noch schneller kommt man zum Ziele, wenn man in die von mir (Math. Ann. Bd. XVI, S. 524, C) aufgestellten Gruppen statt x y die neuen Veränderlichen ξ η durch die Substitution

$$x = \xi + i\eta, \qquad y = \xi - i\eta$$

einführt und sodann verlangt, dass die hervorgehenden r-gliedrigen Gruppen r reelle unabhängige infinitesimale Transformationen enthalten sollen.

Aehnliche Ueberlegungen geben alle *reellen* unendlichen continuirlichen Gruppen von Punkttransformationen der Ebene, alle reellen projectiven continuirlichen Gruppen der Ebene u.s.w.

Digitized by Google

Friedrich Engel, *Zur Invariantentheorie der Systeme von Pfaff'schen Gleichungen.* (Vorgelegt v. d. w. M. A. Mayer.)

Die Invariantentheorie einer einzelnen Pfaff'schen Gleichung ist schon lange erledigt, dagegen bleibt für die Systeme von Pfaff'schen Gleichungen fast noch Alles zu thun. Ein kleiner Anfang hierzu soll im Folgenden gemacht werden.

In § 1 erinnere ich an den Zusammenhang, welcher zwischen den Systemen:

$$(1.) \qquad \sum_1^n{}_i \alpha_{\mu i}(x_1 \ldots x_n)\, dx_i = 0 \quad (\mu = 1 \ldots m)$$

von m unabhängigen Pfaff'schen Gleichungen und den Systemen:

$$(2.) \qquad A_k f = \sum_1^n{}_i \beta_{ki}(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (k = 1 \ldots n - m)$$

von $n - m$ unabhängigen linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung stattfindet. Obwohl dieser Zusammenhang längst bekannt ist, glaubte ich doch denselben kurz begründen zu müssen, um das Verständniss der übrigen Paragraphen zu erleichtern.

In § 2 und § 3 entwickle ich zwei verschiedene Methoden, um aus einem vorgelegten Systeme von Pfaff'schen Gleichungen neue Systeme dieser Art abzuleiten, welche mit dem ursprünglichen System invariant verknüpft sind. Diese beiden Methoden sind neu. Besonders möchte ich auf den einfachen aber wichtigen Satz 4, S. 165 aufmerksam machen, auf dem die Methode des § 3 beruht.

In § 4 endlich gebe ich eine vollständige Invariantentheorie der Systeme von zwei unabhängigen Pfaff'schen Gleichungen in vier Veränderlichen.

Digitized by Google

§ 1.

Man kann jedes System (1.) von PFAFF'schen Gleichungen auf zwei verschiedene Weisen deuten.

Erstens kann man es als ein System von Differentialgleichungen auffassen und kann sich dementsprechend die Aufgabe stellen, in den Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$ alle Gleichungensysteme zu bestimmen, welche (1.) erfüllen, das heisst alle Gleichungensysteme:

$$\Phi_1(x_1 \cdots x_n) = 0 \ , \ \cdots \Phi_q(x_1 \cdots x_n) = 0 \ ,$$

welche so beschaffen sind, dass die Gleichungen (1.) vermöge

$$\Phi_1 = 0 \ , \ \cdots \Phi_q = 0 \ , \ d\Phi_1 = 0 \ , \ \cdots d\Phi_q = 0$$

bestehen.

Aber man kann auch zweitens die Grössen $dx_1 \ldots dx_n$ in (1.) als die unendlich kleinen Zuwachse auffassen, welche eine infinitesimale Transformation:

$$Xf = \xi_1(x_1 \cdots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n(x_1 \cdots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_n}$$

den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ ertheilt. Für diese Auffassung definirt (1.) eine Schaar von unendlich vielen infinitesimalen Transformationen, nämlich den Inbegriff aller infinitesimalen Transformationen Xf, welche die m Gleichungen:

$$(3.) \qquad \sum_1^n{}_i \, a_{\mu i}(x_1 \cdots x_n)\xi_i = 0 \quad (\mu = 1 \cdots m)$$

identisch befriedigen. Die nächstliegende Aufgabe würde dann sein: alle Gleichungensysteme in $x_1 \ldots x_n$ zu bestimmen, welche diese sämmtlichen infinitesimalen Transformationen gestatten; im Allgemeinen ist das eine von der obigen verschiedene Aufgabe.

Es seien nun:

$$\xi_1 = \xi_{k1}(x_1 \cdots x_n) \ , \ \cdots \xi_n = \xi_{kn}(x_1 \cdots x_n)$$
$$(k = 1 \cdots n - m)$$

$n - m$ solche Lösungensysteme der Gleichungen (3.), dass zwischen den $n - m$ infinitesimalen Transformationen:

$$X_k f = \sum_1^n{}_i \, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots n - m)$$

keine Identität von der Form:

$$\varphi_1(x_1 \cdots x_n) \cdot X_1 f + \cdots + \varphi_{n-m}(x_1 \cdots x_n) \cdot X_{n-m} f = 0$$

besteht, in welcher $\varphi_1 \cdots \varphi_{n-m}$ nicht sämmtlich verschwinden; dann stellt der Ausdruck:

$$(4.) \quad \chi_1(x_1 \cdots x_n) \cdot X_1 f + \cdots + \chi_{n-m}(x_1 \cdots x_n) \cdot X_{n-m} f$$

mit den $n - m$ willkürlichen Functionen: $\chi_1 \cdots \chi_{n-m}$ den Inbegriff aller infinitesimalen Transformationen dar, welche das System (1.) bei Zugrundelegung der zweiten Auffassung definirt. Der Ausdruck (4.) erscheint daher für die betreffende Auffassung nur als eine andere Schreibweise des Systems der PFAFF'schen Gleichungen (1.). Darin liegt, dass das System (1.) und der Ausdruck (4.) invariant mit einander verknüpft sind: jenes ist durch diesen eindeutig bestimmt und umgekehrt, und die betreffende Beziehung zwischen beiden bleibt erhalten, wenn man an Stelle von $x_1 \cdots x_n$ neue unabhängige Veränderliche einführt. Insbesondere ist klar, dass jede Transformation:

$$x_i' = F_i(x_1 \cdots x_n) \ , \quad (i = 1 \cdots n) \ ,$$

welche das System (1.) invariant lässt, auch den Inbegriff aller infinitesimalen Transformationen (4.) in sich überführt und umgekehrt.

Setzen wir alle Ausdrücke von der Form (4.) gleich Null, so erhalten wir das System der $n - m$ unabhängigen linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$X_1 f = 0 \ , \ \cdots \ X_{n-m} f = 0 \ ,$$

welches natürlich ebenfalls mit dem Systeme (1.) invariant verknüpft ist. Wir können daher sagen:

Zwischen den Systemen von m unabhängigen PFAFF'schen Gleichungen (1.) und den Systemen von $n - m$ linearen partiellen Differentialgleichungen (2.) besteht ein eindeutig umkehrbares Entsprechen: jedem Systeme der einen Art ist eindeutig umkehrbar ein System der andern Art zugeordnet.

Das System (2.), welches einem vorgelegten Systeme (1.) entspricht, erhält man offenbar durch Nullsetzen aller $(m + 1)$-reihigen Determinanten der Matrix:

Digitized by Google

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \alpha_{11} & \cdot & \cdot & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{m1} & \cdot & \cdot & \alpha_{mn} \end{vmatrix};$$

andererseits bekommt man das einem vorgelegten Systeme (2.) entsprechende System (1.) durch Nullsetzen aller $(n-m+1)$-reihigen Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} dx_1 & \cdot & \cdot & dx_n \\ \beta_{11} & \cdot & \cdot & \beta_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{n-m,1} & \cdot & \cdot & \beta_{n-m,n} \end{vmatrix}.$$

Ist ein System (1.) in aufgelöster Form:

$$(1'.) \qquad dx_\mu - \sum_1^{n-m} {}_k\, a_{m+k,\mu}\, dx_{m+k} = 0 \quad (\mu = 1 \cdots m)$$

vorlegt, so kann man auch das entsprechende System (2.) sofort in aufgelöster Form hinschreiben, es lautet:

$$(2'.) \qquad \mathfrak{A}_{m+k} f = \frac{\partial f}{\partial x_{m+k}} + \sum_1^m {}_\mu\, a_{m+k,\mu} \frac{\partial f}{\partial x_\mu} = 0$$
$$(k = 1 \cdots n-m).$$

Diese Bemerkungen genügen für das Folgende.

§ 2.

Die beiden oben besprochenen Auffassungen, welche bei Betrachtung eines Systems von PFAFF'schen Gleichungen möglich sind, führen uns sehr leicht zu einem neuen Systeme von PFAFF'schen Gleichungen, welches mit dem ursprünglichen invariant verknüpft ist.

Ein System von m unabhängigen PFAFF'schen Gleichungen sei in aufgelöster Form vorgelegt:

$$(5.) \quad \Delta_\mu = dx_\mu - \sum_1^{n-m} {}_k\, a_{m+k,\mu}\, dx_{m+k} = 0 \quad (\mu = 1 \cdots m).$$

Digitized by Google

Deuten wir in demselben $dx_1 \ldots dx_n$ als die unendlich kleinen Zuwachse, welche $x_1 \ldots x_n$ bei einer infinitesimalen Transformation erhalten, so definirt (5.) wie wir oben gesehen unendlich viele infinitesimale Transformationen, deren allgemeines Symbol verknüpft ist:

$$(6.) \quad Wf = \chi_{m+1}(x_1 \cdots x_n) \cdot \mathfrak{A}_{m+1} f + \cdots + \chi_n(x_1 \cdots x_n) \mathfrak{A}_n f \,,$$

wo die $\mathfrak{A}_{m+k} f$ die unter (2'.) angegebene Form besitzen.

Die Schaar der infinitesimalen Transformationen (6.) ist mit dem Systeme (5.) invariant verknüpft. Denken wir uns daher auf das System (5.) alle infinitesimalen Transformationen (6.) ausgeführt, so erhalten wir nothwendig ein neues System von PFAFF'schen Gleichungen, welches mit dem Systeme (5.) invariant verknüpft ist.

Bei Ausführung der infinitesimalen Transformation Wf geht das System (5.) über in:

$$(7.) \qquad \Delta_\mu + \delta t \cdot W\Delta_\mu = 0 \quad (\mu = 1 \cdots m) \,,$$

wo δt eine unendlich kleine Grösse bezeichnet und wo $W\Delta_\mu$ den Werth:

$$W\Delta_\mu = d(Wx_\mu) - \sum_1^{n-m k} W a_{m+k,\mu} \cdot dx_{m+k} - \sum_1^{n-m k} a_{m+k,\mu} \cdot d(Wx_{m+k})$$

besitzt[1]). Nun aber ergiebt sich:

$$W\Delta_\mu = \sum_1^{n-m k} \chi_{m+k}(x) \cdot \mathfrak{A}_{m+k} \Delta_\mu + \sum_1^{n-m k} d\chi_{m+k} \{\mathfrak{A}_{m+k} x_\mu - \sum_1^{n-m j} a_{m+j,\mu} \cdot \mathfrak{A}_{m+k} x_{m+j}\} \,,$$

es ist also:

$$W\Delta_\mu = \sum_1^{n-m k} \chi_{m+k}(x) \cdot \mathfrak{A}_{m+k} \Delta_\mu \,.$$

Berücksichtigen wir daher, dass $\chi_{m+1} \ldots \chi_n$ willkürliche Func-

---

1) Vgl. »Theorie der Transformationsgruppen«, Erster Abschnitt, unter Mitwirkung von ENGEL bearbeitet von SOPHUS LIE, Leipzig 1888 bei Teubner und zwar S. 529, 530.

Digitized by Google

tionen ihrer Argumente sind, so erkennen wir, dass die Gleichungen (7.) durch die folgenden ersetzt werden können:

$$(7'.)\quad \Delta_1 = 0\ ,\ \cdots \Delta_m = 0\ ,\ \mathfrak{A}_{m+k}\Delta_1 = 0\ ,\ \cdots \mathfrak{A}_{m+k}\Delta_m = 0$$
$$(k = 1 \cdots n - m)\ .$$

Um das Gleichungensystem (7'.) wirklich aufzustellen, bemerken wir, dass für jede Function f von $x_1 \ldots x_n$ die Gleichung:

$$(8.)\qquad df = \sum_1^m{}_\pi \frac{\partial f}{\partial x_\pi}\,\Delta_\pi + \sum_1^{n-m}{}_j\, \mathfrak{A}_{m+j} f \cdot dx_{m+j}$$

identisch besteht. Mit Hülfe dieser Identität bekommen wir:

$$(9.)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{A}_{m+k}\Delta_\mu &= d\mathfrak{a}_{m+k,\mu} - \sum_1^{n-m}{}_j\, \mathfrak{A}_{m+k}\mathfrak{a}_{m+j,\mu}\cdot dx_{m+j} \\ &= \sum_1^{n-m}{}_j\, (\mathfrak{A}_{m+j}\mathfrak{a}_{m+k,\mu} - \mathfrak{A}_{m+k}\mathfrak{a}_{m+j,\mu})\, dx_{m+j} + \\ &\quad + \sum_1^m{}_\pi \frac{\partial \mathfrak{a}_{m+k,\mu}}{\partial x_\pi}\,\Delta_\pi\ , \end{aligned}\right.$$

was sich unter Benutzung der Abkürzung:

$$(10.)\qquad \mathfrak{A}_{m+j}\mathfrak{A}_{m+k} f - \mathfrak{A}_{m+k}\mathfrak{A}_{m+j} f = \mathfrak{B}_{jk} f$$

auch schreiben lässt:

$$(9'.)\qquad \mathfrak{A}_{m+k}\Delta_\mu = \sum_1^{n-m}{}_j\, \mathfrak{B}_{jk} x_\mu \cdot dx_{m+j} + \sum_1^m{}_\pi \frac{\partial \mathfrak{a}_{m+k,\mu}}{\partial x_\pi}\,\Delta_\pi\ .$$

Demnach hat das Gleichungensystem (7'.) die Form:

$$(11.)\qquad \Delta_\mu = 0\ ,\ \sum_1^{n-m}{}_j\, \mathfrak{B}_{jk} x_\mu \cdot dx_{m+j} = 0$$
$$(\mu = 1 \cdots m\ ;\ k = 1 \cdots n - m)$$

und wir haben den

Satz 1. *Ist*:

$$(5.)\qquad \Delta_\mu = dx_\mu - \sum_1^{n-m}{}_k\, \mathfrak{a}_{m+k,\mu}\, dx_{m+k} = 0$$
$$(\mu = 1 \cdots m)$$

Digitized by Google

ein System von m unabhängigen Pfaff'schen Gleichungen in den Veränderlichen $x_1 \dots x_n$ und ist:

$$\mathfrak{A}_{m+k} f = \frac{\partial f}{\partial x_{m+k}} + \sum_1^m{}^{\mu} a_{m+k,\mu} \frac{\partial f}{\partial x_\mu} = 0$$

$$(k = 1 \cdots n - m)$$

das zugeordnete System von $n - m$ unabhängigen linearen partiellen Differentialgleichungen, so ist das System der Pfaff'schen Gleichungen:

(7'.) $\Delta_\mu = 0$, $\mathfrak{A}_{m+k} \Delta_\mu = 0$ $(\mu = 1 \cdots m;\ k = 1 \cdots n - m)$,

oder ausführlicher geschrieben das System:

$$(12.)\quad \begin{cases} dx_\mu - \sum_1^{n-m}{}^{k} a_{m+k,\mu}\, dx_{m+k} = 0 , \\ \sum_1^{n-m}{}^{k} \{\mathfrak{A}_{m+k} a_{m+j,\mu} - \mathfrak{A}_{m+j} a_{m+k,\mu}\}\, dx_{m+k} = 0 \\ \qquad (\mu = 1 \cdots m;\ j = 1 \cdots n - m) \end{cases}$$

mit dem Systeme (5.) invariant verknüpft.

Unter Umständen fällt das Gleichungensystem (12.) mit dem Systeme (5.) selbst zusammen, dann nämlich, wenn die Ausdrücke $\mathfrak{B}_{kj} f$ alle identisch verschwinden; in diesem Falle gestattet das Gleichungensystem (5.) alle infinitesimalen Transformationen (6.) es ist daher unbeschränkt integrabel und die Gleichungen:

$$\mathfrak{A}_{m+1} f = 0 , \quad \cdots \mathfrak{A}_n f = 0$$

bilden ein $(n - m)$-gliedriges vollständiges System.

Das System (12.) kann natürlich wieder so gedeutet werden, dass es eine Schaar von infinitesimalen Transformationen definirt. Die infinitesimalen Transformationen dieser Schaar sind dadurch merkwürdig, dass sie alle das Gleichungensystem (5.) invariant lassen.

In der That, soll die infinitesimale Transformation:

$$Xf = \sum_1^n{}^{i} \xi_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

das System (5.) invariant lassen, so ist nothwendig und hinreichend, dass die m Ausdrücke $X\Delta_\mu$ sämmtlich vermöge (5.)

Digitized by Google

verschwinden. Nun haben die infinitesimalen Transformationen Xf, welche durch (12.) definirt sind, die Form:

$$Xf = \sum_1^{n-m}{}_k \xi_{m+k} \mathfrak{A}_{m+k} f ,$$

wo die ξ_{m+k} die Gleichungen:

$$\sum_1^{n-m}{}_k (\mathfrak{A}_{m+k} a_{m+j,\mu} - \mathfrak{A}_{m+j} a_{m+k,\mu}) \xi_{m+k} = 0 \tag{13.}$$

$$(\mu = 1 \cdots m \,;\, j = 1 \cdots n - m)$$

identisch erfüllen, es wird daher:

$$X \Delta_\mu = \sum_1^{n-m}{}_k \xi_{m+k} \cdot \mathfrak{A}_{m+k} \Delta_\mu$$

oder mit Benutzung der Formel (9.) und der Identitäten (13.):

$$X \Delta_\mu = \sum_1^{n-m}{}_k \sum_1^{m}{}_\pi \xi_{m+k} \frac{\partial a_{m+k,\mu}}{\partial x_\pi} \cdot \Delta_\pi ,$$

was wirklich vermöge (5.) verschwindet.

Es gilt in Folge dessen der

Satz 2. *Ist*:

$$\Delta_\mu = dx_\mu - \sum_1^{n-m}{}_k a_{m+k,\mu} dx_{m+k} = 0 \tag{5.}$$

$$(\mu = 1 \cdots m)$$

ein System von m unabhängigen Pfaff'schen Gleichungen in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ *und ist:*

$$\mathfrak{A}_{m+k} f = \frac{\partial f}{\partial x_{m+k}} + \sum_1^{m}{}_\mu a_{m+k,\mu} \frac{\partial f}{\partial x_\mu} = 0$$

$$(k = 1 \cdots n - m)$$

das zugeordnete System von $n - m$ *unabhängigen linearen partiellen Differentialgleichungen, so gestattet das System* (5.) *alle infinitesimalen Transformationen:*

$$Xf = \sum_1^{n}{}_i \xi_i (x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} ,$$

Digitized by Google

welche $x_1 \dots x_n$ solche unendlich kleine Zuwachse: $dx_1 \dots dx_n$ ertheilen, dass die Gleichungen:

$$\Delta_\mu = 0 \ , \quad \mathfrak{A}_{m+k} \Delta_\mu = 0 \quad (\mu = 1 \cdots m \ ; \ k = 1 \cdots n - m)$$

identisch bestehen oder, was auf dasselbe hinauskommt, es gestattet alle infinitesimalen Transformationen Xf, welche die Gleichungen:

$$(14.) \quad \begin{cases} \xi_\mu - \sum_1^{n-m}{}_k \, \mathfrak{a}_{m+k,\mu} \xi_{m+k} = 0 \\ \sum_1^{n-m}{}_k \, (\mathfrak{A}_{m+k} \mathfrak{a}_{m+j,\mu} - \mathfrak{A}_{m+j} \mathfrak{a}_{m+k,\mu}) \xi_{m+k} = 0 \\ \qquad (\mu = 1 \cdots m \, ; \ j = 1 \cdots n - m) \end{cases}$$

identisch erfüllen.

Die eben besprochenen infinitesimalen Transformationen lassen selbstverständlich auch das mit (5.) invariant verknüpfte System (12.) invariant, also ist dieses letztere unbeschränkt integrabel:

Satz 3. *Das System der Pfaff'schen Gleichungen* (12.) *ist stets unbeschränkt integrabel.*

§ 3.

In diesem Paragraphen entwickeln wir eine andere Methode, um aus einem vorgelegten Systeme von PFAFF'schen Gleichungen neue derartige Systeme zu finden, welche mit dem ursprünglichen invariant verknüpft sind. Die betreffende Methode beruht auf dem folgenden wichtigen, aber bisher unbeachtet gebliebenen Satze:

Satz 4. *Mit dem Systeme der $n - m$ unabhängigen linearen partiellen Differentialgleichungen:*

$$(15.) \quad A_k f = \sum_1^n{}_i \, \beta_{ki} (x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (k = 1 \cdots n - m)$$

ist das System der Gleichungen:

$$(16.) \quad A_k f = 0 \ , \quad A_k A_j f - A_j A_k f = (A_k A_j) = 0 \quad (k, j = 1 \dots n - m)$$

invariant verknüpft.

Dieser Satz sagt zweierlei aus:

Erstens: Das System (16.) ist durch das System (15.) bestimmt unabhängig von der Form, in welcher man (15.) zu Grunde legt; ist also:

$$B_k f = \sum_1^{n-m} {}_j \psi_{kj}(x_1 \cdots x_n) A_j f = 0 \quad (k = 1 \cdots n-m)$$

irgend eine andere Form von (15.), so ist das Gleichungensystem:

$$B_k f = 0 \ , \quad B_k B_j f - B_j B_k f = 0$$
$$(k, j = 1 \cdots n-m)$$

mit (16.) äquivalent.

Zweitens: Verwandelt sich $A_k f$ bei Einführung der neuen Veränderlichen:

$$x_i' = F_i(x_1 \cdots x_n) \ (i = 1 \ \cdots n)$$

in $C_k f$ und demnach (15.) in:

$$C_1 f = 0 \ , \ \ldots \ C_{n-m} f = 0 \ ,$$

so erhält das System (16.) in den x' die Gestalt:

$$C_k f = 0 \ , \ C_k C_j f - C_j C_k f = 0$$
$$(k, j = 1 \ldots n-m) \ .$$

Das erste leuchtet unmittelbar ein, das zweite folgt aus dem bekannten Satze, dass der Ausdruck: $A_k A_j f - A_j A_k f$ bei Einführung der neuen Veränderlichen x' in: $C_k C_j f - C_j C_k f$ übergeht (vgl. Theorie der Transformationsgruppen I, S. 84, Satz 2).

Der Satz 4 gilt auch dann, wenn die $n-m$ Gleichungen (15.) nicht von einander unabhängig sind, er kann in Folge dessen sofort auf das System (16.) angewendet werden. Auf diese Weise erkennt man zunächst, dass das System:

$$(17.) \quad \begin{cases} A_k f = 0 \ , \ A_k A_j f - A_j A_k f = 0 \\ (A_h (A_k A_j)) = 0 \ , \ ((A_h A_l)(A_k A_j)) = 0 \\ (k, j, h, l, = 1 \ldots n-m) \end{cases}$$

mit (16.) invariant verknüpft ist; daraus aber erhellt, dass es auch zu dem ursprünglichen Systeme (15.) in dieser Beziehung steht.

Digitized by Google

Auf (17.) kann man wiederum den Satz 4 anwenden und so weiter.

Noch mag hier ein Satz ausdrücklich ausgesprochen werden, welcher in dem Satze 4 enthalten ist:

Satz 5. *Bleibt das System der $n - m$ linearen partiellen Differentialgleichungen:*

$$(15.)\quad A_k f = \sum_1^n{}_i \beta_{ki}(x_1 \cdots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad (k = 1 \cdots n - m)$$

bei der Transformation:

$$x_i' = F_i(x_1 \cdots x_n) \quad (i = 1 \cdots n)$$

invariant, so gilt dasselbe auch von dem Systeme der Gleichungen:

$$(16.)\qquad A_k f = 0\ ,\ A_k A_j f - A_j A_k f = (A_k A_j) = 0$$

$$(k, j = 1 \cdots n - m)\ .$$

In diesem Satze kann das System (16.) auch durch (17.) ersetzt werden und so weiter.

Die beiden Sätze 4 und 5 lassen sich nun ohne Weiteres auf Systeme von PFAFF'schen Gleichungen übertragen. Nach § 1 ist ja durch (15.) und (16.) je ein System von PFAFF'schen Gleichungen eindeutig bestimmt und es leuchtet ein, dass zu (16.) ein System von PFAFF'schen Gleichungen gehört, welches mit dem zu (15.) gehörigen invariant verknüpft ist. Denken wir uns daher zu grösserer Bequemlichkeit die Gleichungen (15.) in aufgelöster Form:

$$(15'.)\quad \mathfrak{A}_{m+k} f = \frac{\partial f}{\partial x_{m+k}} + \sum_1^m{}_\mu \mathfrak{a}_{m+k,\mu}(x_1 \cdots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_\mu} = 0$$

$$(k = 1 \ldots n - m)$$

vorgelegt, so erhalten wir aus Satz 4 den

Satz 6. *Mit dem Systeme der m unabhängigen Pfaff'schen Gleichungen:*

$$(18.)\quad dx_\mu - \sum_1^{n-m}{}_k \mathfrak{a}_{m+k,\mu}(x_1 \cdots x_n)\, dx_{m+k} = 0 \quad (\mu = 1 \cdots m)$$

ist dasjenige System Pfaff'scher Gleichungen invariant verknüpft, welches dem Systeme der linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$(16'.)\begin{cases} \mathfrak{A}_{m+k} f = \dfrac{\partial f}{\partial x_{m+k}} + \sum_1^m{}_\mu \, \mathfrak{a}_{m+k,\mu} \dfrac{\partial f}{\partial x_\mu} = 0 \\ (\mathfrak{A}_{m+k}\, \mathfrak{A}_{m+j}) = \sum_1^m{}_\mu \, (\mathfrak{A}_{m+k}\, \mathfrak{a}_{m+j,\mu} - \mathfrak{A}_{m+j} \mathfrak{a}_{m+k,\mu}) \dfrac{\partial f}{\partial x_\mu} = 0 \\ (k, j = 1 \cdots n - m) \end{cases}$$

entspricht.

und aus Satz 5 den

Satz 7. *Bleibt das System der Pfaff'schen Gleichungen* (18.) *bei der Transformation*:

$$x_i' = F_i (x_1 \cdots x_n) \; (i = 1 \cdots n)$$

invariant, so gilt dasselbe auch von demjenigen Systeme Pfaff'scher Gleichungen, welches dem Systeme (16'.) *entspricht.*

Wenn das System (18.) unbeschränkt integrabel ist, so verschwinden alle $(\mathfrak{A}_{m+k}\, \mathfrak{A}_{m+j})$ identisch, das System von PFAFF-schen Gleichungen, welches (16'.) entspricht, fällt daher mit (18.) zusammen und der Satz 6 liefert nichts Neues. Ist andererseits das System (18.) nicht unbeschränkt integrabel, so kann es vorkommen, dass (16'.) gerade n von einander unabhängige Gleichungen enthält; in diesem Falle schrumpft das zu (16'.) gehörige System PFAFF'scher Gleichungen auf $0 = 0$ zusammen und der Satz 6 liefert ebenfalls nichts Neues.

Ein wirklich neues mit (18.) invariant verknüpftes System PFAFF'scher Gleichungen erhalten wir durch den Satz 6 dann und nur dann, wenn (18.) nicht unbeschränkt integrabel ist und wenn (16'.) weniger als n von einander unabhängige Gleichungen enthält. Sind diese Bedingungen erfüllt und bilden die von einander unabhängigen unter den Gleichungen (16'.) kein vollständiges System, so kann man auf das zu (16'.) gehörige System PFAFF'scher Gleichungen wieder den Satz 6 anwenden und erhält so möglicher Weise ein neues mit (18.) invariant verknüpftes System PFAFF'scher Gleichungen. Unter Umständen kann man eine ganze Reihe solcher Systeme finden.

Ist $m = 2$ und ist (18.) nicht unbeschränkt integrabel, so enthält (16'.)gerade drei von einander unabhängige Gleichungen. Wir können daher den Satz aussprechen:

Digitized by Google

Satz 8. *Mit jedem nicht unbeschränkt integrabeln Systeme:*

$$dx_\mu - a_{n-1,\mu}\,dx_{n-1} - a_{n\mu}\,dx_n = 0 \tag{19.}$$
$$(\mu = 1 \cdots n-2)$$

von $n-2$ unabhängigen Pfaff'schen Gleichungen in $n > 3$ Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$ ist ein System von $n-3$ unabhängigen Gleichungen dieser Art invariant verknüpft; dasselbe wird erhalten durch Nullsetzen aller vierreihigen Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} dx_1 & \cdot & dx_{n-2} & dx_{n-1} & dx_n \\ a_{n-1,1} & \cdot & a_{n-1,n-2} & 1 & 0 \\ a_{n,1} & \cdot & a_{n,n-2} & 0 & 1 \\ \mathfrak{A}_{n-1}a_{n,1} - \mathfrak{A}_n a_{n-1,1} & \cdot & \mathfrak{A}_{n-1}a_{n,n-2} - \mathfrak{A}_n a_{n-1,n-2} & 0 & 0 \end{vmatrix} \tag{20.}$$

wo die Symbole $\mathfrak{A}_{n-1}f$ und $\mathfrak{A}_n f$ die Gestalt:

$$\mathfrak{A}_{n-2+k}f = \frac{\partial f}{\partial x_{n-2+k}} + \sum_1^{n-2}{}_\mu\, a_{n-2+k,\mu}\frac{\partial f}{\partial x_\mu} \quad (k = 1,2)$$

besitzen.

Aehnliche Sätze gelten für $m = n-3, n > 6$, für $m = n-4$, $n > 10$ und so weiter.

Von dem Satze 8 lässt sich eine bemerkenswerthe Anwendung machen.

In seiner Dissertation (American Journal Bd. X, S. 293—346) bestimmt Herr PAGE alle primitiven Gruppen des vierfach ausgedehnten Raumes. Besondere Schwierigkeiten macht ihm dabei der Nachweis, dass gewisse Gruppen dieses Raumes nicht primitiv sind. Die betreffenden sind transitiv und ausserdem folgendermassen beschaffen: Hält man bei einer solchen Gruppe einen Punkt von allgemeiner Lage fest, so bleibt in dem projectiven Raume der ∞^3 Richtungen, welche durch den Punkt gehen, ein ebenes Büschel von ∞^1 Richtungen invariant, nicht aber ein ebenes Bündel von ∞^2 Richtungen.

Auf Grund des Satzes 8 lässt sich mit Leichtigkeit nachweisen, dass die so definirten Gruppen sämmtlich imprimitiv sind.

In der That, es ist zunächst klar, dass jede der in Rede stehenden Gruppen des R_4 ein System von zwei unabhängigen PFAFF'schen Gleichungen in vier Veränderlichen invariant lässt, nicht aber eine einzelne PFAFF'sche Gleichung in diesen Veränder-

Digitized by Google

lichen. Wäre nun dieses System nicht unbeschränkt integrabel, so müsste es nach Satz 8 eine PFAFF'sche Gleichung geben, welche bei der Gruppe invariant bliebe, das aber ist ein Widerspruch. Folglich ist das betreffende System von PFAFF'schen Gleichungen unbeschränkt integrabel und besitzt ∞^2 zweifach ausgedehnte Integralmannigfaltigkeiten, welche den vierfach ausgedehnten Raum gerade einmal erfüllen und eine Zerlegung desselben bestimmen. Diese Zerlegung bleibt natürlich bei der Gruppe invariant und die Gruppe ist daher imprimitiv.

Die ziemlich langwierigen Rechnungen, mittelst deren Herr PAGE die Imprimitivität der besprochenen Gruppen nachweist, sind durch die eben angestellten Ueberlegungen erspart. Gleichwohl bleibt das Verdienst des Herrn PAGE ungeschmälert, denn einmal ist er der Erste, welcher alle primitiven Gruppen des vierfach ausgedehnten Raumes bestimmt hat und andererseits liefert seine Abhandlung überhaupt wichtige Beiträge zur Bestimmung aller transitiven Gruppen dieses Raumes.

§ 4.

Die gewonnenen Sätze gestatten uns, die Invariantentheorie der Systeme von zwei unabhängigen PFAFF'schen Gleichungen:

$$(21.) \qquad \sum_1^4{}_i \lambda_{i\mu}(x_1 \cdots x_n)\, dx_i = 0 \quad (\mu = 1, 2)$$

in vier Veränderlichen vollständig zu entwickeln.

Den Fall, dass das System (21.) integrabel ist, können wir sehr leicht erledigen.

Ist es nämlich unbeschränkt integrabel und sind $u_1(x_1 \dots x_4)$, $u_2(x_1 \dots x_4)$ zwei unabhängige Integralfunctionen desselben, so führen wir u_1, u_2 nebst zwei geeigneten Functionen u_3, u_4 der x als neue unabhängige Veränderliche ein, dann erhält es die einfache Form:

$$(21'.) \qquad du_1 = 0\,, \quad du_2 = 0\,.$$

Ist es andererseits zwar integrabel aber nicht unbeschränkt und ist $v_1(x_1 \dots x_4)$ eine Integralfunction, so führen wir neue Veränderliche $v_1 \dots v_4$ ein und bekommen:

$$(22.) \qquad dv_1 = 0\,, \quad \sum_2^4{}_i \sigma_i(v_1 \cdots v_4)\, dv_i = 0\,.$$

Digitized by Google

In diesen Gleichungen betrachten wir v_1 als eine Constante, dann ist:

$$\sigma_2\, dv_2 + \sigma_3\, dv_3 + \sigma_4\, dv_4 = 0$$

eine nicht integrable PFAFF'sche Gleichung in den Veränderlichen v_2, v_3, v_4 und kann daher nach der Theorie des PFAFF'schen Problems durch eine Transformation von der Gestalt:

$$u_i = \psi_i(v_2, v_3, v_4, v_1) \quad (i = 2, 3, 4)$$

auf die Form: $du_2 - u_3\, du_4 = 0$ gebracht werden. Setzen wir endlich: $v_1 = u_1$ und führen wir $u_1 \dots u_4$ in (22.) als neue Veränderliche ein, so ergibt sich:

(21.″) $$du_1 = 0\ , \quad du_2 - u_3\, du_4 = 0\ .$$

Auf diese Form kann also das System (21.) unter den gemachten Voraussetzungen gebracht werden.

Uebrig bleibt der interessantere Fall, dass das System (21.) überhaupt nicht integrabel ist. Den wollen wir jetzt behandeln.

Der Bequemlichkeit wegen denken wir uns das System (21.) in aufgelöster Form:

(23.) $$\begin{cases} \Delta_1 = dx_1 - \alpha_3(x_1 \cdots x_4)\, dx_3 - \alpha_4(x_1 \cdots x_4)\, dx_4 = 0 \\ \Delta_2 = dx_2 - \beta_3(x_1 \cdots x_4)\, dx_3 - \beta_4(x_1 \cdots x_4)\, dx_4 = 0 \end{cases}$$

vorgelegt. Da es nicht integrabel ist, giebt es dann sicher keine solchen Functionen ϱ_1 und ϱ_2 von $x_1 \dots x_4$, dass der Ausdruck: $\varrho_1 \Delta_1 + \varrho_2 \Delta_2$ ein vollständiges Differential wird.

Unser Erstes ist, das System von linearen partiellen Differentialgleichungen aufzustellen, welches (23.) zugeordnet ist. Es lautet:

(24.) $$\begin{cases} A_3 f = \dfrac{\partial f}{\partial x_3} + \alpha_3 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \beta_3 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \\ A_4 f = \dfrac{\partial f}{\partial x_4} + \alpha_4 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \beta_4 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

und ist unter den gemachten Voraussetzungen sicher kein zweigliedriges vollständiges System. Hieraus folgt, dass der Ausdruck

$$A_3 A_4 f - A_4 A_3 f = Bf = (A_3 \alpha_4 - A_4 \alpha_3) \frac{\partial f}{\partial x_1} + (A_3 \beta_4 - A_4 \beta_3) \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

nicht identisch verschwindet und dass die drei Gleichungen:

(24'.) $$A_3 f = 0 , \quad A_4 f = 0 , \quad Bf = 0$$

von einander unabhängig sind.

Dem Systeme (24'.) entspricht nun eine PFAFF'sche Gleichung, welche nach Satz 6, S. 167 mit dem Systeme der PFAFF'schen Gleichungen (23.) invariant verknüpft ist. Dieselbe besitzt die Gestalt:

$$\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 1 & 0 \\ \alpha_4 & \beta_4 & 0 & 1 \\ A_3\alpha_4 - A_4\alpha_3 & A_3\beta_4 - A_4\beta_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder:

(25.) $$\Delta = (A_3\beta_4 - A_4\beta_3)\, \Delta_1 - (A_3\alpha_4 - A_4\alpha_3)\, \Delta_2 = 0 ,$$

wofür wir auch schreiben können:

(25'.) $$\Delta = Bx_2 \cdot \Delta_1 - Bx_1 \cdot \Delta_2 = 0 ,$$

sie ist selbstverständlich nicht integrabel. Daraus schliessen wir, dass unter den beiden Gleichungen:

(26.) $$A_3 Bf - B A_3 f = C_3 f = 0 , \quad A_4 Bf - B A_4 f = C_4 f = 0$$

jedenfalls eine von $Bf = 0$ unabhängig ist, dass also die Determinanten:

(27.) $$\begin{vmatrix} Bx_1 & Bx_2 \\ C_3 x_1 & C_3 x_2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} Bx_1 & Bx_2 \\ C_4 x_1 & C_4 x_2 \end{vmatrix}$$

jedenfalls nicht beide identisch verschwinden.

Auf die PFAFF'sche Gleichung (25'.) wenden wir jetzt den Satz 1, S. 162 an, das heisst, wir bilden das System von PFAFF'schen Gleichungen:

(28.) $$\Delta = 0 , \quad A_3 \Delta = 0 , \quad A_4 \Delta = 0 , \quad B\Delta = 0 ,$$

welches nach dem betreffenden Satze mit der Gleichung (25.') und also auch mit dem ursprünglichen Systeme (23.) invariant verknüpft ist.

Um die Gleichungen (28.) wirklich aufzustellen, bemerken wir zunächst, dass für jede Function f von $x_1 \ldots x_4$ die Identität:

(29.) $$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta_2 + A_3 f \cdot dx_3 + A_4 f \cdot dx_4$$

besteht. Vermöge derselben ergiebt sich (vgl. S. 162):

$$A_3 \Delta_1 = d\alpha_3 - A_3\alpha_3 \cdot dx_3 - A_3\alpha_4 \cdot dx_4$$
$$= \frac{\partial \alpha_3}{\partial x_1} \cdot \Delta_1 + \frac{\partial \alpha_3}{\partial x_2} \cdot \Delta_2 - Bx_1 \cdot dx_4$$

und:

$$A_3 \Delta_2 = \frac{\partial \beta_3}{\partial x_1} \cdot \Delta_1 + \frac{\partial \beta_3}{\partial x_2} \cdot \Delta_2 - Bx_2 \cdot dx_4 \ ,$$

also wird:

$$A_3 \Delta = A_3 Bx_2 \cdot \Delta_1 - A_3 Bx_1 \cdot \Delta_2 +$$
$$+ \left(\frac{\partial \alpha_3}{\partial x_1} \cdot Bx_2 - \frac{\partial \beta_3}{\partial x_1} \cdot Bx_1\right) \Delta_1 +$$
$$+ \left(\frac{\partial \alpha_3}{\partial x_2} \cdot Bx_2 - \frac{\partial \beta_3}{\partial x_2} \cdot Bx_1\right) \Delta_2 \ ,$$

was sich auch folgendermassen schreiben lässt:

$$A_3 \Delta = (A_3 Bx_2 - BA_3 x_2)\, \Delta_1 - (A_3 Bx_1 - BA_3 x_1)\, \Delta_2 +$$
$$+ \left(\frac{\partial \alpha_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \beta_3}{\partial x_2}\right) \Delta \ ,$$

so dass wir bekommen:

$$A_3 \Delta = C_3 x_2 \cdot \Delta_1 - C_3 x_1 \cdot \Delta_2 + \left(\frac{\partial \alpha_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \beta_3}{\partial x_2}\right) \Delta$$

und ebenso:

$$A_4 \Delta = C_4 x_2 \cdot \Delta_1 - C_4 x_1 \cdot \Delta_2 + \left(\frac{\partial \alpha_4}{\partial x_1} + \frac{\partial \beta_4}{\partial x_2}\right) \Delta \ .$$

Da nun, wie oben gesagt, die Determinanten (27.) nicht beide verschwinden, so erkennen wir sofort, dass das System der drei Gleichungen:

$$\Delta = 0 \ , \quad A_3 \Delta = 0 \ , \quad A_4 \Delta = 0$$

mit dem Gleichungensysteme: $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$ äquivalent ist.

Nunmehr ist blos noch die Gleichung: $B\Delta = 0$ zu berechnen. Wir finden:

$$B\Delta = d(Bx_1) - B\alpha_3 \cdot dx_3 - B\alpha_4 \cdot dx_4$$
$$= d(Bx_1) - BA_3 x_1 \cdot dx_3 - BA_4 x_1 \cdot dx_4 \ ,$$

woraus sich mit Benutzung der Identität (29.) ergiebt:

$$B\Delta_1 = C_3 x_1 \cdot dx_3 + C_4 x_1 \cdot dx_4 + \sigma_1 \cdot \Delta_1 + \sigma_2 \cdot \Delta_2 \ .$$

Ebenso kommt:

$$B\Delta_3 = C_3x_2 \cdot dx_3 + C_4x_2 \cdot dx_4 + \tau_1 \cdot \Delta_1 + \tau_2 \cdot \Delta_2 \ ,$$

also:

$$B\Delta = (Bx_2 \cdot C_3x_1 - Bx_1 \cdot C_3x_2)dx_3 + (Bx_2 \cdot C_4x_1 - Bx_1 \cdot C_4x_2)dx_4 + \\ + \omega_1 \cdot \Delta_1 + \omega_2 \cdot \Delta_2 \ .$$

Wir ersehen hieraus, dass (28.) durch das System der drei von einander unabhängigen Gleichungen:

$$(30.) \quad \begin{cases} dx_1 - \alpha_3 dx_3 - \alpha_4 dx_4 = 0 \ , \ dx_2 - \beta_3 dx_3 - \beta_4 dx_4 = 0 \\ (Bx_1 \cdot C_3x_2 - Bx_2 \cdot C_3x_1)dx_3 + (Bx_1 \cdot C_4x_2 - Bx_2 \cdot C_4x_1)dx_4 = 0 \end{cases}$$

ersetzt werden kann. Dieses System (30.) ist sowohl mit der PFAFF'schen Gleichung (25′.) als mit dem ursprünglichen Gleichungensysteme (23.) invariant verknüpft.

Deutet man $dx_1 \ldots dx_4$ in der bekannten Weise als die unendlich kleinen Zuwachse, welche eine infinitesimale Transformation den Veränderlichen $x_1 \ldots x_4$ ertheilt, so bestimmt (30.) eine Schaar von infinitesimalen Transformationen, deren allgemeines Symbol man leicht angeben kann. Setzt man nämlich:

$$(31.) \quad Df = \begin{vmatrix} Bx_1 & Bx_2 \\ C_4x_1 & C_4x_2 \end{vmatrix} \cdot A_3f - \begin{vmatrix} Bx_1 & Bx_2 \\ C_3x_1 & C_3x_2 \end{vmatrix} \cdot A_4f$$

und versteht man unter χ eine willkürliche Function von $x_1 \ldots x_4$, so lautet das betreffende allgemeine Symbol einfach: $\chi(x_1 \ldots x_4) \cdot Df$. Nun aber ist das Gleichungensystem (30.) nur eine andere Form von (28.) und: $A_3f = 0$, $A_4f = 0$, $Bf = 0$ ist das System linearer partieller Differentialgleichungen, welches zu der PFAFF'schen Gleichung (25′.) gehört, also ergiebt sich aus Satz 2, S. 164, dass die PFAFF'sche Gleichung (25′.) bei allen infinitesimalen Transformationen von der Form: $\chi(x_1 \ldots x_4) \cdot Df$ invariant bleibt.

Nunmehr führen wir an Stelle von $x_1 \ldots x_4$ neue unabhängige Veränderliche $y_1 \ldots y_4$ ein, die so gewählt sind, dass die infinitesimale Transformation Df die Gestalt $\frac{\partial f}{\partial y_4}$ annimmt. In diesen neuen Veränderlichen erhält das System (30.) offenbar die Form:

$$(30'.) \quad dy_1 = 0 \ , \quad dy_2 = 0 \ , \quad dy_3 = 0$$

und die PFAFF'sche Gleichung (25′.) die nachstehende:

$$(25''.) \quad \beta_1 dy_1 + \beta_2 dy_2 + \beta_3 dy_3 = 0 \ ,$$

Digitized by Google

wo β_1, β_2, β_3 von y_4 frei sind, denn (25″.) muss augenscheinlich alle infinitesimalen Transformationen von der Form: $\psi(y_1 \dots y_4)\frac{\partial f}{\partial y_4}$ gestatten. Da nun aber die PFAFF'sche Gleichung (25″.) nicht integrabel ist, so können wir die Veränderlichen y_1, y_2, y_3 insbesondere so gewählt denken, dass (25″.) in der einfachen Form:

(25‴.) $$dy_2 - y_3 dy_1 = 0$$

erscheint.

Das Gleichungensystem (23.) bekommt in unsern neuen Veränderlichen ebenfalls eine neue Form. Diese Form ist nothwendig von dy_4 frei, denn (23.) ist in dem Systeme (30.) enthalten und dieses letztere nimmt die von dy_4 freie Form (30′.) an. Ferner muss die neue Form von (23.) jedenfalls die Gleichung (25‴.) umfassen, denn (23.) umfasst die Gleichung (25′.), also lautet die Form:

(23′.) $$dy_2 - y_3 dy_1 = 0 \ , \quad dy_3 - \omega(y_1 \cdots y_4)\, dy_4 = 0 \ .$$

Hier ist die Function ω weder gleich Null noch gleich Unendlich, sonst wäre ja das System (23′.) unbeschränkt integrabel. Aus demselben Grunde ist ω auch nicht frei von y_4; führen wir daher $\omega(y_1 \dots y_4)$ als neues y_4 ein, so erhält (23′.) die einfache Gestalt:

(23″.) $$dy_2 - y_3 dy_1 = 0 \ , \quad dy_3 - y_4 dy_1 = 0 \ .$$

Fassen wir die bisherigen Ergebnisse des gegenwärtigen Paragraphen zusammen, so erhalten wir den bemerkenswerthen

Satz 9. *Jedes System von zwei unabhängigen Pfaff'schen Gleichungen:*

(32.) $$\sum_1^4{}_i \, \lambda_{i\mu}(x_1 \cdots x_4)\, dx_i = 0 \quad (\mu = 1, 2)$$

in vier Veränderlichen kann durch Einführung neuer unabhängiger Veränderlicher: $y_1 \dots y_4$ auf eine der drei Formen:

(32′.) $$dy_1 = 0 \ , \quad dy_2 = 0$$

(32″.) $$dy_2 - y_3 dy_1 = 0 \ , \quad dy_4 = 0$$

(32‴.) $$dy_2 - y_3 dy_1 = 0 \ , \quad dy_3 - y_4 dy_1 = 0$$

gebracht werden, je nachdem es unbeschränkt, beschränkt oder gar nicht integrabel ist.

Digitized by Google

Hiernach ist es leicht, die invarianten Eigenschaften anzugeben, welche ein beliebiges System (32.) von zwei unabhängigen PFAFF'schen Gleichungen gegenüber allen Transformationen in den vier Veränderlichen $x_1 \dots x_4$ besitzt. Ist nämlich $U_1 f = 0$, $U_2 f = 0$ das zu (32.) gehörige System von linearen partiellen Differentialgleichungen, so sind die betreffenden invarianten Eigenschaften nichts anderes als die folgenden beiden Zahlen: Erstens die Zahl der von einander unabhängigen unter den Gleichungen:

$$U_1 f = 0 \ , \quad U_2 f = 0 \ , \quad (U_1 U_2) = 0 \ ,$$

und zweitens die Zahl der von einander unabhängigen unter den Gleichungen:

$$U_1 f = 0 \, , \ U_2 f = 0 \, , \ (U_1 U_2) = 0 \, , \ (U_1 (U_1 U_2)) = 0 \, , \ (U_2 (U_1 U_2)) = 0 \, .$$

Auf Grund des Satzes 9 lassen sich auch alle Gruppen des vierfach ausgedehnten Raumes, welche ein nicht integrables System (32.) invariant lassen, in sehr einfacher Weise kennzeichnen.

Ist in $x_1 \dots x_4$ eine Gruppe vorgelegt, welche ein nicht integrables System (32.) invariant lässt, so denken wir uns solche neue unabhängige Veränderliche x, y, y', y'' eingeführt, dass (32.) die Form:

$$(33.) \qquad dy - y' dx = 0 \ , \quad dy' - y'' dx = 0$$

erhält; aus der ursprünglichen Gruppe wird dabei natürlich eine Gruppe in $x, y, y' y''$, welche (33.) invariant lässt. Nun geht aus den Untersuchungen von A. V. BÄCKLUND in den Mathematischen Annalen Bd. IX, S. 297 ff. hervor, dass jede Transformation in x, y, y', y'', welche (33.) invariant lässt, aus einer Berührungstransformation:

$$x_1 = X(x, y, y') \ , \quad y_1 = Y(x, y, y') \ , \quad y_1' = P(x, y, y')$$

der Ebene x, y durch Erweiterung entsteht. Folglich gilt der

Satz 10. *Jede Transformationsgruppe des vierfach ausgedehnten Raumes, welche ein nicht integrables System von zwei unabhängigen Pfaff'schen Gleichungen invariant lässt, ist mit einer Gruppe ähnlich, welche aus einer Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene x, y in der Weise entsteht, dass man die Transformationen dieser letzteren durch Hinzunahme des zweiten Differentialquotienten von y nach x erweitert.*

Digitized by Google

E. Study, *Complexe Zahlen und Transformationsgruppen.* (Vorgelegt v. d. wirkl. Mitglied S. Lie.)

Zweck der folgenden Zeilen ist, den Zusammenhang darzulegen, welcher zwischen den sogenannten Systemen von complexen Zahlen und bestimmten continuirlichen Gruppen von Transformationen besteht[1]).

Da einige der Sätze, zu welchen man bei Verfolgung dieses Zusammenhanges gelangt, sich auch noch auf gewisse Transformationsgruppen ausdehnen lassen, welche nicht nothwendig zu Systemen complexer Zahlen in Beziehung stehen, so erscheint es angezeigt, zuvörderst diese allgemeineren Gruppen, die einfach-transitiven Gruppen zu betrachten.

---

1) Dass zwischen den Systemen complexer Zahlen und gewissen Gruppen von Transformationen eine nahe Beziehung stattfindet, wird wohl keinem der Mathematiker entgangen sein, die sich überhaupt mit Systemen complexer Zahlen beschäftigt haben; ausdrücklich auf dieselbe hingewiesen hat aber wohl zuerst Herr Poincaré. Ich selbst habe im Herbst des Jahres 1886 einige Betrachtungen über diesen Gegenstand angestellt, und dieselben verschiedenen Mathematikern mitgetheilt; der in § 6 angegebene Hauptsatz ist aber erst zu Ende des Jahres 1888 hinzugekommen.

Von einer neuerdings veröffentlichten Abhandlung meines verehrten Freundes, Herrn Schur (»Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Zahlen« Math. Ann. Bd. 33, S. 50 [1888]), die sich ebenfalls auf den Zusammenhang zwischen complexen Zahlen und Transformationsgruppen bezieht, ist meine Arbeit nach Inhalt und Methode unabhängig.

Hinsichtlich der Theorie der Transformationsgruppen verweise ich auf das grundlegende Werk: *Theorie der Transformationsgruppen,* unter Mitwirkung von Fr. Engel bearbeitet von S. Lie, Leipzig 1888. Dasselbe wird im Folgenden einfach mit (Lie) citirt. Für uns kommt besonders in Betracht der Inhalt der Kapitel 16. 20. 21. 26. 27.

§ 1.

Allgemeines über reciproke Gruppen.

Nach der von Herrn Lie entwickelten Theorie ist jede continuirliche Gruppe mit ihrer Parametergruppe, einer einfach transitiven Gruppe, gleich zusammengesetzt; andererseits sind zwei gleichzusammengesetzte einfach-transitive Gruppen ähnlich. Also ist jede einfach-transitive Gruppe mit ihrer Parametergruppe ähnlich. Das heisst, man kann in jede vorgelegte einfach-transitive Gruppe, welche nicht ihre eigene Parametergruppe ist, neue Veränderliche (oder auch, falls man es vorzieht, neue Parameter) derart einführen, dass sie ihre eigene Parametergruppe wird.

In der That, sei vorgelegt eine einfach-transitive, von infinitesimalen Transformationen erzeugte Gruppe G_1, geschrieben in den Veränderlichen $x_1 \dots x_n$ und den Parametern $y_1 \dots y_n$. Seien dann $\bar{y}_1 \dots \bar{y}_n$ die Parameter einer Transformation der Gruppe, welche den beliebig, aber fest gewählten Punkt allgemeiner Lage $E(x_1^0 \dots x_n^0)$ in den Punkt $x_1 \dots x_n$ überführt, so werden, wegen der vorausgesetzten Eigenschaft der Gruppe G_1, die Veränderlichen $\bar{y}_1 \dots \bar{y}_n$ unabhängige Functionen von $x_1 \dots x_n$. Wir können daher $\bar{y}_1 \dots \bar{y}_n$ als neue Veränderliche einführen. Hierdurch geht aber die Gruppe in ihre Parametergruppe über. Denn seien $y[y_1, y_2, \dots y_n]$, y', y'' die Parametersysteme der Transformationen S, T, ST der Gruppe G_1, so wird die allgemeine Transformation der Parametergruppe von G_1 die Form haben:

$$y_i'' = \varphi_i(y_1 \cdots y_n,\ y_1' \cdots y_n') \quad (i = 1 \cdots n) ,$$

oder kürzer

$$y'' = \varphi(y, y') .$$

Hier sind $y_1 \cdots y_n$ als unabhängige Veränderliche, $y_1' \dots y_n'$ als Parameter, und $y_1'' \dots y_n''$ als abhängige Veränderliche zu denken. Die hingeschriebene Transformation ist diejenige Transformation T' der Parametergruppe, welche der Transformation T von G_1 entspricht. Nun sind aber nach Obigem y, y', y'' zugleich die Coordinatensysteme der drei Punkte $(E)S$, $(E)T$, $(E)ST$, welche aus dem willkürlich angenommenen Punkte E durch die Transformationen S, T, ST von G_1 hervorgehen. Von diesen drei Punkten ist der letzte dem ersten in der Transformation T von

Digitized by Google

G_1 zugeordnet, und zwar unabhängig von der Auswahl der Transformation S. Soeben haben wir aber gesehen, dass der Punkt $y_1' \dots y_n''$ dem Punkte $y_1 \dots y_n$ auch in der Transformation T' entspricht. Es fallen mithin die Transformationen T und T' zusammen.

Wir nehmen von hier ab an, die Veränderlichen seien bereits so gewählt, dass die einfach-transitive Gruppe G_1 ihre eigene Parametergruppe wird.

Alsdann wird eine jede symbolische Formel, welche die Zusammensetzung einer Transformation S aus gegebenen Transformationen von G_1 fordert, z. B. $S = S_1 S_2 S_3$ noch einer zweiten, bei anderen Gruppen nicht in gleicher Weise möglichen Deutung fähig. Es entspricht nämlich jetzt zugleich einer jeden in der Formel auftretenden Transformation ein gewisser Punkt des Raumes, derjenige Punkt nämlich, dessen Coordinaten die Parameter der Transformation sind. Die Formel giebt also zugleich eine Abhängigkeit zwischen verschiedenen Punkten des Raumes an.

Wir wollen nun, um derartige Abhängigkeiten einfach durch Formeln ausdrücken zu können, eine *symbolische Bezeichnung* einführen.

Sei $x_1 \dots x_n$ das Parametersystem der Transformation S, so stellen wir durch das Zeichen x den Punkt dar, welcher die Coordinaten $x_1 \dots x_n$ hat. Seien ferner y und z diejenigen Punkte, welche auf die nämliche Art den Transformationen T und $S.T$ entsprechen, so schreiben wir symbolisch

$$z = xy \ ;$$

wir bedienen uns also dieser Schreibart als einer Abkürzung für das Gleichungssystem

$$z_i = \varphi_i(x_1 \cdots x_n, \ y_1 \cdots y_n) \quad (i = 1 \cdots n) \ .$$

Seien S, T, R drei beliebige Transformationen von G_1, x, y, z die entsprechenden Punkte, so bezeichnen wir ebenso denjenigen Punkt, welcher der Transformation STR zugeordnet ist, symbolisch durch $(xy)z$ oder $x(yz)$, oder einfacher durch xyz; dieses Zeichen stellt also einen Punkt dar, dessen Coordinaten gegeben sind durch die Ausdrücke

$$\varphi_i(\varphi_1(x, y) \cdots \varphi_n(x, y), \ z_1 \cdots z_n)$$
$$= \varphi_i(x_1 \cdots x_n, \ \varphi_1(y, z) \cdots \varphi_n(y, z)) \ .$$

Aehnlich stellen wir weiterhin einen jeden Punkt dar, der einer aus beliebig vielen Transformationen von G_1 zusammengesetzten Transformation zugeordnet ist, was wohl nicht näher auseinandergesetzt zu werden braucht.

Sei ferner x' derjenige Punkt, welcher der Transformation S^{-1} (der entgegengesetzten Transformation von S) entspricht, so setzen wir

$$x' = x^{-1} .$$

Diese symbolische Gleichung dient uns mithin als Abkürzung für ein Gleichungssystem, das man folgendermassen erhält: Ergeben sich durch Auflösung der n Gleichungen

$$y_i' = \varphi_i(y_1 \cdots y_n, \; x_1 \cdots x_n)$$

die Gleichungen

$$y_i = \varphi_i(y_1' \cdots y_n', \; x_1' \cdots x_n') \; ,$$

worin $x_1' \cdots x_n'$ gewisse Functionen von $x_1 \cdots x_n$ sind:

$$x_i' = \psi_i(x_1 \cdots x_n) \quad (i = 1 \cdots n) \; ,$$

so ist das letztere Gleichungssystem gleichwerthig mit der symbolischen Formel $x' = x^{-1}$. Diese Formel stellt augenscheinlich eine involutorische Transformation dar; es ist natürlich auch umgekehrt

$$x_i = \psi_i(x_1' \cdots x_n') \quad (i = 1 \cdots n) \; .$$

Endlich werden wir, in folgerechter Weiterbildung der eingeführten Schreibart denjenigen Punkt, welcher der identischen Transformation $S^0 = T^0 = \ldots = 1$ entspricht, durch das Symbol x^0, oder auch nach Bedürfniss durch das Symbol y^0, oder endlich am Einfachsten durch das Symbol 1 darstellen. So geht aus der symbolischen Gleichung: $S S^{-1} = S^0 = 1$ diese andere hervor $x x^{-1} = x^0 = 1$, die nichts Anderes besagt, als dass $x_1 \ldots x_n$ und $x_1' \ldots x_n'$ die Parametersysteme entgegengesetzter Transformationen der Gruppe G_1 sind. Die Identitäten

$$x_i = \psi_i(\psi_1(x) \cdots \psi_n(x)) \quad (i = 1 \cdots n)$$

aber schreiben wir jetzt einfach so:

$$x = (x^{-1})^{-1}$$

u. s. w. u. s. w. Für das Rechnen mit den Symbolen $x, y, \ldots$ gelten offenbar alle Regeln, die für das Rechnen mit den Symbolen S, T Geltung haben. Es wird also z. B. $(xy)^{-1} = y^{-1} x^{-1}$.

Digitized by Google

Wie zweckmässig die eingeführten symbolischen Bezeichnungen sind, zeigt sich sogleich, da es gelingt, mit ihrer Hülfe eine Reihe von wesentlichen, grösstentheils bis jetzt noch nicht bemerkten Eigenschaften der einfach-transitiven Gruppen auf die einfachste Weise abzuleiten und durch Formeln zur Anschauung zu bringen. Zunächst ergibt sich eine symbolische Darstellung der Gruppe G_1 selbst:

1. *Die symbolische Gleichung*

$$x' = xa \quad , \tag{1.}$$

in welcher

x *als veränderlich*, a *als Parameter* (Parametersystem) *gedacht wird, stellt die allgemeine Transformation der Gruppe* G_1 *dar.*

$$x' = xa^{-1} \tag{2.}$$

ist die entgegengesetzte Transformation von (1.); $x' = xab$ ist diejenige Transformation von G_1, welche durch Zusammensetzung der Transformationen $x' = xa$ und $x' = xb$ entstanden ist; $x' = xa^{-1}ba$ ist diejenige Transformation von G_1, welche aus der Transformation $x' = xb$ entsteht, wenn man vermöge der Transformation $x' = xa$ neue Veränderliche einführt.

2. *Die symbolische Gleichung*

$$x' = ax \tag{3.}$$

gibt die allgemeine Transformation der zu G_1 *reciproken einfach-transitiven Gruppe* G_2.[1]) $x' = a^{-1}x$ ist die entgegengesetzte Transformation von (3.); $x' = bax$ ist die aus $x' = ax$ und $x' = bx$ zusammengesetzte Transformation; daher ist auch die Gruppe G_1 in der Schreibart (3.) ihre eigene Parametergruppe.

3. *Die reciproken Gruppen* G_1 *und* G_2 *sind vermöge der involutorischen Transformation* $x' = x^{-1}$ *zu einander ähnlich, so zwar, dass jeder Transformation* $x' = xa$ *von* G_1 *die Transformation* $x' = a^{-1}x$ *von* G_2 *zugeordnet wird.*

In der That, seien die Transformationen $x' = xa$ und $x' = x^{-1}$ durch S und T bezeichnet, so wird die Transformation $S^{-1}TS = STS$ gegeben durch die symbolische Gleichung

$$x' = ((x^{-1})a)^{-1} = a^{-1}x \ ;$$

1) Wir werden weiterhin das Wort »reciproke Gruppen« ohne den selbstverständlichen Zusatz »einfach-transitive« gebrauchen.

dies ist aber eine Transformation von G_2. Ueberdies sieht man sogleich, dass die zusammengesetzte Transformation $x' = xab$ der Transformationen $x' = xa$ und $x' = xb$ von G_1 übergeht in die Transformation $x' = (ab)^{-1}x = b^{-1}a^{-1}x$ von G_2, in eine Transformation also, die man auch unmittelbar durch Zusammensetzung derjenigen Transformationen von G_2 erhalten kann, die den Transformationen $x' = xa$ und $x' = xb$ von G_1 zugeordnet sind. Ueberhaupt sind G_1 und G_2 vermöge jeder Transformation $x' = \alpha x^{-1}\beta$ zu einander ähnlich; dieselbe führt die Transformation $x' = xa$ über in $x' = \alpha a^{-1}a^{-1}x$.

4. Die symbolische Gleichung

$$x' = axb \tag{4.}$$

gibt die allgemeine Transformation derjenigen Gruppe $G_{1,2}$, welche man erhält, wenn man die allgemeine Transformation von G_1 und die allgemeine Transformation von G_2 hinter einander ausführt. Man überzeugt sich sofort, dass G_1 und G_2 in dieser Gruppe invariant sind; ferner, dass die Gruppe $G_{1,2}$ nur $2n - m$ wesentliche Parameter hat, wenn G_1 und G_2 eine m-gliedrige Untergruppe gemein haben.

5. *Die symbolische Gleichung*

$$x' = a^{-1}xa \tag{5.}$$

gibt die allgemeine Transformation einer $(n - m)$-gliedrigen continuirlichen Gruppe $\mathfrak{S}$, *welche als Untergruppe von $G_{1,2}$ dadurch gekennzeichnet ist, dass ihre Transformationen den Punkt allgemeiner Lage $x = 1$ in Ruhe lassen.* In Folge einer unter Nummer 1. gemachten Bemerkung gibt die Gleichung (5.) an, wie die Transformationen von G_1 durch die Transformationen von G_2 unter einander vertauscht werden.

Hält man also in derjenigen Gruppe $G_{1,2}$, welche durch Zusammensetzung der Transformationen zweier reciproker Gruppen G_1 und G_2 entsteht, einen Punkt allgemeiner Lage fest, so ist die dadurch bestimmte grösste continuirliche Untergruppe $\mathfrak{S}$ *von $G_{1,2}$ mit der adjungirten Gruppe von G_1 und G_2 ähnlich.*

Die Gruppe $\mathfrak{S}$ ist vermöge der Transformation $x' = x^{-1}$ derart zu sich selbst ähnlich, dass immer zwei entgegengesetzte Transformationen $x' = a^{-1}xa$ und $x' = axa^{-1}$ einander zugeordnet werden.

Digitized by Google

Ist $m = 0$, so hat die Gruppe $\mathfrak{G}$ noch eine weitere bemerkenswerthe Eigenschaft. Sie hat nämlich alsdann, in der Form (5.) geschrieben, als *Parametergruppe* wieder die Gruppe G_1; schreibt man $\mathfrak{G}$ dagegen in der gleichwerthigen Form $x' = axa^{-1}$, so erhält man die Gruppe G_2 als Parametergruppe.

Auch diejenige continuirliche Untergruppe von $G_{1,2}$, welche einen anderen Punkt b allgemeiner Lage in Ruhe lässt, kann man sofort hinschreiben: Man braucht nur in die Gleichungen der Gruppe $\mathfrak{G}$: $x' = a^{-1}xa$ oder $x' = axa^{-1}$ vermöge der Transformation $x' = xb$ oder der anderen $x' = bx$ neue Veränderliche einzuführen. Man erhält dann zwei symbolische Darstellungen der gesuchten Gruppe:

$$x' = a^{-1}xb^{-1}ab \quad \text{und} \quad x' = bab^{-1}xa^{-1} .$$

Beide Schreibweisen sind unter einander gleichwerthig; sie gehen durch die Substitution $a = bab^{-1}$ oder $a = b^{-1}ab$ in einander über.

Zur Vervollständigung des Gesagten mag endlich noch die Beziehung angegeben werden, in welcher die infinitesimalen Transformationen der Gruppe $\mathfrak{G}$ zu denen von G_1 und G_2 stehen, wiewohl wir später keinen Gebrauch von ihr machen werden:

6. *Seien* $X_1 f \ldots X_m f$, $X_{m+1} f \ldots X_n f$ *unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe* G_1, *die so gewählt sind, dass jede ausgezeichnete Transformation von* G_1 *die Form*

$$\lambda_1 X_1 f + \cdots + \lambda_m X_m f$$

hat; mögen ferner die Ausdrücke $X_i f$ *durch die Transformation* $x' = x^{-1}$ *übergehen in* $\bar{X}_i f$; *so ist identisch*

$$X_i f + \bar{X}_i f = 0 \quad (i = 1 \cdots m),$$

$X_{m+1} f + \bar{X}_{m+1} f \cdots X_n f + \bar{X}_n f$ *aber sind die infinitesimalen Transformationen der Gruppe* $\mathfrak{G}$.

Auch dieser Satz ergibt sich uns ohne alle Rechnung. Sei

$$x_i' = x_i + \xi_i \delta t \tag{1.}$$

eine infinitesimale Transformation von G_1, welche durch die Transformation $x' = x^{-1}$ in die infinitesimale Transformation

$$x_i' = x_i + \bar{\xi}_i \delta t \tag{2.}$$

von G_2 übergeführt werden möge. Beide geben dann hinter ein-

ander ausgeführt eine Transformation von $\mathfrak{G}$ [siehe oben Formel (5.)]:

$$x_i' = x_i + (\xi_i + \bar{\xi}_i)\,\delta t. \tag{3.}$$

Ist nun (2.) insbesondere eine solche Transformation von G_2, welche zugleich G_1 angehört, so ist sie die entgegengesetzte Transformation von (1.), es ist also $\bar{\xi}_i$ identisch gleich $-\xi_i$. —

Die abgeleiteten Sätze sind für die allgemeine Theorie der Transformationsgruppen insofern von Bedeutung, als ja mit jeder continuirlichen Transformationsgruppe ein Paar von reciproken Gruppen G_1, G_2 verknüpft ist, nämlich die Parametergruppe der gegebenen Gruppe und ihre reciproke. Schreibt man die Transformationen der gegebenen Gruppe insbesondere in einer canonischen Form:

$$x_i' = x_i + \sum_1^q{}_k\, e_k \cdot X_k x_i + \cdots \quad (i = 1 \cdots n)$$

(Lie, Cap. 9, § 46, S. 171), so bilden die zugehörige Parametergruppe (eine »*canonische Parametergruppe*«) g_1, ihre reciproke g_2, und die adjungirte Gruppe $\mathfrak{G}$ drei Gruppen der von uns beschriebenen Art. Die Transformation $x' = x^{-1}$, erhält in diesem Falle einen besonders einfachen analytischen Ausdruck: Es ist keine andere, als die involutorisch- perspective Transformation

$$e_k' = -e_k\,.$$

Vermöge dieser Transformation sind also nach unserem allgemeinen Satze die canonische Parametergruppe und ihre reciproke Gruppe zu einander ähnlich.

§ 2.

Hülfssätze aus der Theorie der linearen Transformationen.

Ausser den in § 1 dargelegten Sätzen über reciproke Gruppen bedürfen wir für unsere weiteren Entwickelungen noch einiger Hülfssätze aus der Theorie der bilinearen Formen. Die betreffenden Sätze mögen hier kurz zusammengestellt werden; eine ausführlichere Ableitung derselben findet man in einer im Druck befindlichen, im Verlage von B. G. Teubner erscheinenden Schrift des Verfassers: »Methoden zur Theorie der ternären Formen«.

Digitized by Google

Eine lineare Transformation eines Gebietes n^{ter} Stufe kann bekanntlich dargestellt werden durch eine gleich Null gesetzte bilineare Form mit zwei Reihen von je n (sogenannten contragredienten) Veränderlichen:

$$S = (AX)\,(UP) = \Sigma a_{ik}\, x_i\, u_k \ .$$

Sei

$$T = (BX)\,(UQ) = \Sigma b_{ik}\, x_i\, u_k$$

eine zweite solche Form, so wird alsdann die Transformation, welche aus der Zusammensetzung der Transformationen $S = 0$ und $T = 0$ (in dieser Reihenfolge) entsteht, in gleicher Weise repräsentirt durch eine simultane Covariante der Formen S und T, das »Product« von S und T:

$$ST = (AX)\,(BP)\,(UQ) = \Sigma a_{ik}\, b_{kj}\, x_i\, u_j \ .$$

Die Form $(UX) = \Sigma x_i u_i$ vertritt die identische Transformation $S^0 = T^0$; sie genügt identisch den Gleichungen $S^0 S = S S^0 = S$. Zu jeder Form S, deren Discriminante nicht verschwindet, gehört ferner eine gewisse Form S^{-1}, welche gleich Null gesetzt die entgegengesetzte Transformation von $S = 0$ darstellt, u. s. w.[1]) Eine Schaar, und insbesondere eine continuirliche Gruppe von linearen Transformationen wird bestimmt durch ein gewisses System von Relationen zwischen den Coefficienten a_{ik}. Eine r-gliedrige continuirliche Gruppe enthält r linear unabhängige infinitesimale Transformationen, welche man durch r Formen des Typus

$$S^0 + \delta t\, S$$

darstellen kann, worin S insbesondere eine Form von verschwindender linearer Invariante $(AP) = \Sigma a_{ii}$, eine sogenannte *Normalform* bedeutet. Die Normalform S ist das »*Symbol*« der infinitesimalen Transformationen $S^0 + \delta t\, S$ der Gruppe; durch Gebrauch desselben gelangen eine Anzahl von wichtigen Eigenschaften der Gruppe in sehr einfacher Weise zum Ausdruck.

Sind $S_1 \ldots S_r$ die Symbole der unabhängigen infinitesimalen Transformationen der Gruppe, so ist $\lambda_1 S_1 + \cdots + \lambda_r S_r$ das Symbol der *allgemeinen* infinitesimalen Transformation der Gruppe; bezeichnet man durch $(S_i S_k)$ die Combinante $S_i S_k - S_k S_i$

---

1) Vergl. Frobenius, Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen. Crelle's Journ. Bd. 84.

Digitized by Google

der Formen S_i, S_k (die wieder eine Normalform ist), so bestehen $\frac{r \cdot r - 1}{2}$ Relationen

$$(S_i S_k) = \Sigma c_{iks} S_s ,$$

worin die Constanten c_{iks} die für die *Zusammensetzung* der Gruppe charakteristischen Constanten sind; führt man in das Symbol S vermöge einer endlichen Transformation T der Gruppe neue Veränderliche ein, so erhält man wieder eine bilineare Normalform derselben Schaar, die einfach so geschrieben werden kann: $T^{-1} S T$; endlich stellt die überall convergente Reihe

$$e^S = S^0 + S^1 + \frac{S^2}{2!} + \frac{S^3}{3!} + \cdots ,$$

wenn S das Symbol der allgemeinen *infinitesimalen* Transformation einer Gruppe ist, die allgemeine *endliche* Transformation derselben Gruppe dar, und zwar durch eine bilineare Form von der Determinante Eins.

Hat man zwei verschiedene projective Gruppen, von welchen die sämmtlichen Transformationen der einen mit sämmtlichen Transformationen der anderen vertauschbar sind, so besteht zwischen den Symbolen der beiderseitigen infinitesimalen Transformationen S und S' die Relation $(S S') = 0$, u. s. w. u. s. w.

§ 3.

Systeme von complexen Zahlen.

Wir wenden uns jetzt zur Definition eines »Systems von complexen Zahlen«. Wir setzen dabei der Kürze halber den Begriff einer aus n »Grundzahlen« oder »Haupteinheiten« mit reellen oder gewöhnlichen complexen Coefficienten gebildeten sogenannten complexen oder extensiven Grösse voraus; ferner die Begriffe der Multiplication und Division einer extensiven Grösse mit einer reellen oder complexen Zahl, sowie der Addition und der Multiplication von zwei extensiven Grössen. (Vgl. Grassmann, Ausdehnungslehre von 1862, Cap. 1, 2.) Es wird nun das System aller aus denselben Grundzahlen $e_1 \ldots e_n$ linear ableitbaren Grössen $a, b, \ldots$ unter folgenden Bedingungen ein »*System von complexen Zahlen*« genannt:

1. *Es muss das Product $e_i e_k$ von irgend zweien dieser Grundzahlen e_i und e_k wieder eine Zahl des Systems $= \Sigma \gamma_{iks} e_s$ sein*

Digitized by Google

(wobei die Coefficienten γ_{iks} reelle oder gewöhnliche complexe Zahlen sind.)

2. *Es muss das in der Formel* $(ab)c = a(bc)$ *ausgedrückte sogenannte associative Gesetz der Multiplication erfüllt sein.*

3. *Es muss in dem System eine Grösse* a^0 *vorhanden sein, welche den beiden Gleichungen* $a^0 x = x$, $x a^0 = x$ *unabhängig von* x *genügt.*

Ich habe an einem anderen Orte gezeigt, wie man auf Grund dieser Definition alle möglichen Systeme von zwei, drei oder vier Grundzahlen, und eine gewisse Klasse von Systemen mit beliebig vielen Grundzahlen bestimmen kann (Gött. Nachr. vom 2. März 1889, S. 241 u. ff.: »*Ueber Systeme von complexen Zahlen*«). Ich werde im Folgenden nicht vermeiden können, mich auf die Ergebnisse der genannten Untersuchung zu stützen; ich werde daher auch die weiteren Definitionen, durch welche ich in ihr den Begriff eines »Systems von complexen Zahlen« näher präcisirt habe, hier nicht ausführlich wiederholen, zumal eine solche Wiederholung an dieser Stelle zu viel Raum beanspruchen würde. Es sei daher nur kurz an jene Begriffe erinnert.

Zwei Systeme von je n Grundzahlen mit den charakteristischen Constanten γ_{iks}, γ'_{iks} heissen »*reciprok*«, wenn die Relationen bestehen:

$$\gamma_{iks} = \gamma'_{kis} \quad (i, k, s = 1 \cdots n) .$$

Zwei Systeme gehören demselben »*Typus*« an, wenn das eine aus dem anderen oder aus dem reciproken System des anderen dadurch hervorgeht, dass man an Stelle der Grundzahlen $e_1 \ldots e_n$ durch eine lineare Substitution von nicht verschwindender Determinante:

$$e_i = c_{i1}\bar{e}_1 + \cdots + c_{in}\bar{e}_n \quad (i = 1 \cdots n) ,$$

neue Grundzahlen einführt, wobei die Grössen c_{ik} gewöhnliche complexe Zahlen sind; zwei Systeme desselben »Typus« mit reellen Werthen der Constanten γ_{iks} gehören derselben »*Gestalt*« an, wenn das eine aus dem anderen oder aus dem reciproken System des anderen insbesondere durch eine lineare Substitution mit *reellen* Coefficienten hervorgeht.

Die oben definirte Grösse a^0 wird die »*Zahl Eins*« des

Systems genannt, und öfter einfach durch das Zeichen 1 dargestellt. —

Von den Rechnungsoperationen, welche man in einem System complexer Zahlen vornehmen kann, kommen für uns besonders in Betracht die Addition mehrerer complexer Zahlen, ferner die Multiplication und deren entgegengesetzte Operation, die man als »Division« bezeichnen kann. Bei letzterer handelt es sich hauptsächlich um die Auflösung linearer Gleichungen oder Gleichungssysteme der Form

$$ax = b \quad \text{oder} \quad ya = b \ ,$$

in welchen a und b gegebene, x und y zu suchende Zahlen eines vorgelegten Systems bedeuten.

Seien e_0, $e_1 \cdots e_{n-1}$ die Grundzahlen des Systems, ferner

$$a = a_0 e_0 + \cdots + a_{n-1} e_{n-1} \ ,$$
$$x = x_0 e_0 + \cdots + x_{n-1} e_{n-1} \ ,$$
u. s. w.

Rechnen wir dann in obigen beiden Gleichungen die Producte links aus, und vergleichen beiderseits die Coefficienten von $e_0 \cdots e_{n-1}$, so erhalten wir zwei Systeme von je n linearen Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten $x_0 \ldots x_{n-1}$ und $y_0 \ldots y_{n-1}$. Ob diese Gleichungen gemeinsame Lösungssysteme haben, beziehungsweise wie viele unabhängige Lösungen sie besitzen, kann dann in bekannter Weise durch Betrachtung ihrer Determinanten und Unterdeterminanten entschieden werden.

Von besonderer Wichtigkeit ist nun der Fall, wo die auf der rechten Seite obiger Gleichungen stehende Zahl b die Zahl Eins des Systems ist.

Auf diesen Fall bezieht sich der Satz:

Die Determinanten der beiden Gleichungen $ax = 1$ und $xa = 1$ sind nicht identisch verschwindende ganze Functionen der Coefficienten $a_0 \ldots a_{n-1}$ der Zahl a, welche dieselben einfachen Theiler haben. Sind diese Determinanten von Null verschieden, so haben beide Gleichungen die nämliche Lösung, die wir durch das Symbol $x = a^{-1}$ bezeichnen; im anderen Falle gibt es überhaupt keine Zahl x des Systems, welche einer dieser Gleichungen genügte.

Dass die genannten Determinanten nicht identisch verschwinden, folgt sofort, wenn wir für a den besonderen Werth

Digitized by Google

$a = 1$ setzen; wir haben dann in der Zahl $x = 1$ eine, und zwar die einzige Lösung einer jeden von beiden Gleichungen.

Sei nun die Zahl a des Systems von der Beschaffenheit, dass die Gleichung $ax = 1$ eine Lösung x besitzt, und seien $a_0 = 1$, $a_1^1 \ldots a^{k-1}$ $(k < n+1)$ linear unabhängige Potenzen der Zahl a, während a^k durch jene linear mit numerischen Coefficienten ausdrückbar sein soll:

$$a^k = \alpha_1 a^{k-1} + \cdots + \alpha_k a^0 \ .$$

Dann ist nothwendig $\alpha_k \neq 0$; denn sonst könnte man aus der vorstehenden Relation durch Multiplication mit x eine andere von der nämlichen Form herleiten, in welcher an Stelle der Zahl k eine kleinere Zahl getreten wäre; es wären also $a^0 \ldots a^{k-1}$ nicht linear unabhängig. Multipliciren wir nun obige Relation mit x, so ergibt sich

$$x = \frac{1}{\alpha_k} \{a^{k-1} - \alpha_1 a^{k-2} - \cdots - \alpha_{k-1} a^0\} \ ;$$

wir erhalten mithin einen eindeutig bestimmten Ausdruck für x, und zwar einen Ausdruck, der offenbar auch der anderen Gleichung $ax = 1$ genügt.

Uebrigens würde es bereits völlig hinreichend gewesen sein, nur zu zeigen, dass mit einer Lösung x_0 der Gleichung $ax = 1$ immer auch zugleich eine Lösung x_1 der Gleichung $xa = 1$ vorhanden ist; denn dann folgt aus dem associativen Gesetze der Multiplication $x_0 = (x_1 a)\, x_0 = x_1 (a x_0) = x_1$; es ist also nur *eine* Lösung beider Gleichungen vorhanden, und ihre Determinanten sind immer gleichzeitig von Null verschieden.

Verschwinden nun die genannten Determinanten nicht, so können wir aus der Lösung $x = a^{-1}$ der Gleichungen $ax = 1$ und $xa = 1$ ohne Weiteres auch die Lösungen der allgemeineren Gleichungen:

$$ax = b \quad \text{und} \quad ya = b$$

herleiten: es wird

$$x = a^{-1} b \ , \quad y = b a^{-1} \ ,$$

und zwar für alle Werthe von b.

Wir werden die Zahl a, wenn jene Determinanten von Null verschieden sind, als eine »allgemeine« Zahl des Systems bezeichnen, im Gegensatz zu den »speciellen Zahlen«, bei welchen das Symbol a^{-1} keine bestimmte Bedeutung mehr hat.

Ist die Zahl a eine specielle, so werden nicht allein die Gleichungen $ax = 1$ und $xa = 1$ unlösbar, sondern mit ihnen zugleich auch alle Gleichungen $ax = b$ und $ya = b$, in welchen die Zahl b eine allgemeine ist. Denn gesetzt, es wäre etwa $ax_0 = b$, so wäre $x_0 b^{-1}$ eine Lösung der Gleichung $ax = 1$, was unmöglich ist. Um zu entscheiden, ob die Gleichungen $ax = b$ und $ya = b$ für eine specielle Zahl b lösbar sind, bedarf man einer Untersuchung der Unterdeterminanten der diesen Gleichungssystemen zu entnehmenden Matrix. Ergibt sich das Vorhandensein einer Lösung, so kann diese natürlich keine bestimmte sein: a ist in unserem Falle das, was man einen »Theiler der Null« genannt hat. Der Inbegriff aller Zahlen des Systems, welche der Gleichung $ax = 0$ genügen, und ebenso der Inbegriff aller Zahlen, welche die Gleichung $ya = 0$ befriedigen, bilden mit der Zahl Eins des Systems zusammen bereits für sich je ein System von complexen Zahlen.

Nachdem wir nunmehr das Gebiet abgegrenzt haben, in welchem die der »Multiplication« entgegengesetzte Operation ausführbar ist, können wir mit den complexen Zahlen eines vorgelegten Systems alle Rechnungsoperationen vornehmen, welche sich aus der Addition (einschliesslich der Subtraction), Multiplication und Division in die Einheit in beliebiger Wiederholung zusammensetzen. Wir haben nur bei Ausführung der letztgenannten Operation, welche durch die symbolische Gleichung $x' = x^{-1}$ dargestellt wird, das Gebiet der speciellen Zahlen x auszuschliessen.

§ 4.

Die einfachsten mit einem System complexer Zahlen verknüpften Transformationsgruppen.

Gruppen G_1, G_2, $G_{1,2}$, $\mathfrak{S}$, wie wir sie in § 1 behandelt haben, sind mit einem jeden System von complexen Zahlen verbunden, und zwar in doppelter Weise.

Seien $a, b \ldots x, x', \ldots$ Zahlen eines beliebig vorgelegten Systems, z. B. $x = x_0 e_0 + \ldots + x_{n-1} e_{n-1}$. Dann können wir zunächst $x_0 \ldots x_{n-1}$ als *Verhältnissgrössen* auffassen, und als homogene Coordinaten eines Punktes in einem Gebiete n^{ter} Stufe oder Raume von $n - 1$ Dimensionen R deuten. Betrachten wir

a, b, ... als Parameter, x als unabhängige und x' als abhängig veränderliche Grösse, so wird jede der Formeln

$$x' = xa \ , \quad x' = ax \ , \quad x' = axb \ , \quad x' = a^{-1}xa \ ,$$

so lange die Parameter a und b allgemeine Zahlen des Systems (§ 3) sind, eine eigentliche Transformation des Raumes R darstellen. Lässt man die Zahlen a, b sich ändern, so erhält man einer jeden von ihnen entsprechend eine *Gruppe* von Transformationen; und zwar stehen die vier erhaltenen Gruppen genau in der Beziehung der oben untersuchten Gruppen G_1, G_2, $G_{1,2}$, $\mathfrak{G}$, und mögen daher ebenso bezeichnet werden. Zu bemerken ist nur, dass sie in *homogenen* Veränderlichen geschrieben sind, und dass daher die oben n genannte Zahl jetzt durch $n-1$ ersetzt werden muss. Wir wollen gleichzeitig auch $m-1$ für m schreiben; so dass nunmehr $m-1$ die Parameterzahl der grössten, G_1 und G_2 gemeinsamen Untergruppe bedeutet, und die Parameterzahlen der vier genannten Gruppen bezüglich werden:

$$n-1 \ , \quad n-1 \ , \quad 2n-m-1 \ , \quad n-m \ .$$

Die Gruppen G_1, G_2, $G_{1,2}$, $\mathfrak{G}$, mit welchen wir es hier zu thun haben, sind nun Gruppen von besonderer Art: es sind *projective* Gruppen; die Gruppe $\mathfrak{G}$ überdies ist, wie wir später sehen werden, eine sogenannte *lineare homogene* Gruppe. Wir können auch sogleich eine andere wesentliche Eigenschaft der genannten Gruppen angeben: Ein Punkt allgemeiner Lage bleibt bei keiner Transformation von G_1 oder G_2 stehen, ausser bei der identischen Transformation. Es kann daher ein Punkt a von allgemeiner Lage immer nur durch *eine* Transformation von G_1 (G_2) in einen anderen b übergeführt werden — nämlich durch die Transformation $x' = x\,a^{-1}b$ ($x' = b\,a^{-1}x$); die Gruppe $\mathfrak{G}$ besteht in Folge dessen aus dem Inbegriff *aller* Transformationen von $G_{1,2}$, welche den Punkt $x = 1$ in Ruhe lassen.

Man kann nun natürlich sofort die Schaaren von bilinearen Formen hinschreiben, welche nach § 2 die Gruppen G_1, G_2, $G_{1,2}$, $\mathfrak{G}$ zur Darstellung bringen. Hinsichtlich der Gruppen G_1 und G_2 ergibt sich hierbei die Bemerkung, dass die zu ihnen gehörigen Schaaren von bilinearen Formen *lineare Schaaren* sind, d. h. solche, in welchen die Coefficienten der allgemeinen Form als

Digitized by Google

lineare Functionen von n homogenen Parametern ausgedrückt werden können.

In der That, sei $e_i\, e_k = \sum_s \gamma_{iks}\, e_s$, $x = \sum x_i e_i$, $y = \sum y_i e_i$, so wird

$$xy = \sum_{i,k,s} \gamma_{iks}\, x_i\, y_k\, e_s \ .$$

Schreibt man hier u_s an Stelle von e_s, so entsteht eine Form mit drei Reihen von Veränderlichen:

$$\sum_{i,k,s} \gamma_{iks}\, x_i y_k u_s \ ;$$

betrachtet man in dieser Form $y_0 \ldots y_{n-1}$ als Parameter, so erhält man eine Schaar von bilinearen Formen, welche, gleich Null gesetzt, sämmtliche Transformationen der Gruppe G_1 darstellen.

Man kann nun weiter bemerken, dass die Multiplication der Zahlen unseres Systems genau identisch ist mit der »Multiplication« der zugehörigen bilinearen Formen.

Setzt man der Reihe nach $y = e_0, e_1 \ldots e_{n-1}$, und bezeichnet die den Grundzahlen e_i, e_k, e_μ zugehörigen bilinearen Formen durch

$$S_i = \sum_{\lambda,\mu} \gamma_{\lambda i\mu}\, x_\lambda\, u_\mu \ , \quad S_k = \sum_{\mu,\nu} \gamma_{\mu\varkappa\nu}\, x_\mu u_\nu \ ,$$

$$S_\mu = \sum_{\lambda,\nu} \gamma_{\lambda\mu\nu}\, x_\lambda\, u_\nu \ ,$$

so haben wir in Folge der bekannten aus dem associativen Gesetz $(e_\lambda e_i)\, e_\varkappa = e_\lambda (e_i\, e_\varkappa)$ fliessenden Relationen

$$\sum_\mu \gamma_{i\varkappa\mu}\, \gamma_{\lambda\mu\nu} = \sum_\mu \gamma_{\lambda i\mu}\, \gamma_{\mu\varkappa\nu}$$

thatsächlich auch für die Zusammensetzung der bilinearen Formen S_i und S_k die Identität:

a) $$S_i\, S_k = \sum_\mu \gamma_{i\varkappa\mu}\, S_\mu \ .$$

Die sogenannten complexen Zahlen sind hiernach nichts Anderes als abkürzende Bezeichnungen für bilineare Formen, welche gewisse Gruppen von linearen Transformationen darstellen; denn nichts hindert uns, die complexen Zahlen e_i geradezu mit den zugehörigen Formen S_i zu identificiren, da ja aus jeder Formel der einen Theorie durch blosse Aenderung der Bezeichnung eine

Digitized by Google

gleichlautende Formel der anderen Theorie abgelesen werden kann.

Bisher haben wir über die Wahl der Grundzahlen $e_0 \dots e_{n-1}$ keinerlei besondere Voraussetzung gemacht. Nunmehr wollen wir annehmen, es sei eine von ihnen, etwa e_0, die Zahl *Eins* des Systems, so dass $S_0 = (UX) = \Sigma u_i x_i$ wird; die anderen aber, $e_1 \dots e_{n-1}$ seien so gewählt, dass die linearen Invarianten $\sum_0^{n-1\lambda} \gamma_{\lambda i \lambda}$ der zugehörigen bilinearen Formen S_i verschwinden.

Die in der Multiplicationstafel des Systems auftretenden Constanten γ_{iks} erhalten dann zum Theil einfache Zahlenwerthe. Es wird nämlich jetzt offenbar

$$\gamma_{oii} = \gamma_{ioi} = 1\,, \quad \gamma_{oik} = \gamma_{iok} = 0 \quad (i \neq k)\,;$$

und ausserdem hat man für $i, k = 1 \dots n-1$ die Relationen

$$\gamma_{iko} = \gamma_{kio}\,.$$

Es ist nämlich die lineare Invariante der bilinearen Form $S_i S_k$ gleich derjenigen von $S_k S_i$, für die erstere aber findet man den Werth $n\gamma_{iko}$, für die letztere den Werth $n\gamma_{kio}$.

Diese Bemerkungen sind von Nutzen, weil sie zeigen, wie man aus der Multiplicationstafel des Systems die Werthe der für die Zusammensetzung der Gruppe G_1 charakteristischen Constanten c_{iks} auf eine sehr einfache Weise ablesen kann, und zwar auch in dem allgemeinen Falle, wo die Grundzahlen $e_0 \dots e_n$ nicht gerade in der genannten besonderen Art ausgewählt sind.

Zunächst ergeben sich durch Einsetzung der oben angeschriebenen Werthe der Constanten γ_{iks} $\frac{n-1 \cdot n-2}{2}$ Relationen der besonderen Form:

(a.) $e_i e_k - e_k e_i = \sum (\gamma_{iks} - \gamma_{kis}) e_s \quad (i, k, s = 1 \cdots n-1)\,.$

Andrerseits aber hat man, da die Formen S_i die Symbole der infinitesimalen Transformationen der Gruppe G_1 sind,

(b.) $S_i S_k - S_k S_i = \sum c_{iks} S_s \quad (i, k, s = 1 \cdots n-1)\,;$

vergleicht man beide Formeln, so folgt

(c.) $$c_{iks} = \gamma_{iks} - \gamma_{kis}\,.$$

Führt man nun an Stelle der Grundzahlen $e_0 \dots e_{n-1}$ neue Grundzahlen ein durch die Substitutionen:

$$\bar{e}_0 = e_0 \ , \quad \bar{e}_s = \lambda_s e_0 + e_s \ ,$$

so erhält man an Stelle der Relationen (a.) die folgenden:

$$\text{(d.)} \qquad \bar{e}_i \bar{e}_k - \bar{e}_k \bar{e}_i = \sum c_{iks} \bar{e}_s - \sum c_{iks} \lambda_s \bar{e}_0 \ ;$$

es treten also an Stelle der *Gleichungen* (a.) *Congruenzen* mit dem Modul $\bar{e}_0$. Die Grundzahlen $\bar{e}_1 \dots \bar{e}_{n-1}$ können aber als ganz beliebige Zahlen des Systems betrachtet werden, die nur der einen Bedingung zu genügen haben, dass die Zahl Eins des Systems nicht linear aus ihnen abgeleitet werden kann.

Setzen wir $S = \xi_1 S_1 + \dots + \xi_{n-1} S_{n-1}$, so wird $e^S = 0$ die allgemeine Transformation der Gruppe G_1 (vgl. S. 186). Diese Transformation können wir nunmehr, unter Benutzung der Bezeichnung

$$\bar{\xi} = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_{n-1} e_{n-1}$$

auch so schreiben:

$$x' = x e^{\bar{\xi}} \ .$$

Lassen wir die Constanten $\xi_1 \dots \xi_{n-1}$ sich derart ändern, dass ihre Verhältnisse die nämlichen bleiben, so erhalten wir sämmtliche Transformationen der allgemeinen eingliedrigen Untergruppe von G_1. Sind unter den Potenzen der Zahl $\bar{\xi}$ k linear unabhängige, $\bar{\xi}^0 = e_0, \bar{\xi}^1, \dots \bar{\xi}^{k-1}$, so wird ein Punkt allgemeiner Lage x durch die Transformationen der Gruppe in die Punkte einer Curve übergeführt, welche in einem ebenen Gebiete k^{ter} Stufe enthalten ist. Wir haben hier also eine einfache Deutung der (a. a. O. zur Classification der Systeme complexer Zahlen benutzten) Zahl k. Sie ist die Stufenzahl der kleinsten linearen Mannigfaltigkeit, welche eine allgemeine Bahncurve einer allgemein genug gewählten eingliedrigen Untergruppe der Gruppe G_1 umschliesst.

Eine andere Deutung der Zahl k ergibt sich aus der Betrachtung der Transformation $x' = x^{-1}$. Diese ist jetzt offenbar eine CREMONA'sche Transformation vom Grade $k - 1$. (Vgl. § 3, S. 189.) Sie ist also insbesondere eine projective Transformation, so oft k den Werth 2 hat.

Ist die Zahl x eine allgemeine (vgl. § 3), so ist der Punkt x ein Punkt allgemeiner Lage in Bezug auf die Transformationen

Digitized by Google

von G_1 und G_2, und ausserdem ein Punkt, in welchem die Transformation $x' = x^{-1}$ ein reguläres Verhalten zeigt; ein solcher Punkt entspricht zugleich einer eigentlichen (nicht ausgearteten) Transformation der Gruppen G_1 und G_2. Ist dagegen die Zahl x eine specielle, so artet die zugeordnete Transformation der Gruppen G_1 und G_2 aus; der Punkt x ist ferner eine singuläre Stelle der Transformation $x' = x^{-1}$, und er wird sowohl von den Transformationen der Gruppe G_1 als auch von denen der Gruppe G_2 nach weniger als $n - 1$ unabhängigen Richtungen fortgeführt. Man erhält den Inbegriff aller dieser Punkte specieller Lage, wenn man eine der in § 3 näher bezeichneten Determinanten gleich Null setzt. Der hierin liegende Satz, dass die $(n - 2)$-fach ausgedehnte gegenüber den Transformationen der Gruppe G_1 invariante Punktmannigfaltigkeit identisch ist mit der entsprechenden zu der Gruppe G_2 gehörigen Mannigfaltigkeit, ist übrigens nur ein besonderer Fall eines Satzes, der sich auf beliebige reciproke Gruppen erstreckt; man findet ohne Mühe, dass der Inbegriff aller Punkte, welche bei den Transformationen einer einfach-transitiven Gruppe oder irgend einer ihrer Untergruppen in Ruhe bleiben, eine gegenüber den Transformationen der reciproken Gruppe invariante Mannigfaltigkeit bildet.

§ 5.

Eine Eigenschaft der projectiven reciproken Gruppen.

Von dem bis jetzt Gesagten soll zunächst eine Anwendung auf die Theorie der Gruppe $\mathfrak{G}$ gemacht werden, welche zur Erkenntniss eines Satzes führt, der auch ausserhalb der Theorie der complexen Zahlen ein gewisses Interesse besitzt.

Wir gelangten vorhin zu der Gruppe $\mathfrak{G}$, indem wir die endlichen Transformationen $y' = yx$ der Gruppe G_1 auf die Punkte x des Raumes R (eindeutig-umkehrbar) bezogen, und nun die Vertauschung dieser Transformationen durch die Transformationen von G_1 selbst wiederum als eine Transformation von R deuteten. Wir haben auch hervorgehoben, dass die so erhaltene Gruppe $\mathfrak{G}$: $x' = a^{-1}xa$ selbstverständlich mit der adjungirten Gruppe von G_1 ähnlich ist.

Wir können aber die Transformationen von G_1 noch in einer zweiten bemerkenswerthen Weise auf Punkte des Raumes

R abbilden. Setzen wir nämlich $x = e^{\bar{\xi}}$, und stellen wir nunmehr die Transformationen von G_1 unter der Form $y' = y_1 e^{\bar{\xi}}$ dar, so können wir der so geschriebenen Transformation von G_1 auch den Punkt $\xi = e_0 + \bar{\xi}$ von R zuordnen. Es entspricht auch dann noch einem jeden Punkte ξ des Raumes R eine bestimmte Transformation von G_1; umgekehrt aber werden jetzt einer gegebenen Transformation von G_1 eine endliche oder unendliche Zahl discreter Punkte des Raumes R zugeordnet.

Die Gruppe, durch welche die Punkte des Raumes R nunmehr vermöge der Transformationen von G_1 vertauscht werden, ist bei Auffassung von $\xi_1 \dots \xi_{n-1}$ als *Cartesischen* Coordinaten augenscheinlich die *adjungirte* Gruppe von G_1.

Wir können ihre endlichen Gleichungen sofort hinschreiben: sie werden dargestellt durch die Formel

$$\xi' = e_0 + \bar{\xi}' = e_0 + a^{-1}\bar{\xi}a = a^{-1}(e_0 + \bar{\xi})a = a^{-1}\xi a\ ;$$

d. h. wir erhalten wieder die Gruppe $\mathfrak{G}$.

Wir werden nun alsbald sehen, dass die hier betrachteten Gruppen G_1 und G_2 überhaupt das allgemeinste Paar von reciproken projectiven Gruppen vorstellen. Wir wollen dies vorläufig als bewiesen annehmen, um die Entwickelung nicht unterbrechen zu müssen; und können dann, mit Zuziehung einer auf S. 191 gemachten Bemerkung, den Satz aussprechen:

Sind zwei reciproke Gruppen G_1 und G_2 beide projectiv, so ist diejenige Untergruppe $\mathfrak{G}$ der von G_1 und G_2 erzeugten Gruppe $G_{1,2}$, welche durch Festhaltung eines Punktes allgemeiner Lage bestimmt wird, continuirlich, und mit der adjungirten Gruppe von G_1 und G_2 durch eine projective Transformation ähnlich.

Zu einer neuen Auffassung und zugleich zu einer bemerkenswerthen Erweiterung dieses Satzes gelangen wir, wenn wir den Zusammenhang zwischen den beiden benutzten Abbildungen selbst wieder als eine Transformation des Raumes R deuten. Entspricht einer Transformation von der Determinante Eins der Gruppe G_1:

$$y' = yx = ye^{\bar{\xi}} = ye^{\xi - e_0}$$

in der ersten Abbildung der Punkt x, in der zweiten der Punkt ξ, so hängen die complexen Zahlen x und $\xi = e_0 + \bar{\xi}$ durch die Gleichung zusammen:

Digitized by Google

$$x = e^{\xi - e_0},$$

an deren Stelle wir, da es hier auf einen allen Coordinaten des Punktes x gemeinsamen Proportionalitätsfactor nicht ankommt, auch die folgende setzen können:

$$\varrho\, x = e^{\xi}.$$

Diese Formel bedeutet eine im Allgemeinen nicht projective Transformation des Raumes R, die einem jeden Punkte ξ einen einzigen Punkt x, einem Punkte x allgemeiner Lage aber noch eine endliche oder unendliche Zahl discreter Punkte ξ zuordnet. Man sieht sogleich, dass dieselbe mit allen Transformationen der Gruppe $\mathfrak{G}$ *vertauschbar* ist. Führt man daher durch diese Transformation in die Gleichungen der Gruppe $\mathfrak{G}$ an Stelle der Veränderlichen $\frac{x_1}{x_0} \ldots \frac{x_{n-1}}{x_0}$ die neuen Veränderlichen $\xi_1 \ldots \xi_{n-1}$ ein, so wird nicht allein der Inbegriff der Transformationen von $\mathfrak{G}$, sondern *jede einzelne* Transformation dieser Gruppe in sich selbst übergeführt. Durch die nämliche Transformation $x = e^{\xi}$ gehen aber aus den Gruppen G_1 und G_2 zwei im Allgemeinen nicht-projective Gruppen g_1 und g_2 hervor, welche ebenfalls eine einfache Bedeutung haben. Fasst man $\xi_1 \ldots \xi_{n-1}$, wie oben, als *Cartesische* Coordinaten auf, so ist die Gruppe g_1 offenbar keine andere, als diejenige Parametergruppe der Gruppe G_1, welche zu der canonischen Darstellung

$$\frac{x_i'}{x_0'} = \frac{x_i}{x_0} + \sum_1^{n-1}{}_k\, \xi_k X_k\left(\frac{x_i}{x_0}\right) + \cdots$$

oder der äquivalenten Darstellung

$$x' = x e^{\xi}$$

gehört.

Man erhält daher, unter Gebrauch einer bereits gelegentlich (S. 184) eingeführten Bezeichnung den folgenden Satz:

Sind zwei reciproke Gruppen G_1 und G_2 beide projectiv, so kann man nach geeigneter Wahl der projectiven Coordinaten eine im Allgemeinen nicht-projective Transformation angeben, welche die Gruppe G_1 in ihre canonische Parametergruppe g_1, G_2 natürlich in deren reciproke Gruppe g_2 überführt, und zugleich jede einzelne Transformation der Gruppe $\mathfrak{G}$ stehen lässt. Die Gruppe

$\mathfrak{G}$ wird bei dieser Wahl der Coordinaten die Adjungirte der Gruppen G_1, G_2.

Wünscht man die canonische Parametergruppe auch in der canonischen Form zu erhalten, so muss man natürlich in die Gleichungen der Gruppe G_1 durch die nämliche Transformation auch neue *Parameter* einführen.

Man überzeugt sich unschwer, dass die Transformation $x = e^{\xi}$ in jedem Falle, wo sie überhaupt projectiv ist, sich auf die *identische Transformation* reduciren muss. Die Reihe

$$e^{\bar{\xi}} = 1 + \bar{\xi} + \frac{\bar{\xi}^2}{2!} + \cdots$$

bricht dann immer mit dem zweiten Gliede ab. Dies tritt zum Beispiel ein, wenn die Gruppe G_1 aus der Gruppe aller Translationen des Raumes R besteht.

Um die Ueberführung der Gruppe G_1 in ihre canonische Parametergruppe auch im allgemeinen Falle zu leisten, hat man die Gleichung $x = e^{\xi}$, in welcher x das Parametersystem einer Transformation von der Determinante Eins der Gruppe G_1 bedeutet, nach $\bar{\xi}$ aufzulösen. Dies lässt sich durch ein allgemein zu kennzeichnendes Verfahren bewerkstelligen. Wir gehen indessen auf die Behandlung dieser Aufgabe nicht ein, da wir uns alsdann zu weit von dem eigentlichen Gegenstande unserer Untersuchung entfernen müssten. Es mag genügen, den aufgestellten Satz durch ein *Beispiel* zu erläutern.

Wir wählen ein System mit vier Grundzahlen e_0, e_1, e_2, e_3, dessen Multiplicationsregeln durch die Formeln dargestellt werden:

$$e_0 = 1\ , \quad e_1^2 = e_3\ , \quad e_1 e_2 = e_3\ ; \quad e_2 e_1 = -e_3\ , \quad e_2^2 = c\, e_3\ ,$$
$$e_1 e_3 = e_3 e_1 = e_2 e_3 = e_3 e_2 = e_3^2 = 0\ .$$

Dasselbe ist in der oben genannten Abhandlung (Gött. Nachr. S. 259) aufgestellt und als das System IX bezeichnet worden. Setzen wir:

$$\bar{\xi} = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3\ ,$$

so folgt:

$$e^{\bar{\xi}} = e_0 + \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \left\{\xi_3 + \frac{\xi_1^2 + c\,\xi_2^2}{2}\right\} e_3\ .$$

Digitized by Google

Die Transformation, durch welche wir in die Gleichungen der Gruppen G_1, G_2, $\mathfrak{G}$ neue Veränderliche einzuführen haben, lautet also, wenn wir x_0 von vorn herein gleich Eins nehmen:

$$(1.) \qquad x_1 = \xi_1 , \; x_2 = \xi_2 , \; x_3 = \xi_3 + \frac{\xi_1^2 + c\,\xi_2^2}{2} .$$

Die Gleichungen der Gruppen G_1 und $\mathfrak{G}$ schreiben wir am zweckmässigsten nicht allein in Bezug auf die Veränderlichen, sondern auch in Bezug auf die Parameter in nicht homogener Form:

$$(2.) \qquad \begin{cases} x_1' = x_1 + a_1 , & x_2' = x_2 + a_2 , \\ x_3' = x_3 + a_3 + (a_1 + a_2)\,x_1 - (a_1 - c\,a_2)\,x_2 , \end{cases}$$

$$(3.) \qquad \begin{cases} x_1' = x_1 , & x_2' = x_2 , \\ x_3' = x_3 + 2\,(a_2 x_1 - a_1 x_2) . \end{cases}$$

Führt man nun in die letzteren Gleichungen vermöge der Transformation (1.) neue Veränderliche ein, so bleiben sie völlig ungeändert, wie es der Satz verlangt. Aus dem Gleichungssystem (2.) dagegen erhalten wir ein neues Gleichungssystem. Führen wir gleichzeitig neue Parameter ein vermöge der Substitutionen:

$$(1\,b.) \qquad a_1 = \alpha_1 , \; a_2 = \alpha_2 , \; a_3 = \alpha_3 + \frac{\alpha_1^2 + c\,\alpha_2^2}{2} ,$$

so nehmen die aus (1.) hervorgehenden Gleichungen die einfache Form an:

$$(4.) \qquad \begin{cases} \xi_1' = \xi_1 + \alpha_1 \\ \xi_2' = \xi_2 + \alpha_2 \\ \xi_3' = \xi_3 + \alpha_3 + \alpha_2 \xi_1 - \alpha_1 \xi_2 . \end{cases}$$

Dieses also ist die canonische Parametergruppe der Gruppe (2.), und zwar, bei der von uns getroffenen Wahl der Parameter, die canonische Parametergruppe in der canonischen Form. In der That kann man sich sofort durch Ausrechnung überzeugen, dass die Gruppe (4.) ihre eigene canonische Parametergruppe ist. Auch können wir nun an dem Beispiele der Gruppe (4.) einen in § 1 bewiesenen Satz bestätigen: wir finden sogleich, dass die Gruppe (4.) zu ihrer reciproken vermöge der Transformation

$$\xi_1' = -\,\xi_1 , \quad \xi_2' = -\,\xi_2 , \quad \xi_3' = -\,\xi_3$$

ähnlich ist.

Aus den Gleichungen (4.) ist die willkürliche Constante c, welche in den Gleichungen (2.) noch vorkommt, völlig herausgefallen. Wir können daher nunmehr die Gruppe (2.) mit den Constanten c sofort auch in eine Gruppe überführen, deren Transformationen die nämliche Form haben, wie (2.), aber statt der Constanten c eine neue Constante d enthalten:

Dies leistet die quadratische Transformation

$$x_1 = y_1 \ , \ x_2 = y_2 \ , \ x_3 = y_3 + \frac{c-d}{2} y_2^2 \ ,$$

sofern wir zugleich auch durch eine entsprechende Transformation neue Parameter einführen.

Dieses letztere Ergebniss hätten wir übrigens auch voraussehen können. Denn die Grössen c_{iks}, welche die Zusammensetzung der Gruppe (2.) bestimmen, sind von dem Parameter c frei; es sind daher alle diese Gruppen zu einander ähnlich, und es kann der Parameter c auch in den Gleichungen der canonischen Parametergruppe nicht auftreten.

Die Gleichungen (4.) sind nichts anderes, als die Gleichungen derjenigen Gruppe G_1, welche dem Zahlensystem

$$e_0 = 1 \ , \quad e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 0 \ ,$$

$$e_1 e_2 = -e_2 e_1 = e_3 \ , \quad e_1 e_3 = e_3 e_1 = e_2 e_3 = e_3 e_2 = 0$$

angehört. Dieses Zahlensystem ist identisch mit dem a. a. O. auf S. 261 angegebenen und mit XIV bezeichneten System. — Den Entwickelungen des nächsten Paragraphen wird man ohne Schwierigkeit den Satz entnehmen, dass die Gruppe (4.) und die Gruppe aller Translationen des Raumes die einzigen dreigliedrigen projectiven Gruppen sind, welche mit ihrer canonischen Parametergruppe zusammenfallen.

§ 6.

Umkehrbarkeit der Beziehung zwischen den Systemen complexer Zahlen und den reciproken projectiven Gruppen.

Wir wollen nun zeigen, dass je zwei reciproke projective Gruppen unter Auszeichnung eines Punktes allgemeiner Lage in die uns bekannte Beziehung zu einem System von complexen Zahlen gesetzt werden können.

Hierzu dient der folgende, leicht zu beweisende Satz:

Digitized by Google

Der Inbegriff aller infinitesimalen projectiven Transformationen, welche mit den infinitesimalen Transformationen einer vorgelegten projectiven Gruppe vertauschbar sind, erzeugt eine projective Gruppe von der besonderen Eigenschaft, dass ihre endlichen Transformationen durch lineare Gleichungen zwischen den Transformationscoefficienten bestimmt werden können.

In der That, seien S' die Symbole der vorgelegten, S die Symbole der zu suchenden infinitesimalen Transformationen, so ist die Bedingung der Vertauschbarkeit: $(SS') = 0$, also linear in den Coefficienten von S. Seien $S_1 \dots S_r$ die r unabhängigen Normalformen, welche dieser Bedingung genügen; so werden die sämmtlichen Formen

$$\lambda_0 S^0 + \lambda_1 S_1 + \cdots + \lambda_r S_r$$

nicht allein mit den Formen S', sondern auch mit allen Potenzen und Producten dieser letzteren vertauschbar; also sicher auch die Transformationen der Schaar

$$\lambda_0 S^0 + \lambda_1 S_1 + \cdots + \lambda_r S_r = 0$$

mit allen Transformationen der von den infinitesimalen Transformationen S' erzeugten Gruppe. Die genannte lineare Schaar enthält aber die infinitesimalen Transformationen $S_1 \dots S_r$, und ist folglich die von ihnen erzeugte Gruppe.

Ist daher im Gebiete n^{ter} Stufe die reciproke Gruppe G_2' einer einfach-transitiven projectiven Gruppe G_1' ebenfalls projectiv, so folgt sofort, dass die allgemeine endliche Transformation von G_1' (und ebenso von G_2') in der Form

$$\lambda_0 S^0 + \lambda_1 S_1 + \cdots + \lambda_{n-1} S_{n-1} = 0$$

geschrieben werden kann.

Nun können wir ein System von complexen Zahlen angeben, welches zu der Gruppe G_1', wenn auch noch nicht unmittelbar in der gesuchten, so doch in einer sehr einfachen Beziehung steht: die bilinearen Formen $S^0, S_1, \dots S_{n-1}$. Zu ihnen, die wir als Grundzahlen durch $e_0 \dots e_{n-1}$ bezeichnen, gehört eine gewisse Gruppe G_1, die *Parametergruppe* von G_1'. Um den zu beweisenden Satz darzuthun, haben wir also nur noch zu zeigen, dass diese Gruppe G_1 mit der gegebenen G_1' nicht allein ähnlich — das ist selbstverständlich — sondern insbesondere durch eine *projective* Transformation ähnlich ist. Das ergibt sich aber

Digitized by Google

unmittelbar, wenn wir als Coordinaten eines Punktes des Gebietes n^{ter} Stufe die Parameter derjenigen Transformation von G_1' einführen, welche einen beliebig, aber fest angenommenen Punkt allgemeiner Lage E in jenen Punkt überführt: die neuen Coordinaten hängen dann mit den alten natürlich durch *lineare* Gleichungen zusammen.

Hiermit ist der behauptete Satz erwiesen. Wir können aber noch weiter gehen.

Führt man in die Gleichungen der Gruppe G_1' überhaupt durch irgend eine lineare Transformation von der Determinante Eins neue Veränderliche ein, so bleiben die Beziehungen der Gruppe zu den (natürlich gleichzeitig transformirten) bilinearen Formen S^0, $S_1 \ldots S_{n-1}$ völlig ungestört. Daraus folgt, dass allen projectiven Gruppen, welche innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe mit G_1' gleichberechtigt sind, ein und dasselbe Zahlensystem $e_0 \ldots e_{n-1}$ zugeordnet werden kann. Aber auch der zu G_1' reciproken Gruppe G_2' und den mit ihr gleichberechtigten Gruppen entspricht ein von $e_0 \ldots e_{n-1}$ nicht wesentlich verschiedenes Zahlensystem: dasjenige nämlich, welches man aus dem gegebenen durch Vertauschung aller Constanten γ_{iks} mit den entsprechenden Constanten γ_{kis} erhält, und welches wir als das »reciproke« System des Systems $e_0 \ldots e_{n-1}$ bezeichnet haben. Da umgekehrt bei Vertauschung der γ_{iks} und γ_{kis} die zu dem System gehörigen Gruppen G_1 und G_2 nur ihre Rolle wechseln, da ferner die Einführung neuer Grundzahlen an Stelle von $e_0 \ldots e_{n-1}$ nur die Einführung von neuen Veränderlichen und Parametern (durch lineare Transformation) in die Gruppen G_1 und G_2 zur Folge hat, so können wir nunmehr den Satz aussprechen:

Jedem System von complexen Zahlen mit n Haupteinheiten sind in bestimmter Weise zwei reciproke projective Gruppen eines Gebietes n^{ter} Stufe (Raumes von $n-1$ Dimensionen) zugeordnet, und umgekehrt. Und zwar entsprechen je zwei Zahlensystemen desselben Typus Gruppenpaare, welche innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe gleichberechtigt sind, je zwei Zahlensystemen verschiedener Typen aber auch verschiedene Typen von Paaren reciproker projectiver Gruppen.

Setzen wir insbesondere voraus, dass die beiden reciproken Gruppen zusammenfallen, so ergibt sich:

Digitized by Google

Jedem System von complexen Zahlen mit n Haupteinheiten, in welchem das commutative Gesetz der Multiplication gilt, ist eine transitive Gruppe von vertauschbaren linearen Transformationen eines Gebietes n^{ter} Stufe zugeordnet, und umgekehrt. Und zwar entspricht einem jeden Typus von Zahlensystemen ein bestimmter Typus von Gruppen der genannten Art.

Diese Sätze haben nicht nur ein theoretisches Interesse, sondern sie sind auch von praktischem Nutzen; sie zeigen, dass man die verschiedenen Typen von Paaren reciproker projectiver Gruppen auf eine einfachere und unmittelbarere Weise finden kann, als es durch Anwendung der allgemeinen Methoden der Theorie der Transformationsgruppen möglich wäre. Dass die nachgewiesene Wechselbeziehung sich auch auf die Realitätsverhältnisse erstreckt, dass also immer zwei verschiedenen Gestalten von Zahlensystemen desselben Typus auch zwei Gruppenpaare desselben Typus entsprechen, die innerhalb der Gruppe aller *reellen* linearen Transformationen noch verschieden sind, und umgekehrt, braucht wohl kaum noch besonders hervorgehoben zu werden.

§ 7.

Beispiele.

Ein einfaches Beispiel für den nachgewiesenen Zusammenhang der Systeme complexer Zahlen mit gewissen continuirlichen Gruppen von Transformationen habe ich bereits früher betrachtet, gelegentlich einer Besprechung der Untersuchung des Herrn WEIERSTRASS über Systeme von complexen Zahlen (a. a. O. S. 263 u. ff.). Ein anderes, eben so einfaches Beispiel bietet die Gruppe aller Translationen der $(n-1)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit dar, welcher das Zahlensystem $e_0 = 1, e_i e_k = 0$ $(i, k = 1 \ldots n-1)$ zugehört. Es ist aber vielleicht nicht überflüssig, auch die allgemeinere Betrachtung des § 6 durch ein im Einzelnen durchgeführtes Beispiel zu erläutern.

Die Gesammtheit aller perspectiven Transformationen der Ebene, welche eine gemeinsame Perspectivitätsaxe besitzen, und ausserdem ihr Centrum auf einer zweiten festen Geraden haben, bildet offenbar eine zweigliedrige, transitive Gruppe. Man überzeugt sich durch eine ganz einfache geometrische Be-

Digitized by Google

trachtung, dass ihre reciproke Gruppe wieder von linearen Transformationen gebildet wird; nämlich von denjenigen perspectiven Transformationen, deren Perspectivitätsaxe die zweite Gerade ist, und deren Centrum auf der ersten Geraden liegt. Hier haben wir also zwei Gruppen G_1', G_2', welche die verlangte Eigenschaft besitzen.

Wählen wir die Gerade $x_2 = 0$ als Perspectivitätsaxe, die Gerade $x_3 = 0$ als Ort der Perspectivitätscentren der Gruppe G_1', so können wir die endlichen Transformationen derselben durch folgende Gleichungen darstellen:

$$\begin{aligned} x_1' &= \lambda_0 x_1 + \lambda_1 x_2 \ , \\ x_2' &= (\lambda_0 + \lambda_2)\, x_2 \ , \\ x_3' &= \lambda_0 x_3 \ . \end{aligned} \tag{1.}$$

Der Punkt $x_1 : x_2 : x_3 = \lambda_1 : \lambda_2 : 0$ ist dann das Centrum dieser Transformation. Nennen wir (λ), (μ), (ν) die Parametersysteme von drei Transformationen S, T, ST von G_1', so erhalten wir die Gleichungen der zugehörigen *Parametergruppe* in der Form:

$$\begin{aligned} \nu_0 &= \mu_0 \lambda_0 \\ \nu_1 &= \mu_0 \lambda_1 + \mu_1 \lambda_0 + \mu_1 \lambda_2 \\ \nu_2 &= \mu_0 \lambda_2 + \mu_2 \lambda_0 + \mu_2 \lambda_2 \end{aligned} \tag{2.}$$

Um nun das zu der Gruppe G_1' gehörige System von complexen Zahlen zu bestimmen, stellen wir die Transformationen (1.) zunächst durch bilineare Formen dar, d. h. wir multipliciren die Ausdrücke von x_1', x_2', x_3' beziehungsweise mit u_1, u_2, u_3 und setzen die Summe der Producte gleich Null. Wir erhalten dann die allgemeine Transformation von G_1' in der Form

$$S = \lambda_0 S_0 + \lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 = 0 \ ,$$

worin

$$\begin{cases} S_0 = S^0 = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 \ , \\ S_1 = x_2 u_1 \ , \qquad S_2 = x_2 u_2 \ . \end{cases} \tag{3.}$$

Die bilinearen Formen S_0, S_1, S_2 bilden ein System von complexen Zahlen, dessen Multiplicationsregeln, bei Einführung der neuen Bezeichnungen e_0, e_1, e_2 durch die Formeln dargestellt werden:

$$e_0 = 1 \ , \quad e_1 e_2 = 0 \ , \quad e_2 e_1 = e_1 \ , \quad e_1^2 = 0 \ , \quad e_2^2 = e_2 \ . \tag{4.}$$

Digitized by Google

Setzt man

$$\lambda = \lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \ ,$$

und definirt analog μ und ν, so kann man mit Hülfe dieses Zahlensystems die Formeln (2.) in eine einzige zusammenfassen

$$\lambda\mu = \nu \ ; \tag{5.}$$

die Formeln (5.) stellen also, wenn man λ als unabhängig, ν als abhängig veränderlich, und μ als Parameter auffasst, die zu dem System (4.) gehörige Gruppe G_1 dar.

Um G_1' in G_1 überzuführen, wählen wir einen weder auf der Geraden $x_2 = 0$ noch auf der Geraden $x_3 = 0$ gelegenen Punkt E willkürlich aus, etwa den Punkt $1 : 1 : 1$. Bezeichnen wir dann mit $y_0 : y_1 : y_2$ die Parameter derjenigen Transformation $S = 0$, welche den Punkt E in den Punkt $x_1 : x_2 : x_3$ überführt, so hängen y_0, y_1, y_2 und x_1, x_2, x_3 durch eine auflösbare lineare Substitution zusammen, die als Transformation von der Determinante Eins so geschrieben werden kann:

$$x_1 = y_0 + y_1 \ , \quad x_2 = y_0 + y_2 \ , \quad x_3 = y_0 \ . \tag{6.}$$

Gleichzeitig wird

$$u_1 = v_1 \ , \quad u_2 = v_2 \ , \quad u_3 = v_0 - v_1 - v_2 \ , \tag{7.}$$

wenn v_0, v_1, v_2 die zu dem System y_0, y_1, y_2 gehörigen Liniencoordinaten bedeuten.

Durch die Substitution (6.) gehen die Gleichungen der Gruppe (1.) über in diese:

$$\begin{aligned} y_0' &= \lambda_0 y_0 \ , \\ y_1' &= \lambda_0 y_1 + \lambda_1 y_0 + \lambda_1 y_2 \ , \\ y_2' &= \lambda_0 y_2 + \lambda_2 y_0 + \lambda_2 y_2 \ , \end{aligned} \tag{8.}$$

deren Vergleichung mit den Formeln (2.) zeigt, dass wir thatsächlich die Gruppe G_1 erhalten.

Vermöge der Substitutionen (6.) und (7.) gehen ferner die Formen S_0, S_1, S_2 über in

$$S_0 = y_0 v_0 + y_1 v_1 + y_2 v_2 \ , \quad S_1 = (y_0 + y_2) v_1 \ , \quad S_2 = (y_0 + y_2) v_2 \ . \tag{9.}$$

Die Beziehung dieser Ausdrücke zu den Formeln (8.) ist augenscheinlich dieselbe, wie die Beziehung der Ausdrücke (3.) zu den Formeln (1.), d. h. es sind S_0, S_1, S_2 die Coefficienten von

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ in dem Ausdrucke $v_0 y_0' + v_1 y_1' + v_2 y_2'$; es sind aber jetzt die Formeln (8.) unmittelbar die Gleichungen der Gruppe G_1, welche zu dem durch die bilinearen Formen (9.) bestimmten Zahlensystem (4.) gehört.

Das Zahlensystem, zu dem wir hier gelangt sind, gehört dem vierten der Typen an, welche a. a. O. S. 254 für den Fall der Annahme von drei Grundzahlen aufgestellt worden sind. Es geht in die canonische Form IV über durch die Substitutionen:

$$e_0 = \bar{e}_0 , \quad e_1 = \bar{e}_2 , \quad e_2 = \frac{\bar{e}_0 + \bar{e}_1}{2} .$$

Hierdurch werden in die Gleichungen (8.) der Gruppe $y' = y\lambda$ neue Veränderliche, und zugleich neue Parameter eingeführt; neue Veränderliche durch die Substitutionen

$$x_0 = y_0 + \tfrac{1}{2} y_2 , \quad x_1 = \tfrac{1}{2} y_2 , \quad x_2 = y_1 ,$$

und neue Parameter durch die *nämlichen* Substitutionen:

$$a_0 = \lambda_0 + \tfrac{1}{2}\lambda_2 , \quad a_1 = \tfrac{1}{2}\lambda_2 , \quad a_2 = \lambda_1 .$$

Die Gleichungen (8.) gehen hierdurch über in diese:

$$\text{(10.)} \qquad \begin{cases} x_0' = a_0 x_0 + a_1 x_1 , \\ x_1' = a_0 x_1 + a_1 x_0 , \\ x_2' = (a_0 - a_1) x_2 + a_2 (x_0 + x_1) , \end{cases}$$

die man unter Gebrauch der neuen Grundzahlen einfacher so schreiben kann: $x' = xa$.

Das Perspectivitätscentrum der Transformation (10.) hat jetzt die Coordinaten $a_1 : a_1 : a_2$, die Axe die Gleichung $x_0 + x_1 = 0$.

Die allgemeine Transformation der reciproken Gruppe G_2 erhält die Gleichung $x' = ax$, oder ausgeschrieben:

$$\text{(11.)} \qquad \begin{cases} x_0' = a_0 x_0 + a_1 x_1 , \\ x_1' = a_0 x_1 + a_1 x_0 , \\ x_2' = (a_0 + a_1) x_2 + a_2 (x_0 - x_1) ; \end{cases}$$

das zugehörige Perspectivitätscentrum hat die Coordinaten: $-a_1 : a_1 : a_2$, die Axe die Gleichung $x_0 - x_1 = 0$. Die Transformation $x' = x^{-1}$, oder ausgeschrieben, nach Weglassung des den rechten Seiten gemeinsamen Nenners $(x_0 - x_1)(x_0 + x_1)$:

$$\text{(12.)} \qquad x_0' = x_0 , \quad x_1' = -x_1 , \quad x_2' = -x_2$$

Digitized by Google

wird im vorliegenden Falle (vgl. S. 194) ebenfalls eine lineare Transformation; es ist diejenige involutorisch-perspective Transformation, deren Centrum der Punkt $E(1:0:0)$ ist, und deren Axe $x_0 = 0$ durch die zu G_1 und G_2 gehörigen Perspectivitätsaxen $x_0 + x_1 = 0$ und $x_0 - x_1 = 0$ vom Punkte E harmonisch getrennt wird. Auch die Gruppe $\mathfrak{G}$ besteht aus lauter perspectiven Transformationen:

$$(13.) \qquad \begin{cases} x_0' = (a_0 + a_1)\, x_0 \ , \\ x_1' = (a_0 + a_1)\, x_1 \ , \\ x_2' = 2a_2 x_1 + (a_0 - a_1)\, x_2 \ , \end{cases}$$

deren gemeinsames Centrum der Schnittpunkt der Geraden $x_0 + x_1 = 0$ und $x_0 - x_1 = 0$ ist, und deren Axen $a_1 x_2 - a_2 x_1 = 0$ sämmtlich den Punkt E enthalten; $\mathfrak{G}$ ist also in unserem besonderen Falle zu G_1 und G_2 vermöge einer dualistischen Transformation ähnlich. Die Gruppe $G_{1,2}$ endlich ist die Gruppe aller derjenigen linearen Transformationen, welche jede der beiden Geraden $x_0 + x_1 = 0$, $x_0 - x_1 = 0$ in Ruhe lassen.

Wir haben hier das einfachste Beispiel eines Paares von reciproken Gruppen behandelt, welches auf ein System von complexen Zahlen führt, deren Multiplication nicht commutativ ist. Wir haben damit zugleich das einzige Paar von nicht zusammenfallenden reciproken projectiven Gruppen untersucht, welches in der *Ebene* vorhanden ist. In mehrfach ausgedehnten Gebieten gibt es eine grössere Mannigfaltigkeit solcher Gruppen. Unter ihnen befindet sich ein Gruppenpaar, welches als die unmittelbare Verallgemeinerung des hier behandelten angesehen werden kann. So bilden z. B. im dreifach ausgedehnten Raume die Gesammtheit aller perspectiven Transformationen, welche eine gemeinsame Perspectivitätsebene Σ_1 haben, und deren Centren auf einer zweiten festen Ebene Σ_2 liegen, eine einfach-transitive Gruppe G_1. Die reciproke Gruppe G_2 wird von allen perspectiven Transformationen gebildet, deren Ebene die Ebene Σ_2 ist, und deren Centren auf Σ_1 liegen. Beide Gruppen zusammen erzeugen eine sechsgliedrige Gruppe $G_{1,2}$, diejenige invariante Untergruppe der Gruppe aller Σ_1 und Σ_2 in Ruhe lassenden linearen Transformationen, bei der alle Punkte der Schnittlinie von Σ_1 und Σ_2 einzeln fest bleiben. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ besteht aus allen geschaart-perspectiven Transfor-

Digitized by Google

mationen, deren eine Perspectivitätsaxe die Schnittlinie von Σ_1 und Σ_2 ist, und deren zweite Axe durch einen weder auf Σ_1 noch auf Σ_2 gelegenen festen Punkt geht. Das zugehörige Zahlensystem ist das System XV (a. a. O. S. 261).

Ein anderes, bekannteres Beispiel von Gruppenpaaren der genannten Art bilden die beiden invarianten Untergruppen der Gruppe der allgemeinen Fläche zweiten Grades. Auf dieses Gruppenpaar werden wir weiter unten noch zu sprechen kommen.

§ 8.

Weitere mit einem System complexer Zahlen verbundene Transformationsgruppen.

Mit den bis jetzt aufgeführten Sätzen sind die Beziehungen der Systeme complexer Zahlen zur Theorie der Transformationsgruppen natürlich noch keineswegs erschöpft.

Der Theorie der Untergruppen einer gegebenen Gruppe wird sich hier eine Theorie an die Seite stellen lassen, welche von den die Zahl Eins enthaltenden, in einem gegebenen System complexer Zahlen eingeschlossenen Theilsystemen handelt. Einen hierher gehörigen Satz haben wir bereits gelegentlich (in § 3) angeführt; ein anderer besagt, dass der Inbegriff aller linear unabhängigen Zahlen c, welche identisch der Gleichung $cx = xc$ genügen, und also, im Sinne der vorausgehenden Entwickelungen, die Parameter der G_1 und G_2 gemeinsamen $(m-1)$-gliedrigen Untergruppe darstellen, bereits für sich ein geschlossenes (commutatives) System von complexen Zahlen bilden.

Ferner haben wir oben bereits angedeutet, dass mit jedem System von complexen Zahlen noch auf eine zweite Art vier Gruppen verknüpft sind, welche zu einander in der Beziehung der Eingangs betrachteten Gruppen G_1, G_2, $G_{1,2}$, $\mathfrak{G}$ stehen. Man erhält dieselben, wenn man in den Gleichungen

$$x' = xa\,, \quad x' = ax\,, \quad x' = axb\,, \quad x' = a^{-1}xa$$

die Coefficienten $x_0 \ldots x_{n-1}$ u. s. w. nicht, wie bisher geschah, als Verhältnissgrössen auffasst, sondern ihre absoluten Werthe betrachtet, und diese dann als *Cartesische* Coordinaten deutet.

Die vorstehenden Gleichungen werden dann die Gleichungen von vier Gruppen eines Raumes von n Dimensionen $\bar{R}$, welche

Digitized by Google

wir mit $\bar{G}_1$, $\bar{G}_2$, $\bar{G}_{1,2}$, $\bar{\mathfrak{G}}$ bezeichnen wollen; die zugehörigen Parameterzahlen werden n, n, $2n - m$, $n - m$, wobei n und m die auf S. 191 erklärte Bedeutung haben. Diese Gruppen $\bar{G}_1$, $\bar{G}_2$, $\bar{G}_{1,2}$, $\bar{\mathfrak{G}}$ haben nun aber viel *speciellere* Eigenschaften als die bisher betrachteten Gruppen G_1, G_2, $G_{1,2}$, $\mathfrak{G}$, und scheinen mir daher auch ein geringeres Interesse zu besitzen. Zunächst sieht man sofort, dass die Zahl m mindestens den Werth *Eins* hat, und dass daher die Gruppen G_1 und $\mathfrak{G}$ immer nur *meroëdrisch* isomorph sind. Ferner sind sie sogenannte lineare homogene Gruppen, d. h. solche projective Gruppen, deren Transformationen erstens die unendlich ferne Mannigfaltigkeit R_{n-1}, zweitens einen im Endlichen gelegenen Punkt, den Punkt $0, 0, \ldots 0$ stehen lassen.

Da diejenigen Gruppen, durch welche die Punkte der unendlich fernen Mannigfaltigkeit vermöge der Transformationen von $\bar{G}_1$, $\bar{G}_2$, $\bar{G}_{1,2}$, $\bar{\mathfrak{G}}$ transformirt werden, offenbar keine anderen sind, als die in den §§ 4—6 behandelten Gruppen G_1, G_2, $G_{1,2}$, $\mathfrak{G}$, so erkennt man sofort das gegenseitige Verhältniss dieser beiden Reihen von Gruppen: Man bestimme die mit G_1, G_2, $G_{1,2}$, $\mathfrak{G}$ gleichzusammengesetzten, der sogenannten speciellen linearen homogenen Gruppe angehörigen continuirlichen Gruppen G_1', G_2', $G_{1,2}'$, $\mathfrak{G}'$, welche die unendlich ferne Mannigfaltigkeit in der vorgeschriebenen Weise transformiren. Die Gruppe $\mathfrak{G}'$ ist dann unmittelbar identisch mit der Gruppe $\bar{\mathfrak{G}}$; die Gruppen $\bar{G}_1$, $\bar{G}_2$, $\bar{G}_{1,2}$ aber entstehen aus den Gruppen G_1', G_2', $G_{1,2}'$, wenn man noch die Transformationen der eingliedrigen ausgezeichneten Untergruppe der allgemeinen linearen homogenen Gruppe hinzufügt; die Theorie der Gruppen $\bar{G}_1$, $\bar{G}_2$, $\bar{G}_{1,2}$, $\bar{\mathfrak{G}}$ ist also durch ganz einfache Operationen aus derjenigen der Gruppen G_1, G_2, $G_{1,2}$, $\mathfrak{G}$ abzuleiten.

Ausserdem aber sind die Gruppen $\bar{G}_1$, $\bar{G}_2$, $\bar{G}_{1,2}$, $\bar{\mathfrak{G}}$, welche zu dem gegebenen System von n Grundzahlen gehören, bereits völlig bekannt, wenn man alle Systeme von $n + 1$ Grundzahlen bestimmt hat; denn nach unserem allgemeinen Satze muss sich ein System mit $n + 1$ Grundzahlen angeben lassen, zu welchem die Gruppen $\bar{G}_1$, $\bar{G}_2$, $\bar{G}_{1,2}$, $\bar{\mathfrak{G}}$ in der nämlichen Beziehung stehen, wie die Gruppen G_1, G_2, $G_{1,2}$, $\mathfrak{G}$ zu dem gegebenen System. Man kann jenes System von $n + 1$ Grundzahlen auch sofort

Digitized by Google

hinschreiben: Man hat den Grundzahlen $e_0 \dots e_{n-1}$ nur eine weitere Grundzahl η hinzuzufügen, und festzusetzen, dass $\eta^2 = \eta$, $e_i \eta = \eta e_i = 0$ sein soll. Auf solche Art entsteht zum Beispiel das Zahlensystem VI, $n = 4$ aus dem Zahlensystem IV, $n = 3$ (a. a. O. S. 258, 251); d. h. die zu dem ersteren System gehörigen Gruppen G_1, G_2, $G_{1,2}$, $\mathfrak{G}$ sind innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe des Raumes gleichberechtigt mit den Gruppen $\bar{G}_1$, $\bar{G}_2$, $\bar{G}_{1,2}$, $\bar{\mathfrak{G}}$, welche zu dem letzteren Zahlensystem gehören.

Wir haben oben gesehen, dass sich eine jede Transformation der Gruppe G_1 unter der Form $x' = x e^{\bar{\xi}}$ oder unter der nicht wesentlich verschiedenen Form $x' = x e^{\xi}$ darstellen lässt, wobei $\bar{\xi}$ und $\xi = e_0 + \bar{\xi}$ die auf Seite 194 erklärte Bedeutung haben. Daraus folgt jetzt sogleich eine entsprechende Darstellung der Gruppe $\bar{G}_1$ unter der Form $x' = x e^{\eta}$, wobei η nunmehr die allgemeine Zahl des Systems ist. Die Transformation $x = e^{\eta}$ ergibt sich also jetzt als diejenige Transformation, welche die Gruppe $\bar{G}_1$ in ihre canonische Parametergruppe überführt. Sind die Transformationen von $\bar{G}_1$ sämmtlich vertauschbar, d. h. befolgt die Multiplication in dem vorgelegten Zahlensystem das commutative Gesetz, so wird die canonische Parametergruppe eine Gruppe von Translationen; in der That ziehen in diesem Falle die Gleichungen $x = e^{\eta}$, $x' = e^{\eta'}$, $x'' = e^{\eta''}$, $\eta + \eta' = \eta''$ sofort die weitere Gleichung $x x' = x''$ nach sich. Da diese Bemerkung für mehrere Anwendungen von Nutzen ist, so mag sie noch einmal besonders als Satz ausgesprochen werden:

Zu jedem System von complexen Zahlen, deren Multiplication dem commutativen Gesetze folgt, gehört eine Logarithmentafel, mit deren Hülfe man die Multiplication zweier Zahlen des Systems ganz ebenso auf eine Addition zurückführen kann, wie es in dem System der gemeinen complexen Zahlen durch die gewöhnlichen Logarithmen geschieht [1]).

Beispielsweise mögen die Logarithmen für alle Zahlensysteme mit vier in ihrer Multiplication vertauschbaren Grundzahlen angegeben werden. (Vgl. Gött. Nachr. 1889, S. 256—261.)

---

1) Eine entsprechende Bemerkung hat auch Herr SCHUR gemacht. Math. Ann. Bd. XXXIII, S. 59.

Digitized by Google

I. $$\log x = \log x_0 \cdot e_0 + \log x_1 \cdot e_1 + \log x_2 \cdot e_2 + \log x_3 \cdot e_3 \ ,$$

II. $$\log x = \log x_0 \cdot e_0 + \frac{x_1}{x_0} \cdot e_1 + \log x_2 \cdot e_2 + \log x_3 \cdot e_3 \ ,$$

III. $$\log x = \log x_0 \cdot e_0 + \frac{x_1}{x_0} \cdot e_1 + \log x_2 \cdot e_2 + \frac{x_3}{x_2} \cdot e_3 \ ,$$

IV. $$\log x = \log x_0 \cdot e_0 + \frac{x_1}{x_0} \cdot e_1 + \frac{2x_0x_2 - x_1^2}{2x_0^2} \cdot e_2 + \log x_3 \cdot e_3 ,$$

V. $$\log x = \log x_0 \cdot e_0 + \frac{x_1}{x_0} \cdot e_1 + \frac{2x_0x_2 - x_1^2}{2x_0^2} \cdot e_2 + \frac{3x_0^2x_3 - 3x_0x_1x_2 + x_1^3}{3x_0^3} \cdot e_3 \ ,$$

VIII. $$\log x = \log x_0 \cdot e_0 + \frac{x_1}{x_0} \cdot e_1 + \frac{x_2}{x_0} \cdot e_2 + \log x_3 \cdot e_3 \ ,$$

X. $$\log x = \log x_0 \cdot e_0 + \frac{x_1}{x_0} \cdot e_1 + \frac{x_2}{x_0} \cdot e_2 \ , - \frac{x_1^2 - 2x_0x_3 + x_2^2}{2x_0^2} \cdot e_3 \ ,$$

XI. $$\log x = \log x_0 \cdot e_0 + \frac{x_1}{x_0} \cdot e_1 + \frac{2x_0x_2 - x_1^2}{2x_0^2} \cdot e_2 + \frac{x_3}{x_0} \cdot e_3 \ ,$$

XV. $$\log x = \log x_0 \cdot e_0 + \frac{x_1}{x_0} \cdot e_1 + \frac{x_2}{x_0} \ e_2 + \frac{x_3}{x_0} \cdot e_3 \ .$$

In allen diesen Formeln bedeutet die vorgesetzte römische Ziffer die Nummer des betreffenden Zahlensystems; $\log x$ ist die oben durch η bezeichnete Grösse.

Ist zufolge der obigen Auseinandersetzungen die Theorie der Gruppen $\bar{G}_1$, $\bar{G}_2$, $\bar{G}_{1,2}$, $\bar{\mathfrak{G}}$ von der Theorie der Gruppen G_1, G_2, $G_{1,2}$, $\mathfrak{G}$ nur wenig verschieden, so liefert uns die Deutung von $x_0 \ldots x_{n-1}$ als Cartesischen Coordinaten doch auch eine Reihe von wesentlich neuen Gruppen, bei deren Studium man den Algorithmus der complexen Zahlen mit mehr oder weniger Nutzen verwerthen kann. Schliessen wir den trivialen Fall der Gruppe aller Translationen aus, welche durch die Gleichung $x' = x + a$ dargestellt wird, so bestimmen zum Beispiel die Gleichungen

Digitized by Google

$$x' = xa + b\ , \qquad x' = ax + b\ ,$$
$$x' = a^{-1}xa + b\ , \quad x' = axb + c$$

solche neue Gruppen, von welchen man sofort eine Reihe von Eigenschaften angeben kann.

Nimmt man insbesondere x, a, b als gewöhnliche complexe Zahlen, so wird

$$x' = ax + b$$

die viergliedrige *Gruppe der Aehnlichkeitstransformationen der Ebene*[1]; und es ist gerade diese Bemerkung, auf welcher der von Bellavitis begründete sogenannte *Aequipollenzencalcül* beruht.

Ferner gehört hierher die bekannte Darstellung der sechsgliedrigen *Gruppe der reciproken Radien in der Ebene* (Möbius' Kreisverwandtschaft) unter der Form

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d}\ ,$$

wo a, b, c, d, x, x' gewöhnliche complexe Zahlen bedeuten. Nimmt man in derselben Formel $a \ldots x'$ als Zahlen des zweiten, im Falle $n = 2$ vorhandenen Typus, so erhält man eine sechsgliedrige Gruppe, welche einen Grenzfall der Gruppe der reciproken Radien bildet, und gleichzusammengesetzt ist mit der Gruppe der Bewegungen des Raumes.

Auch zur Betrachtung von *unendlichen Gruppen* geben die Systeme complexer Zahlen Veranlassung. Bezeichnen wir zum Beispiel mit c_k irgend eine Zahl eines gegebenen Systems, welche in ihrer Multiplication mit allen übrigen Zahlen des Systems vertauschbar ist, und mit x irgend eine Zahl des Systems, so stellt eine jede convergente Reihe der Form

$$x' = \Sigma c_k x^k$$

eine Transformation einer gewissen unendlichen Gruppe dar, deren sämmtliche Transformationen mit den Transformationen

---

1) Der Inbegriff aller Punkttransformationen der Ebene, welche alle Figuren in ähnliche überführen, zerfällt bekanntlich in zwei getrennte Schaaren. Unter dem Namen des Textes begreifen wir nur die Transformationen der *continuirlichen* Gruppe; auch die Namen »Gruppe der Bewegungen in der Ebene«, »Gruppe der reciproken Radien«, »Gruppe der Fläche zweiten Grades«, »Gruppe der conformen Transformationen« werden wir in ähnlich beschränktem Sinne gebrauchen. Es ist überall nur von continuirlichen Gruppen die Rede.

Digitized by Google

der Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ vertauschbar sind [1]). Nehmen wir c_k, x, x' wieder als gewöhnliche complexe Zahlen, so erhalten wir die von Gauss angegebene Darstellung der *Gruppe der conformen Transformationen* durch die Functionen einer complexen Veränderlichen.

§ 9.

Der Nutzen der Systeme complexer Zahlen.

In weiten Kreisen ist die Ansicht verbreitet, dass die Systeme von complexen Zahlen oder ähnliche Algorithmen überhaupt gar keinen Nutzen hätten, ausgenommen allein die gewöhnlichen complexen Zahlen; und man begründet dies damit, dass durch sie nichts geleistet werden könnte, war nicht »eben so gut« auch ohne dieselben zu leisten wäre.

Es muss zugestanden werden, dass mit der Quaternionenrechnung, an die man wohl hauptsächlich denkt, schon von Anfang an ein gewaltiger Missbrauch getrieben worden ist. Es sind aber auch werthvolle neue Sätze gerade durch die Quaternionen zu Tage gefördert worden. Beschränkt man die Anwendung der Quaternionenrechnung auf das ihr naturgemäss unterworfene Gebiet, und die Terminologie auf das Nothwendigste, so stellt sie eine zweckmässige Methode dar, die zwar so wenig, als überhaupt irgend eine Methode unumgänglich nothwendig ist, aber doch zur Zeit keineswegs *eben so gut* auch entbehrt werden kann.

Es scheint jener Abneigung die völlig irrige Anschauung zu Grunde zu liegen, dass es sich bei den Quaternionen nur um eine spielende und willkürliche Verallgemeinerung der Gesetze des elementaren Rechnens handle; wobei man sich dann freilich leicht mit ihnen abfinden kann. In Wirklichkeit ist das Rechnen mit Quaternionen eine Methode der analytischen Geometrie, zu einem ganz bestimmten Zwecke erfunden. In der Art der Anwendung ist dasselbe durchaus vergleichbar mit der Verwerthung der Functionen einer complexen Veränderlichen für die Lehre von der conformen Abbildung, wobei die complexen Zahlen auch nicht in ihrer Eigenschaft als Erweiterung der

1) Die Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ ist als eine adjungirte Gruppe stets intransitiv.

reellen Zahlen, sondern als ein analytisch-geometrischer Algorithmus zur Verwendung gelangen. Wer den Gebrauch der Quaternionen oder ähnlicher Algorithmen grundsätzlich missbilligt, wird also, wenn er folgerecht verfahren will, auch alle die schönen Untersuchungen über conforme Abbildung, Minimalflächen u. dergl. verwerfen müssen, durch welche die Wissenschaft seit den Arbeiten von Gauss und Riemann eine wahrhafte Bereicherung erfahren hat. Einer solchen Erkenntniss hat sich auch Gauss selbst nicht verschliessen können[1]), obwohl er den zu seiner Zeit vorliegenden analytisch-geometrischen Algorithmen von Haus aus abgeneigt war. Man beruft sich also mit Unrecht auf seine Autorität, um die oben genannten Anschauungen zu stützen. Warum auch soll man sich einer abkürzenden Bezeichnung, wenn sie bequem und sachgemäss ist, durchaus nicht bedienen dürfen?[2])

Ich bin der Meinung, dass man überhaupt nicht allgemein und a priori über eine Methode urtheilen sollte, sondern nur mit Bezug auf einen bestimmt umschriebenen Kreis des Wissens und nach genauer Kenntnissnahme der in demselben vorkommenden besonderen Aufgaben.

Wie aus dem bis hierher Vorgetragenen wohl genugsam hervorgeht, besteht der Nutzen, welchen die Systeme complexer Zahlen bringen können — falls nicht noch neue Gebiete ihrer Anwendung erschlossen werden — im Wesentlichen darin, dass sie gewisse Gruppen von Transformationen in einer sehr einfachen Weise erstens *zu bestimmen* und zweitens *darzustellen* gestatten.

Der in letzterer Rücksicht vorhandene Nutzen wird um so grösser ausfallen, je unmittelbarer, oder, wenn der Ausdruck gestattet ist, je *natürlicher* der Zusammenhang der zu untersuchenden Gruppe mit dem gebrauchten Zahlensystem ist. Zugleich ergibt sich aber auch, dass das Feld, welches der Anwendung dieser Algorithmen offen steht, ein sehr *beschränktes* ist.

Denn es ist doch nur eine verhältnissmäsig kleine Mannigfaltigkeit von Gruppen, welche mit Systemen von complexen Zahlen im Zusammenhange stehen, und unter diesen sind wieder

---

1) Briefwechsel mit Schumacher, Bd. 4, Nr. 833, S. 147.

2) Ich freue mich, dass auch Herr Dedekind sich in anerkennendem Sinne über die Quaternionen ausgesprochen hat.

nur vergleichsweise wenige, bei welchen der Zusammenhang ein so inniger ist, dass die Darstellung derselben durch die complexen Zahlen eine wirklich empfehlenswerthe Methode bildet. Ob aber in einem solchen Falle das betreffende Zahlensystem eine erheblichere Bedeutung gewinnen kann, wird wiederum davon abhängen, welchen Platz die zugehörigen Gruppen in dem Ganzen der mathematischen Wissenschaft einnehmen.

Der Gebrauch eines Systems von complexen Zahlen wird in allen den Fällen besonders nahe liegen, wo man vier projective Gruppen zu untersuchen hat, welche in der uns bekannten Beziehung der Gruppen G_1, G_2, $G_{1,2}$, $\mathfrak{G}$ stehen; denn eine noch einfachere Darstellung der wesentlichsten Eigenschaften dieser Gruppen als diejenige, welche sich aus den uns geläufigen Formeln $x' = xa$, $x' = ax$, $x' = axb$, $x' = a^{-1}xa$, $x' = x^{-1}$ u. s. w. ergibt, ist wohl kaum denkbar[1].

Schreibt man in der ersten dieser Formeln für x, a, x' bezüglich a, b, c, und rechnet mit Hülfe der Multiplicationstafel des gegebenen Systems die so entstandene Formel $ab = c$ aus, so müssen die Coefficienten der Grundzahlen links und rechts einzeln einander gleich sein. Man erhält so ein Formelsystem, welches man im Falle der Quaternionen als das »Multiplicationstheorem« des Zahlensystems bezeichnet hat. Es liegt auf der Hand, dass diese Formeln, in welchen von complexen Zahlen nichts mehr zu sehen ist, die Multiplicationstafel des Systems vollkommen vertreten; man wird daher einer jeden Formel aus der Theorie der complexen Zahlen eine andere an die Seite stellen können, in welcher an Stelle der Multiplicationstafel das durchaus »reelle« Multiplicationstheorem des betreffenden Zahlensystems tritt. Eine solche Uebertragung wird man in vielen Fällen auszuführen haben, wo es sich um Anwendungen der Theorie der complexen Zahlen handelt. Man würde sich aber, wie noch einmal hervorgehoben werden soll, einer *Täuschung* hin-

1) Freilich muss bemerkt werden, dass an dem analytischen Ausdruck der Gleichungen jener Gruppen durch complexe Zahlen der wesentliche Mangel haftet, dass er die Invarianteneigenschaft vieler in ihrer Theorie auftretender Ausdrücke nicht sichtbar macht. In dieser Richtung lässt die Methode zu wünschen übrig. Wir besitzen aber zur Zeit überhaupt noch keine Methode, um beliebige projective Gruppen in einer zugleich theoretisch befriedigenden und praktisch leicht zu handhabenden Form darzustellen.

Digitized by Google

geben, wenn man glauben wollte, dass mit einer Uebersetzung aller einzelnen Schritte der Rechnung in die Sprache der sogenannten gewöhnlichen Algebra irgend etwas gewonnen wäre; man hätte dann meistens nur einfache und übersichtliche Formeln gegen verwickelte und undurchsichtige vertauscht. Bei Weitem fruchtbarer scheint mir die gerade entgegengesetzte Auffassung zu sein, wonach die Multiplicationstafel eines Systems einen zweckmässigen und handlichen Ersatz des zugehörigen Multiplicationstheorems bildet.

In den beiden nächsten Paragraphen soll an Beispielen gezeigt werden, wie man sich der Kenntnis aller verschiedenen Systeme mit n Grundzahlen bedienen kann, um solche Parameterdarstellungen gewisser Transformationsgruppen zu finden, bei welchen sich die Parameter zweier hinter einander ausgeführter Transformationen in möglichst einfacher Weise zu den Parametern der neu entstandenen Transformation der Gruppe vereinigen.

§ 10.

Ueber die Parameterdarstellung gewisser Transformationsgruppen.

Ist eine vorgelegte continuirliche Transformationsgruppe gleichzusammengesetzt mit einem Paar von reciproken projectiven Gruppen G_1, G_2, so wird man die Parameter der gegebenen Gruppe so wählen können, dass eine dieser letzteren Gruppen die Parametergruppe wird. Damit hat man dann nicht allein eine besonders einfache Zusammensetzung der Parameter — die homogenen Parameter der zusammengesetzten Transformation ST zweier Transformationen S und T der Gruppe werden bilineare Functionen der Parameter von S und T — sondern man hat zufolge unseres Satzes über die Gruppe $\mathfrak{G}$ (S. 196) damit verknüpft zugleich auch eine ebenso einfache Darstellung der adjungirten Gruppe. Um die Gesammtheit aller derartigen Parameterdarstellungen zu übersehen, bieten nun die Systeme von complexen Zahlen das einfachste Mittel dar, wobei noch ein besonderer Vortheil darin liegt, dass man die Zusammensetzung der zu einem gegebenen System gehörigen Gruppen G_1, G_2 aus der Multiplicationstafel des Systems unmittelbar ablesen kann, ohne die Gleichungen dieser Gruppen selbst aufzustellen (S. 193).

Digitized by Google

Bekanntlich gibt es nur eine Art der Zusammensetzung von zweigliedrigen Gruppen mit nicht vertauschbaren Transformationen. Andererseits wissen wir, dass in der Ebene nur ein Paar von reciproken Gruppen nicht vertauschbarer linearer Transformationen vorhanden ist, und dass diese beiden Gruppen innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe gleichberechtigt sind[1]. Hieraus ergibt sich die für Anwendungen nützliche Bemerkung:

Betrachtet man Parametersysteme, welche durch lineare Transformationen aus einander hervorgehen, als nicht wesentlich verschieden, so gilt der Satz, dass man die endlichen Transformationen einer zweigliedrigen Gruppe von nicht vertauschbaren Transformationen stets und auf nur eine Weise derart von drei homogenen Parametern abhängig machen kann, dass die Parameter der zusammengesetzten Transformation ST zweier Transformationen S und T der Gruppe bilineare Functionen der Parameter von S und T werden.

Aehnliche Sätze bestehen für gewisse Zusammensetzungen mehrgliedriger Gruppen.

Nachstehend geben wir eine Aufzählung aller derjenigen Zusammensetzungen *dreigliedriger* Gruppen, welche bei reciproken projectiven Gruppen vorkommen können. Durch ihre Realitätsverhältnisse verschiedene Zusammensetzungen sind durch angehängte Buchstaben b), c) . . unterschieden. Die römischen Ziffern geben die entsprechenden Zahlensysteme (Gött. Nachr. 1889, S. 260—265). Solche Systeme, deren zugehörige Gruppen G_1 und G_2 nicht zu einander projectiv sind, und welche daher zu zwei verschiedenen Parameterdarstellungen Anlass geben, sind zweimal aufgeführt.

(1.) $$(X_2 X_3) = X_1 , \quad (X_3 X_1) = X_2 , \quad (X_1 X_2) = X_3$$

XII.

(1 b.) $$(X_2 X_3) = -X_1 , \quad (X_3 X_1) = -X_2 , \quad (X_1 X_2) = X_3$$

XII b.

---

1) Wie mir mein Freund ENGEL mittheilt, hat Herr LIE einen noch etwas allgemeineren Satz bewiesen, demzufolge dieses Paar von Gruppen durch eine nicht-projective Transformation weder in eine andere projective Gruppe, noch auch in sich selbst übergeführt werden kann.

Digitized by Google

(2.) $$(X_2 X_3) = 0\ , \quad (X_3 X_1) = X_2\ , \quad (X_1 X_2) = X_3$$

XIII.

(2b.) $$(X_2 X_3) = 0\ , \quad (X_3 X_1) = -X_2\ , \quad (X_1 X_2) = X_3$$

XIIIb.

(3.) $$(X_2 X_3) = 0\ , \quad (X_3 X_1) = 0\ , \quad (X_1 X_2) = X_3$$

IX. XIV.

(4.) $$(X_1 X_2) = X_2\ , \quad (X_1 X_3) = X_3\ , \quad (X_2 X_3) = 0$$

XV.

(5.) $$(X_1 X_2) = X_2\ , \quad (X_1 X_3) = 0\ , \quad (X_2 X_3) = 0$$

VI. VII. VII.

(6.) $$(X_2 X_3) = 0\ , \quad (X_3 X_1) = 0\ , \quad (X_1 X_2) = 0$$

I. II. III. IV. V. VIII. X. XI. XVI.

Von den in dieser Tafel enthaltenen Sätzen mögen diejenigen, welche für Anwendungen von besonderem Nutzen sind, noch einmal besonders in Worte gefasst werden.

Zunächst mögen wir bemerken, dass die Gruppe der perspectiven Aehnlichkeitstransformationen in der Ebene die Zusammensetzung (4) hat. Wir können daher sagen:

Die Parameter der dreigliedrigen Gruppe aller perspectiven Aehnlichkeitstransformationen der Ebene oder einer gleichzusammengesetzten Gruppe können im Wesentlichen nur auf eine Art so gewählt werden, dass die zugehörige Parametergruppe und ihre reciproke projective Gruppen werden.

Die geometrische Deutung dieser Gruppen ist auf S. 207 gegeben.

Ferner ist die Zusammensetzung (1) diejenige der Gruppe eines (imaginären) Kegelschnittes in der Ebene, oder der Gruppe der Drehungen einer Kugel. Mit Rücksicht auf die bekannten Eigenschaften der Euler'schen Parameter (die wir sogleich auch ableiten werden) folgt hieraus:

Die Euler'schen Parameter der Gruppe der Drehungen eines starren Körpers um einen festen Punkt sind bis auf lineare Transformationen durch die Forderung völlig bestimmt, dass die zuge-

Digitized by Google

hörige Parametergruppe und ihre reciproke projective Gruppen werden sollen [1]).

Ein gleicher Satz gilt aber auch noch für die wichtige Ausartung der Gruppe der Drehungen einer Kugel, die Gruppe der Bewegungen der (Euclidischen) Ebene, welcher die Zusammensetzung (2) zukommt:

In die Gruppe aller Bewegungen der Ebene (und die mit ihr gleichzusammengesetzten Gruppen) lassen sich ebenfalls, und zwar im Wesentlichen nur auf eine Weise, Parameter derart einführen, dass die zugehörige Parametergruppe und ihre reciproke projective Gruppen werden.

Die Gruppe der Bewegungen in der Ebene besitzt, als Untergruppe der allgemeinen projectiven Gruppe aufgefasst, noch eine Ausartung von der Zusammensetzung (3). In diesem Falle liefern uns die Systeme complexer Zahlen unendlich viele Parameterdarstellungen, die, wie man leicht sieht, eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit bilden. Aber unter diesen Parameterdarstellungen befindet sich doch auch jetzt noch eine eindeutig ausgezeichnete, diejenige, welche zu dem Zahlensystem XIV gehört. Dieses System XIV ist nämlich unter allen in Betracht kommenden Systemen das einzige, welches als ein Grenzfall des Systems XIII aufgefasst werden kann; und ausserdem hat die betreffende Parameterdarstellung noch die Eigenthümlichkeit, dass sie eine canonische Parameterdarstellung ist. (Seite 200.)

Man kann leicht eine ganze Klasse von Gruppen angeben, zu welchen Parametersysteme der hier betrachteten Art gehören.

Jede Gruppe von linearen Transformationen, deren endliche Transformationen durch lineare Gleichungen zwischen den Transformationscoefficienten gekennzeichnet werden können, ist mit einer einfach-transitiven projectiven Gruppe gleichzusammengesetzt, deren reciproke Gruppe ebenfalls projectiv ist.

In der That, unter der gemachten Voraussetzung wird eine r-gliedrige Gruppe sich darstellen lassen durch eine lineare

---

1) Auch dieser Satz ist im Grunde bereits in einem von Herrn LIE aufgestellten Theorem enthalten, welches besagt, dass die Gruppe der allgemeinen Fläche zweiten Grades durch keine nicht-projective Transformation in eine projective Gruppe übergeführt werden kann.

Digitized by Google

Schaar von $r+1$ unabhängigen bilinearen Formen[1]). Diese braucht man nur als Grundzahlen eines Zahlensystems einzuführen, um in den zugehörigen Gruppen G_1 und G_2 sogleich die in Rede stehenden Gruppen zu erhalten.

Die zu dem Zahlensystem gehörige Zahl k ist in solchen Fällen an eine obere Grenze gebunden; sie kann höchstens den Werth m erreichen, wenn die gegebene Gruppe einem Gebiete m^{ter} Stufe angehört.

Eine Gruppe der genannten Art ist zum Beispiel die *allgemeine projective Gruppe* des Gebietes n^{ter} Stufe selbst. Das zugehörige Zahlensystem hat n^2 Grundzahlen, nämlich die speciellen bilinearen Formen $e_{ik} = x_i u_k$. Die zugehörige Multiplicationsregel ist diese:

$$e_{ij} e_{jk} = e_{ik} , \quad e_{ij} e_{kl} = 0 \quad (j \neq k) .$$

Die zugehörige Zahl k hat den Werth n; die Transformation $x' = x^{-1}$ ist also nicht projectiv, ausser im einfachsten Falle $n = 2$. Gleichwohl sind die zu dem System gehörigen Gruppen G_1 und G_2 durch eine projective Transformation ähnlich; es geht nämlich das System in sein reciprokes System:

$$\eta_{jk} \eta_{ij} = \eta_{ik} , \quad \eta_{kl} \eta_{ij} = 0 \quad (j \neq k)$$

über durch die Substitutionen

$$\eta_{ik} = e_{ki} \quad (i, k = 1 \cdots n) .$$

Wir müssen dieses Zahlensystem im Sinne unserer Definition, welche der Zahl der Haupteinheiten, und dann auch der Zahl k einen grösseren Spielraum gestattet, als ein *specielles* bezeichnen, wiewohl es natürlich alle übrigen Systeme von complexen Zahlen einschliesst.

Setzt man $n = 2$, so gelangt man wieder zu den Quaternionen, und zwar in ihrer *zweiten* reellen Gestalt[2]).

1) Herr Frobenius hat die Systeme complexer Zahlen, die er »Formensysteme« nennt, durch solche Schaaren von bilinearen Formen definirt. (»Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen«, Crelle's Journ. Bd. 84, S. 59 u. ff.) Diese Definition leidet indessen an dem wesentlichen Mangel, dass die Beziehung zwischen der Formenschaar und dem Multiplicationsgesetz des Zahlensystems nicht eindeutig umkehrbar ist. Es können sehr wohl ganz verschiedene Schaaren von bilinearen Formen zu denselben Multiplicationsregeln führen.

2) Man vergleiche die vortreffliche Abhandlung des Herrn Stephanos: *Mémoire sur la répresentation des homographies binaires par des points de l'espace* etc. Math. Ann. Bd. 22, S. 299 u. ff.

Digitized by Google

Um die canonische Form XII b. zu erhalten, braucht man nur neue Grundzahlen $e_0 \ldots e_3$ einzuführen durch die Substitutionen:

$$e_0 = e_{11} + e_{22}\,, \quad e_1 = -e_{12} - e_{21}\,,$$
$$e_2 = e_{22} - e_{11}\,, \quad e_3 = \quad e_{21} - e_{12}\,.$$

Auch die Untergruppen der allgemeinen projectiven Gruppe auf der Geraden fallen in die hier betrachtete Klasse: Zu den verschiedenen Typen von eingliedrigen Gruppen gehören, wie wir wissen, die verschiedenen Systeme mit zwei Grundzahlen, zu der zweigliedrigen Gruppe gehört das Zahlensystem IV, $n = 3$. Ueberhaupt gehört die grösste projective Gruppe eines Gebietes n^{ter} Stufe, welche beliebig vorgelegte Punkte und lineare Mannigfaltigkeiten $n-1^{\text{ter}}$ Stufe einzeln in Ruhe lässt, immer in die besprochene Klasse. Wichtige Gruppen dieser Art bilden die Gruppe aller Aehnlichkeitstransformationen der Ebene und ihre dreigliedrige von den perspectiven Aehnlichkeitstransformationen gebildete invariante Untergruppe. Zu der letzteren Gruppe gehört ein bereits mehrfach besprochenes System von vier Grundzahlen, das System XV.

Endlich mag noch die oben erwähnte Ausartung der Gruppe der Bewegungen in der Ebene als ebenfalls hierher gehörig hervorgehoben werden; sie lässt sich dadurch definiren, dass ihre Transformationen die Figur eines Linienelementes, und zwar sowohl den Punkt, als auch die Gerade doppelt zählend in Ruhe lassen. Das entsprechende Zahlensystem ist das System IX ($n = 4$), mit dem Parameterwerth $c = -1$.

Ist eine Gruppe G durch eine lineare Schaar von bilinearen Formen darstellbar, so gilt dasselbe von einer zu ihr dualistischen Gruppe G'. Die Systeme von complexen Zahlen, welche den Gruppen G und G' entsprechen, gehören demselben Typus an, sind aber reciprok. Die Ausführung einer dualistischen Transformation auf die Gruppe G hat also die Wirkung, dass die beiden mit ihr verknüpften projectiven Parametergruppen G_1 und G_2 vertauscht werden. Beispielsweise gehört zu derjenigen projectiven Gruppe der Ebene, deren Transformationen zwei gerade Linien, und auf der einen derselben noch einen dem Schnittpunkte benachbarten Punkt stehen lassen, das System VII ($n = 4$); zu der dualistisch gegenüberstehenden Gruppe gehört das nämliche System, aber in der reciproken Form.

Digitized by Google

Man kann schon durch Betrachtung der infinitesimalen Transformationen einer projectiven Gruppe entscheiden, ob ihre endlichen Transformationen durch eine lineare Schaar von bilinearen Formen dargestellt werden können.

Seien $S_1 \dots S_r$ die unabhängigen infinitesimalen Transformationen einer projectiven Gruppe, geschrieben als bilineare Normalformen, sei ferner S^0 die bilineare Form, welche die identische Transformation darstellt. Das fragliche Kennzeichen besteht dann in dem Vorhandensein von r^2 Relationen der Form

$$S_i S_k = \gamma_{iko} S^0 + \sum_1^r{}_s \gamma_{iks} S_s \ .$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so ist

$$\lambda_0 S^0 + \lambda_1 S_1 + \dots + \lambda_r S_r = 0$$

der Ausdruck der allgemeinsten endlichen Transformation der Gruppe, die bilinearen Formen $S^0, S_1 \dots S_r$ aber bilden unmittelbar das zugehörige Zahlensystem.

§ 11.

Ein Analogon zu den Euler'schen Formeln.

Von den im vorigen Paragraphen besprochenen Parameterdarstellungen sind die wichtigsten diejenige der Gruppe der Drehungen eines starren Körpers um einen festen Punkt, und die Parameterdarstellung der Gruppe der Bewegungen in der Ebene. Die erstere ist wohlbekannt: die Parameterdarstellung selbst wurde bereits von Euler gelehrt; die Formeln für die Zusammensetzung der Parameter hat der französische Mathematiker Rodrigues angegeben [1]).

Die analoge Parameterdarstellung der zweiten Gruppe scheint der Aufmerksamkeit der Mathematiker bis jetzt entgangen zu sein, und zwar ohne Zweifel deshalb, weil man mehr Gewicht auf eine möglichst einfache Darstellung der Bewegungen selbst zu legen gewohnt war, als auf eine einfache Zusammensetzung der Parameter mehrerer hinter einander ausgeführter Bewegungen.

1) Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace ..., Liouville Journ. de Math. t. 5. (1840) p 380 etc.

Um die Analogie der beiden in Rede stehenden Systeme von Formeln besser hervortreten zu lassen, geben wir zunächst die bekannte Ableitung der Formeln Euler's und Rodrigues' aus den Quaternionen.

Man erhält die Euler'sche Darstellung der Drehungen eines starren Körpers unmittelbar, wenn man die Gleichungen der zu den Quaternionen gehörigen Gruppe $\mathfrak{G}$ aufstellt, und x_1, x_2, x_3 als rechtwinklige Coordinaten deutet:

$$(1.)\quad \begin{cases} x_0' = x_0 , \\ Nx_1' = (a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2)\, x_1 + 2\,(a_1 a_2 + a_0 a_3)\, x_2 \\ \qquad + 2(a_1 a_3 - a_0 a_2)\, x_3 , \\ Nx_2' = (a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2)\, x_2 + 2\,(a_2 a_3 + a_0 a_1)\, x_3 \\ \qquad + 2(a_2 a_1 - a_0 a_3)\, x_1 , \\ Nx_3' = (a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2)\, x_3 + 2\,(a_3 a_1 + a_0 a_2)\, x_1 \\ \qquad + 2(a_3 a_2 - a_0 a_1)\, x_2 , \\ \text{worin} \qquad N = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 . \end{cases}$$

Die Formeln für die Zusammensetzung der Parameter zweier hinter einander ausgeführter Transformationen der Gruppe (1.) bilden das sogenannte Multiplicationstheorem der Quaternionen:

$$(2.)\quad \begin{cases} c_0 = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 \\ c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ c_2 = a_0 b_2 - a_1 b_3 + a_2 b_0 + a_3 b_1 \\ c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_3 b_0 . \end{cases}$$

Ersetzt man hierin a durch x und c durch x', so erhält man die Gleichungen der von uns mit G_1 bezeichneten Parametergruppe; ersetzt man dagegen b durch x und c durch x', so erhält man die Gruppe G_2.

Die Gruppe G_1 besteht aus allen linearen Transformationen, welche sämmtliche Individuen der einen Erzeugendenschaar der imaginären Kugel $N = 0$ in Ruhe lassen; ihre reellen Transformationen sind geschaart-perspective Transformationen mit conjugirt-imaginären Axen (imaginären Geraden »zweiter Art«), welche der anderen Erzeugendenschaar angehören. Die Gruppe G_2 erhält man aus G_1, wenn man beide Erzeugendenschaaren ihre Rollen wechseln lässt. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ besteht aus dem In-

Digitized by Google

begriff aller Drehungen um den Anfangspunkt der Coordinaten; oder, wie wir in unserem Zusammenhange vielleicht besser sagen werden, sie besteht aus dem Inbegriff aller linearen Transformationen des Raumes, welche sämmtliche Individuen einer Schaar von Flächen zweiter Ordnung $N - \lambda x_0^2 = 0$ in Ruhe lassen, die einander längs eines imaginären Kegelschnittes (des sogenannten unendlich fernen Kugelkreises) berühren.

Zwischen den Verhältnissen der Parameter a_0, a_1, a_2, a_3, den Neigungswinkeln ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 der Drehungsaxe gegen die Coordinatenaxen und dem Drehungswinkel φ besteht bekanntlich ein einfacher Zusammenhang: Rechnen wir den Drehungssinn von der positiven x-Axe über die positive y-Axe nach der positiven z-Axe hin positiv, und normiren die Verhältnissgrössen a_1, a_2, a_3 so, dass die Summe ihrer Quadrate gleich der Einheit wird, so haben wir die einfachen Relationen [1])

$$(3.)\quad \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} = -a_0\,,\quad \cos\vartheta_1 = a_1\,,\quad \cos\vartheta_2 = a_2\,,\quad \cos\vartheta_3 = a_3\ .$$

Halten wir also in den Formeln (1.) die Parameter a_1, a_2, a_3 fest und lassen a_0 allein sich ändern, so erhalten wir die allgemeine eingliedrige Untergruppe der Gruppe $\mathfrak{G}$.

Von den EULER'schen Formeln aus gelangt man nun durch einen Grenzübergang zu der entsprechenden Parameterdarstellung der Gruppe der Bewegungen in der Ebene. Wir wollen indessen bei der Herleitung dieser Parameterdarstellung nicht unmittelbar an die EULER'schen Formeln, sondern in Uebereinstimmung mit dem Gange der bisherigen Entwickelung an das System XIII ($n = 4$) (a. a. O. S. 261) anknüpfen, welches ja auch einen Grenzfall des soeben betrachteten Systems XII, des Systems der Quaternionen bildet. (Vgl. a. a. O. S. 254.)

Die zu dem Systeme XIII gehörige Gruppe $\mathfrak{G}$ hat die Gleichungen:

$$(4.)\quad \begin{cases} x_0' = x_0\,,\ x_1' = x_1\ , \\ N x_2' = (a_0^2 - a_1^2)\,x_2 + 2a_0a_1\,x_3 + 2\,(a_2a_1 - a_0a_3)\,x_4\ , \\ N x_3' = (a_0^2 - a_1^2)\,x_3 + 2(a_3a_1 + a_0a_2)\,x_1 - 2a_0a_1\,x_2\ , \\ \text{worin} \qquad N = a_0^2 + a_1^2\ . \end{cases}$$

1) Die allgemeineren Formeln lauten

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}{a_0}\ ,\qquad \cos\vartheta_i \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} = \frac{a_i}{a_0}\ (i = 1, 2, 3)\ .$$

Digitized by Google

Setzt man hier $\frac{x_2}{x_1} = x$, $\frac{x_3}{x_1} = y$, und deutet x und y als rechtwinklige Cartesische Coordinaten, so erhält man die betreffende Darstellung der Gruppe aller Bewegungen der Ebene in der Form:

$$(4'.)\quad \begin{cases} (a_0^2 + a_1^2)\, x' = (a_0^2 - a_1^2)\, x + 2\, a_0 a_1\, y + 2(a_1 a_2 - a_0 a_3)\ , \\ (a_0^2 + a_1^2)\, y' = (a_0^2 - a_1^2)\, y - 2\, a_0 a_1\, x + 2(a_1 a_3 + a_0 a_2)\ , \end{cases}$$

während die Zusammensetzung der Parameter durch die Formeln angegeben wird:

$$(5.)\quad \begin{cases} c_0 = a_0 b_0 - a_1 b_1\ , \\ c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0\ , \\ c_2 = a_0 b_2 - a_1 b_3 + a_2 b_0 + a_3 b_1\ , \\ c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_3 b_0\ . \end{cases}$$

Die geometrische Bedeutung der Gruppen G_1, G_2, welche zu dem Formelsystem (5.) gehören, ist wiederum nicht schwer zu erfassen. Man denke sich zwei Ebenen Σ_1 und Σ_2 des Raumes, ferner auf ihrer Schnittlinie gelegen zwei Punkte S_1 und S_2. Diese bekannte Figur bestimmt im Ganzen vier Strahlenbüschel (Σ_i, S_k), gebildet von denjenigen Geraden, welche in der Ebene Σ_i liegen und durch den Punkt S_k gehen. Jede Gerade des Büschels (Σ_1, S_1) bestimmt nun mit jeder Geraden des Büschels (Σ_2, S_2) eine eingliedrige Gruppe von geschaart-perspectiven Transformationen, deren Axen jene beiden Geraden sind. Der Inbegriff aller so erhaltenen Transformationen bildet eine dreigliedrige, einfach-transitive Gruppe G_1, bei deren sämmtlichen Transformationen die Strahlen der Büschel (Σ_1, S_2) und (Σ_2, S_1) einzeln stehen bleiben, während die Büschel (Σ_1, S_1) und (Σ_2, S_2) zweigliedrig transformirt werden. Die reciproke Gruppe G_2 von G_1 entsteht, wenn man die Büschel (Σ_1, S_1) und (Σ_2, S_2) mit den Büscheln (Σ_1, S_2) und (Σ_2, S_1) vertauscht. Diese Gruppen nun sind es, welche dem Zahlensystem XIII zugehören. Und zwar sind in unserem Falle sowohl die Ebenen Σ_1, Σ_2, als auch die Punkte S_1, S_2 conjugirt-imaginär; die Axen einer reellen Transformation der Gruppen G_1 oder G_2 sind conjugirt-imaginäre Gerade zweiter Art, falls die Transformation nicht gerade der invarianten zweigliedrigen Untergruppe angehört (einer Translation der Ebene entspricht). In diesem letzteren Falle

Digitized by Google

vereinigen sich die beiden Axen mit einer reellen Geraden, der Schnittlinie der Ebenen Σ_1, Σ_2 und Verbindungslinie der Punkte S_1, S_2; oder besser, sie sind dieser Geraden unendlich benachbart. Auch die Gruppe $\mathfrak{G}$ ist einfach zu definiren. Sei Σ diejenige Ebene des Büschels (Σ_1, Σ_2), welche von einem beliebigen weder auf Σ_1 noch auf Σ_2 gelegenen Punkte P harmonisch getrennt ist, oder überhaupt irgend eine P nicht enthaltende Ebene jenes Büschels; dann kann man in Σ eine mit der Gruppe der Bewegungen der Ebene gleichzusammengesetzte Gruppe herstellen, welche durch die Punkte S_1 und S_2 als fest bleibende Elemente bestimmt ist. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ ist dann bereits völlig bekannt als diejenige Gruppe, bei deren Transformationen die Punkte der Ebene Σ in vorgeschriebener Weise vertauscht werden, ausserdem aber der Punkt P und alle Ebenen des Büschels (Σ_1, Σ_2) einzeln stehen bleiben.

Es ist von Interesse, die Formeln (4'.) mit den Formeln zu vergleichen, durch welche man die Transformation rechtwinkliger Coordinatensysteme in der Ebene gewöhnlich darzustellen pflegt.

Rechnen wir den Drehungssinn von der positiven x-Axe nach der positiven y-Axe hin positiv, nennen φ den Drehungswinkel, und x_0, y_0 die Coordinaten des Drehungsmittelpunktes, so wird ein Punkt x, y durch die solchergestalt bestimmte Bewegung der Ebene übergeführt in einen anderen x', y', dessen Coordinaten gegeben sind durch die Formeln

$$(6.) \qquad \begin{cases} x' - x_0 = (x - x_0)\cos\varphi - (y - y_0)\sin\varphi\ , \\ y' - y_0 = (x - x_0)\sin\varphi + (y - y_0)\cos\varphi\ . \end{cases}$$

Normirt man nun die Parameter der Formeln (4'.) so, dass $a_1 = 1$ wird, und verlangt, dass die Transformation (4'.) identisch sei mit der Transformation (6.), so ergibt sich ein einfacher Zusammenhang zwischen den Grössen x_0, y_0, φ einerseits und den Parameterverhältnissen $a_0 : a_1 : a_2 : a_3$ andererseits: Man erhält unter der genannten Voraussetzung einfach [1])

$$(7.) \qquad \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} = -a_0\ , \quad x_0 = a_2\ , \quad y_0 = a_3\ .$$

---

1) Die allgemeinere Formel lautet

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} = -\frac{a_1}{a_0}\ , \quad x_0 = \frac{a_2}{a_1}\ , \quad y_0 = \frac{a_3}{a_1}\ .$$

Digitized by Google

Hält man also in den Formeln (4'.) die Parameter a_1, a_2, a_3 fest und lässt a_0 allein sich ändern, so entsteht die allgemeine eingliedrige Untergruppe der Gruppe der Bewegungen. — Diejenigen Parametersysteme, für welche a_1 verschwindet, entsprechen den Parallelverschiebungen oder Translationen.

Durch die Transformation (7.) werden die zu den Formeln (6.) gehörige Parametergruppe und ihre reciproke, welche beide aus transcendenten Transformationen bestehen, übergeführt in zwei projective Gruppen G_1 und G_2.

Sowohl die Gruppe der Drehungen einer Kugel, als auch die Gruppe der Bewegungen in der Ebene ist als Untergruppe der allgemeinen projectiven Gruppe aufgefasst noch einer weiteren reellen Form fähig. Diesen neu hinzutretenden Gestalten entsprechen die von XII. und XIII. durch ihre Realitätsverhältnisse verschiedenen Zahlensysteme XIIb. und XIIIb.

Wir gehen hier auf diesen Gegenstand nicht näher ein, und bemerken nur noch, dass die den Formeln (1.) ... (7.) entsprechenden Formeln aus diesen letzteren durch die imaginären Substitutionen

$$\begin{array}{cccc} \bar{x}_0 = x_0\ , & \bar{x}_1 = -ix_1\ , & \bar{x}_2 = -ix_2\ , & \bar{x}_3 = -x_3 \\ \bar{a}_0 = a_0\ , & \bar{a}_1 = -ia_1\ , & \bar{a}_2 = -ia_2\ , & \bar{a}_3 = -a_3 \end{array}$$

. . . . . .

hervorgehen.

Die betrachteten Beispiele, die man leicht noch durch weitere vermehren könnte, mögen genügen, um den Nutzen zu erweisen, den die Systeme von complexen Zahlen bei der Behandlung gewisser Gegenstände der Geometrie bringen können.

Zum Schluss noch eine Bemerkung.

Man wird sich naturgemäss die Frage vorlegen, ob nicht die wichtigsten Transformationsgruppen des Raumes, die Gruppe der allgemeinen Fläche zweiten Grades, die Gruppe aller Bewegungen des Raumes, die Gruppe der reciproken Radien u. s. f. in einem ähnlichen Verhältnisse zu einem Paare von reciproken projectiven Gruppen stehen, und also ähnliche Parameterdarstellungen gestatten, wie die Gruppe der Drehungen eines starren Körpers um einen festen Punkt oder die Gruppe der Bewegungen in der Ebene. Diese Frage ist hinsichtlich der Gruppe der Fläche zweiten Grades sicher, hinsichtlich der beiden anderen Gruppen

wahrscheinlich ebenfalls im *verneinenden* Sinne zu entscheiden. Dies hindert natürlich nicht, dass man dennoch Systeme von complexen Zahlen auch für diese Gruppen nutzbar machen kann. Hinsichtlich der Gruppe der Fläche zweiten Grades und ihrer Verallgemeinerung in mehrfach ausgedehnten Gebieten hat in der That Herr Lipschitz einen geeigneten Algorithmus angegeben, in seinen bekannten Untersuchungen über die Transformation der quadratischen Formen. Daraus ergibt sich dann zugleich auch eine entsprechende Parameterdarstellung der Gruppe der reciproken Radien im Raume und der Gruppe des linearen Complexes, wegen der bekannten Beziehungen dieser Gruppen zu der projectiven Gruppe einer quadratischen Mannigfaltigkeit im vierfach ausgedehnten Raume. Die Parametergruppe der Gruppe einer allgemeinen quadratischen Mannigfaltigkeit im Raume von fünf Dimensionen und ihre reciproke sind wieder zu einem Paar von projectiven Gruppen ähnlich, in Folge der Beziehung jener Gruppe zur Gruppe aller linearen Transformationen des dreifach ausgedehnten Raumes. Ich denke auf die Theorie der genannten Gruppen und ihrer Ausartungen, insbesondere auf die Gruppe der Bewegungen des Raumes bei einer späteren Gelegenheit zurückzukommen.

Marburg, den 3. April 1889.

Inhalt.

		Seite
§ 1.	Allgemeines über reciproke Gruppen	178
§ 2.	Hülfssätze aus der Theorie der linearen Transformationen	184
§ 3.	Systeme von complexen Zahlen	186
§ 4.	Die einfachsten mit einem System complexer Zahlen verknüpften Tranformationsgruppen	190
§ 5.	Eine Eigenschaft der reciproken projectiven Gruppen	195
§ 6.	Umkehrbarkeit der Beziehung zwischen den Systemen complexer Zahlen und den reciproken projectiven Gruppen	200
§ 7.	Beispiele	203
§ 8.	Weitere mit einem System complexer Zahlen verbundene Transformationsgruppen	208
§ 9.	Der Nutzen der Systeme complexer Zahlen	213
§ 10.	Über die Parameterdarstellung einiger Transformationsgruppen	216
§ 11.	Ein Analogon zu den Euler'schen Formeln	222

Berichtigung. Auf S. 182 Z. 3. v. u. ist zu lesen: ... dass jede Transformation der Gruppe in sich selbst übergeführt wird.

Digitized by Google

SITZUNG VOM 6. MAI 1889.

Friedrich Schur, *Über die canonische Form der Parametergruppe.* (Vorgelegt v. d. w. M. S. Lie.)

Im 33. Bande der Mathematischen Annalen habe ich in einer kleineren Abhandlung »Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Zahlen« eine von den Methoden des Herrn Lie unabhängige Begründung der Haupteigenschaften der Parametergruppe einer endlichen Transformationsgruppe gegeben. Ich habe dort eine Recursionsformel (11.) aufgestellt, welche die die Parametergruppe:

$$(1.) \quad x_i' = \varphi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n; u_1, u_2, \cdots, u_n) = \varphi_i(x; u)$$

definirenden Functionen $\varphi_i(x; u)$ kennen lehrt, sobald die Componenten ihrer infinitesimalen Transformationen:

$$(2.) \quad \frac{\partial \varphi_i(x; 0)}{\partial u_k} = \xi_i^k(x)$$

bekannt sind. Hierbei ist nun die Frage von Interesse, welche besondere Form diese Functionen $\xi_i^k(x)$ haben müssen, damit die Parametergruppe gerade diejenige canonische Form annehme, welche der durch Herrn Lie gegebenen Erzeugung der endlichen Transformationsgruppen durch ihre eingliedrigen Untergruppen zu Grunde liegen muss. Ich werde im Folgenden unendliche Reihen für die $\xi_i^k(x)$ angeben, welche diese Forderung erfüllen, erlaube mir aber wegen der Begründung auf eine demnächst in den Mathematischen Annalen erscheinende ausführlichere Abhandlung »Neue Begründung der Theorie der endlichen Transformationsgruppen« zu verweisen.

Die Componenten $\xi_i^k(x)$ der infinitesimalen Transforma-

tionen der Parametergruppe müssen bekanntlich die folgenden Bedingungen befriedigen; sie müssen erstens den Differentialgleichungen:

$$(3.)\quad \sum_{p=1}^{n}\left\{\frac{\partial \xi_i^k(x)}{\partial x_p}\xi_p^h(x) - \frac{\partial \xi_i^h(x)}{\partial x_p}\xi_p^k(x)\right\} = \sum_{l=1}^{n} \xi_i^l(x)\, c^l_{h,k}\,,$$

wo:

$$(4.)\quad c^l_{h,k} = -c^l_{k,h}$$

und:

$$(5.)\quad \sum_{l=1}^{n}\{c^l_{g,h}\,c^i_{l,k} + c^l_{h,k}\,c^i_{l,g} + c^l_{k,g}\,c^i_{l,h}\} = 0$$

erfüllen und zweitens den Anfangsbedingungen:

$$(6.)\quad \xi_i^k(0) = \delta_{i,k}$$

genügen, wo $\delta_{i,k} = 1$ oder 0, je nachdem $i = k$ oder $i \leqq k$.

Soll nun die Parametergruppe ausserdem die canonische Form haben, so sind hierfür, wie a. a. O. gezeigt wird, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen die, dass:

$$(7.)\quad \sum_{k=1}^{n}\xi_i^k(x)\, x_k = x_i\,;$$

dann wird nämlich:

$$(8.)\quad \varphi_i(a_1 t,\ a_2 t, \cdots, a_n t;\ a_1 t', a_2 t', \cdots, a_n t') = a_i(t + t')\,,$$

wodurch die Zerfällung einer durch die Gleichungen:

$$(9.)\quad f_q[f(z;x);u] = f_q[z;\varphi(x;u)]$$

charakterisirten Gruppe in ihre eingliedrigen Untergruppen in Evidenz gesetzt ist.

Durch das Hinzutreten der Bedingungen (7.) sind nun aber die $\xi_i^k(x)$ vollständig bestimmt, und zwar ist:

$$(10.)\quad \xi_i^k(x) = \delta_{i,k} +$$

$$\sum_{m=1}^{r}\frac{\lambda_m}{m!}\, c^{l_1}_{k,k_{d_1}}\cdot c^{l_2}_{l_1,k_{d_2}}\cdots\cdots c^{l_{m-1}}_{l_{m-2},k_{d_{m-1}}}\cdot c^{i}_{l_{m-1},k_{d_m}}\cdot x_{k_1}\cdot x_{k_2}\cdots x_{k_m},$$

$$\left\{\begin{array}{c} l_1; l_2; \cdots; l_{m-1} = 1, 2, \ldots, n;\ k_1, k_2, \cdots, k_m = 1, 2, \cdots, n; \\ d_1, d_2, \cdots, d_m = 1, 2, \cdots, m \end{array}\right\}$$

Digitized by Google

wo von den Zahlenfactoren $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{12}$, $\lambda_{2q+1} = 0$ und die übrigen durch die Recursionsformeln:

$$(11.) \quad (2q+1)\lambda_{2q} = -(\lambda_2\lambda_{2q-2} + \lambda_4\lambda_{2q-4} + \cdots + \lambda_{2q-2}\lambda_2)$$

bestimmt sind. Was den Convergenzbereich dieser Reihen betrifft, so convergiren sie, wenn alle $c^l_{h,k}$ dem absoluten Betrage nach unterhalb G liegen, sicher für alle x_i, die der Ungleichung:

$$(12.) \quad |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| < \frac{1}{nG}$$

genügen.

Man wolle bemerken, dass hierdurch die Untersuchungen des Herrn Lie im 22. Kapitel seiner Theorie der Transformationsgruppen über die Bestimmung aller r-gliedrigen Gruppen eine neue Grundlage erhalten, insofern die Formeln (10.) der infinitesimalen Transformationen *einer* einfach transitiven Gruppe von vorgelegter Zusammensetzung liefern; die Componenten $\eta_i^k(x)$ der reciproken Gruppe sind dann:

$$(13.) \quad \eta_i^k(x) = \xi_i^k(x) + \sum_{l=1}^{n} c_{l,k}^{i}\, x_l \,.$$

Uebrigens gebe ich in der erwähnten Abhandlung ein allgemeines Verfahren an, um unabhängig hiervon alle zu einer gegebenen Zusammensetzung gehörigen transitiven Transformationsgruppen zu bestimmen.

SITZUNG VOM 3. JUNI 1889.

J. Wislicenus, *Ueber die chemische Wirkung der in einer Kohlenstoffkette an das erste Atom gebundenen Elemente auf das fünfte.*

Sind die von mir entwickelten Vorstellungen über die räumliche Anordnung der Kohlenstoffatome richtig, so muss in einer normalen Kette derselben das erste dem fünften bis fast zur Berührung nahe treten[1]), die mit dem ersten vereinigten Elemente sollten daher einen besonders starken Einfluss auf die mit dem fünften verbundenen Atome ausüben.

Wenn, wie aus zahlreichen Thatsachen zu folgern ist, das Vorhandensein des stark negativen Sauerstoffs in einer Verbindung die diesem räumlich besonders nahen Wasserstoffatome in ihrer Bindungsfestigkeit lockert, und letztere daher leichter als andere durch substituirende negative Elemente herausgelöst und substituirt werden, so sollte diese Wirkung sich nicht allein — wie bisher beobachtet — in der α-Stellung, sondern auch am fünften Kohlenstoffatome der Kette stärker als an allen übrigen äussern.

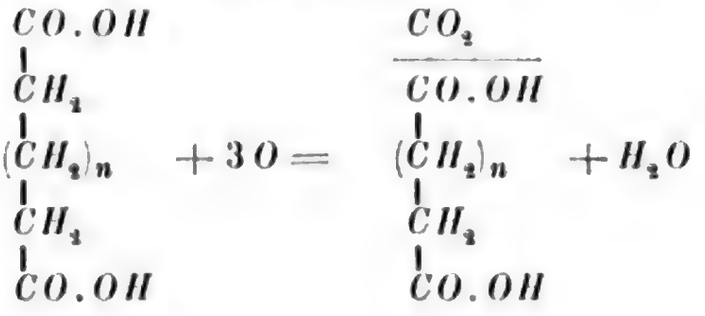
Ich habe diese Vermuthung an der Sebacinsäure geprüft und in der That das Obwalten derartiger Verhältnisse nachweisen können.

Man hat bisher die Umwandlung höher molekularer zweibasischer Säuren der Formel $C_nH_{2n}(CO.OH)_2$ in die kohlenstoffärmeren durch Oxydation als einen Abbau aufgefasst, d. h. angenommen, die Wirkung eines Oxydationsmittels finde an den, den Carboxylgruppen benachbarten Kohlenstoffatomen so statt,

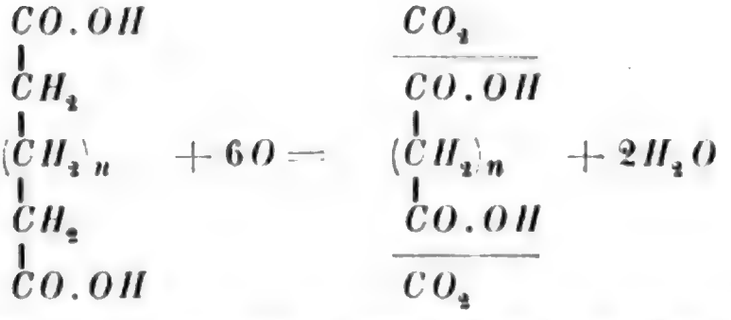
1) Abhandlungen der mathem.-phys. Klasse XIV, 74.

Digitized by Google

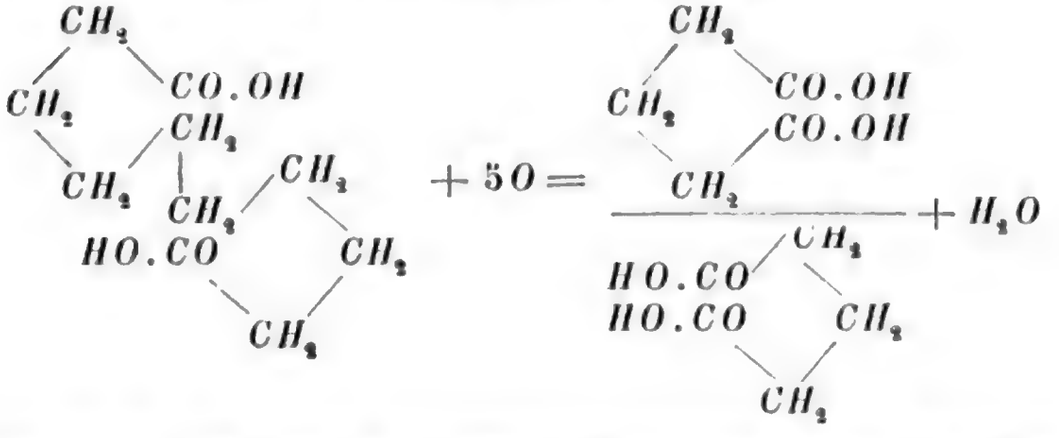
dass diese selbst in Carboxyl übergehen, während die vorher vorhandenen als Kohlensäure austreten.



und



Die Sebacinsäure enthält eine normale Kette von 10 Kohlenstoffatomen, welche sich nach den angedeuteten Anschauungen so anordnen, dass jede Carboxylgruppe je dem fünften Kohlenstoffatome, d. h. einem der beiden gleichwerthigen mittelsten der Kette besonders nahe tritt. Neben der Oxydation an den α-ständigen Methengruppen, welche zum Abbau führt, sollte man eine solche an den von beiden Seiten her δ-ständigen und infolge dessen zwischen diesen eine Aufspaltung des Kernes unter Bildung von je zwei Molekulen Glutarsäure erwarten:



Nun ist in der That von Carette[1]) Glutarsäure unter den Oxydationsproducten der Sebacinsäure bereits aufgefunden worden.

1) Comptes rendus 101, 1498.

Ob dieselbe jedoch als Product des Abbaues oder der Spaltung entsteht, ist nicht bekannt.

Die Frage, ob neben dem Abbau Spaltung stattfindet, muss sich aber entscheiden lassen, und zwar auf Grund folgender Betrachtung.

Durch den Oxydations-Abbau entsteht aus *einem* Molekul einer zweibasischen Säure, abgesehen von der gasförmig entweichenden Kohlensäure, stets wieder *ein* Molekul zweibasischer Säure von niedrigerem Kohlenstoffgehalt. Findet *nur* Abbau statt, so muss das Product der Oxydation daher genau eben so viel basisches Hydrat zur Bildung von Neutralsalz verlangen, als die ganze Menge des zur Oxydation gelangenden Ingredienzes.

Der Spaltungsvorgang dagegen wird aus *einem* Molekul der Ingredienzsäure *zwei* Molekule der zweibasischen Productsäure liefern, welche zur Neutralisation das Doppelte der Basismenge in Anspruch nimmt.

Findet Abbau neben Spaltung statt, so werden die Oxydationsproducte zwar nicht ganz doppelt so viel Basis verlangen als die der Oxydation unterworfene Säure, aber doch mehr als die gleiche Menge. Dieser Ueberschuss lässt sich durch Titriren mit Normal-Alkali ermitteln und aus ihm der procentische Betrag der Spaltung und des Abbaues berechnen.

So bedarf 1 g Sebacinsäure 9,901 ccm Normal-Kalilösung zur Neutralisation, eben so viel das Product ihres Abbaues, das der Spaltung dagegen 19,802 ccm. Sind von je 100 g der Sebacinsäure x g gespalten und $100 - x$ g abgebaut, so gilt die Gleichung $19{,}802\ x + 9{,}901\,(100 - x) = a$ ccm verbrauchten Normal-Alkalis, oder

$$x = \frac{a - 990{,}1}{9{,}901}\ .$$

Da bei der Oxydation der Sebacinsäre selbst bei grossem Ueberschusse von Salpetersäure immer ein Theil der ersteren unverändert bleibt und nicht in wässerige Lösung übergeht, so wurde folgendes Verfahren eingeschlagen.

Je 100 g reine Sebacinsäure erhitzte ich mit 400 g — 740 g reiner Salpetersäure von 1,42 spec. Gew. zunächst im Kolben auf dem Wasserbade, bis die Entwickelung rother Dämpfe fast aufhörte. Dazu waren 24 bis 40 Stunden erforderlich. Dann wurde

Digitized by Google

noch etwa 10 Stunden lang auf freiem Feuer gekocht, und die gesammte Lösung in einer Schale auf dem Dampfbade abgedampft. Der Rückstand wurde noch mehrmals mit etwas Wasser vermischt und wieder verdampft, bis er keine Spur von Salpetersäure mehr enthielt. Hierauf wurden 500 g Wasser zugesetzt, wobei sich unveränderte, sehr schwer lösliche Sebacinsäure, welche sich als ganz rein erwies, abschied. Dieselbe wurde auf trocken gewogenen Filtern gesammelt, mit Wasser gewaschen, getrocknet und wieder gewogen. Durch Subtraction ihres Gewichtes von dem angewandten erfuhr man dasjenige der in der Lösung vorhandenen oxydirten Säuremenge. Lösung und Waschwasser wurden nun vereinigt, das Volum genau gemessen, aliquote Theile (je 25 ccm) abpipettirt und genau bis zur Neutralität mit Normal-Kalilösung austitrirt. So erfuhr man durch Umrechnung die Menge der letzteren, welche zur Neutralisation der Gesammtmenge der gelösten oxydirten Säuren erforderlich war (*a* ccm). Aus der bekannten Menge oxydirter Sebacinsäure aber liess sich berechnen, wie viel Kubikcentimeter dieselbe direct oder in Form ihrer Abbauproducte erfordert haben würde. Diese Menge (*b* ccm) war stets wesentlich kleiner als die thatsächlich erforderliche (*a* ccm).

So z. B. waren in einem Falle von 100 g Sebacinsäure bei Oxydation mit 700 g Salpetersäure 22,7626 g unverändert zurückgewonnen, demnach 77,2374 g oder 77,24 g oxydirt. Bei blossem Abbau der letzteren wären 764,73 ccm (*b*) Normal-Alkali zur Neutralisation erforderlich gewesen, thatsächlich jedoch wurden 995,20 ccm (*a*), also 230,47 ccm mehr erfordert.

Die Spaltungsproducte erforderten zur Neutralisation demnach $2 \times 230{,}47 = 470{,}94$ ccm, die des Abbaues 534,26 ccm. Dies ergiebt aber in 77,24 g oxydirter Säure 53,96 g abgebauter und 23,28 g gespaltener Sebacinsäure oder auf je 100 g oxydirter Säure 69,86 abgebaute und 30,14 gespaltene Sebacinsäure.

Wurde weniger Salpetersäure zur Oxydation angewendet, so wurde mehr unveränderte Sebacinsäure zurückgewonnen, es war also weniger verändert worden. Das Verhältniss zwischen abgebauter und gespaltener Säure blieb jedoch stets annähernd dasselbe, indessen zeigte sich, dass der gespaltene Antheil mit der Menge der Salpetersäure ab-, der überhaupt grössere abgebaute Antheil dagegen zunahm.

Digitized by Google

So wurden von je 100 g Sebacinsäure

	I.	II.	III.
bei Anwend. v.	440 g Salpeters.	660 g Salpeters.	740 g Salpeters.
unveränd. zur. erh.	57,30 g	31,24 g	22,76 g
abgebaut waren	28,08 -	46,01 -	53,96 -
gespalten »	14,62 -	22,75 -	23,28 -

Es ergiebt sich daraus auf 100 g wirklich oxydirter Sebacinsäure

	I.	II.	III.
an abgebauter	65,76	66,91	69,86
an gespaltener	34,24	33,09	30,11

Als Oxydationsproducte wurden ausser Bernsteinsäure, Glutarsäure und Adipinsäure noch grössere Mengen anderer Säuren gefunden, welche selbst und in Form ihrer Bariumsalze sehr leicht in Wasser löslich sind und sich nur schwer von einander trennen lassen. Sie scheinen zweibasische Monoxysäuren zu sein, denn ihre Bariumsalze gaben bei der Analyse fast immer auf 1 Atom Barium zu 5 Atomen Sauerstoff führende Werthe:

$$HO.\begin{matrix} CO.O \\ | \\ C_nH_{2n-1} \\ | \\ CO.O \end{matrix}\!\!\diagdown\!\!\diagup Ba\ .$$

Die Adipinsäure kann nur Product des Abbaues, die Bernsteinsäure wird auch solches der Spaltung sein, da sie aus Glutarsäure durch Abbau-Oxydation entsteht.

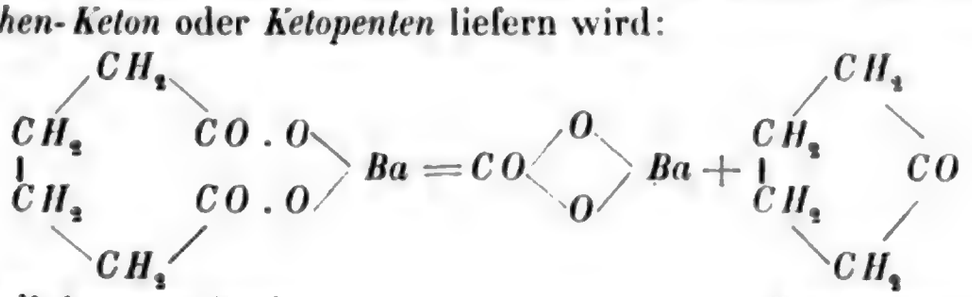
J. Wislicenus, *Vorläufige Mittheilung über Fünferring-Ketone.*

A. v. Baeyer [1]) machte bereits im Jahre 1885 darauf aufmerksam, dass ohne Zweifel Ringe aus fünf einwerthig mit einander verbundenen Kohlenstoffatomen grosse Beständigkeit haben werden, da beim Zustandekommen eines solchen die Bindungsrichtungen je zweier benachbarter Kohlenstoffatome nur um ein Geringes (0,44°) von der nomalen abgelenkt werden müssen, um den Ring zu schliessen.

Zu demselben Resultate gelangte ich [2]) in dem Nachweise, dass in einer normalen Kette von fünf einwerthig gebundenen Kohlenstoffatomen je eine Bindestelle der beiden endständigen fast zusammenfallen.

Die Leichtigkeit, mit welcher Derivate solcher Fünferringe in den sogenannten Hydrindenkörpern entstehen, spricht für die Berechtigung dieser Anschauung, doch muss sich dieselbe weiter prüfen lassen.

Es ist nämlich zu erwarten, dass alle zweibasischen Säuren, welche zwischen den beiden Hydroxylgruppen eine einfache tetracarbonide Kette haben, durch trockne Destillation ihrer Salze sehr glatt in Fünferring-Ketone übergehen werden, dass z. B. die Adipinsäure so das einfachste dieser Ketone, das *Tetramethen-Keton* oder *Ketopenten* liefern wird:

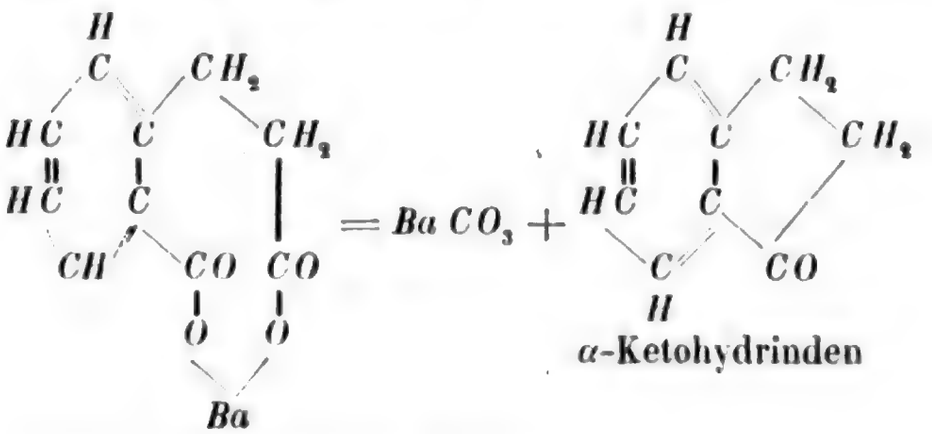


Adipinsaures Barium — Ketopenten.

1) Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft 18, 2279.

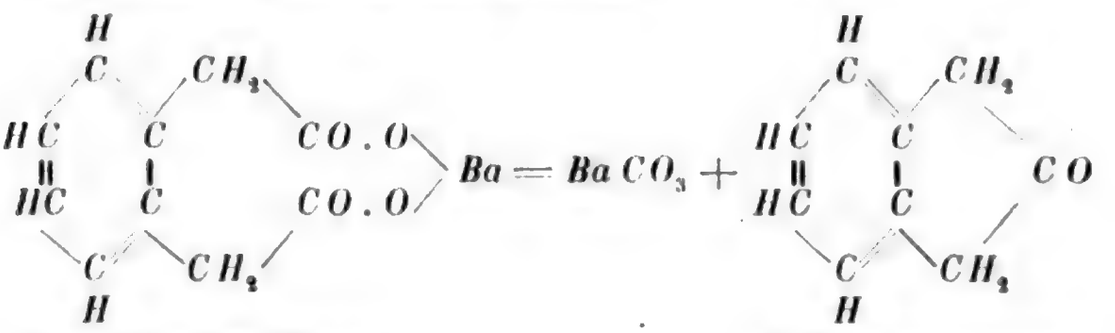
2) Abhandlungen der kgl. sächs. Gesellsch. der Wissensch. Mathem.-phys. Klasse XIV, 71.

Analoge Verbindungen, nur mit Seitenketten, sollten alle Alkyl- etc. substituirten Adipinsäuren liefern, die »*Ketohydrindene*« aber in analoger Weise aus der *Hydrozimmt-Orthocarbonsäure* und aus der *Ortho-Xylylen-Dicarbonsäure* entstehen.



Hydrozimmt-Orthocarbons. Barium

α-Ketohydrinden



Ortho-Xylylen-Dicarbonsaures Barium

β-Ketohydrinden.

Ich habe die drei Fälle untersuchen lassen und dadurch die Vermuthung vollkommen bestätigt gefunden.

1. Adipinketon oder Ketopenten

von Dr. Willibald Hentschel.

Reines adipinsaues Calcium oder Barium liefern bei der trocknen Destillation aus einer kleinen Kupferblase, die man am besten mit Kohlensäureanhydrid gefüllt hält, neben wenig Wasser ein bräunlich gefärbtes Oel in sehr guter Ausbeute. Schon bei erstmaliger Rectification lässt es sich in einen zwischen 128° und 132° siedenden Haupttheil und eine geringere Menge eines erst oberhalb 200°, dann aber nicht ohne Zersetzung destillirenden dicklichen Oeles zerlegen. Im luftverdünnten Raume bei 30 mm

Digitized by Google

Quecksilberdruck geht letzteres unzersetzt zwischen 135° und 140° über und erscheint, wie Römisch-Camillenöl, schön blau gefärbt.

Bei der Verbrennung liefert das letztere Oel Zahlen, welche zur Formel $C_{10}H_{14}O$ führen.

	Berechnet:	Gefunden:
C_{10}	80,00	80,09 %
H_{14}	9,33	9,03 -
O	10,67	—
	100,00	

Da dem niedriger siedenden Hauptantheile die Formel C_5H_8O zukommt, so wird die hochsiedende Substanz, ähnlich wie Mesityloxyd aus Aceton, nach der Gleichung

$$2\,C_5H_8O = H_2O + C_{10}H_{14}O$$

entstanden sein.

Aus den zwischen 128° und 132° siedenden Antheilen gewinnt man das Adipinketon am leichtesten rein, indem man dieselben mit einer concentrirten Lösung von Natriumbisulfit schüttelt, die vollkommen erstarrte Masse absaugt, abpresst, den Rückstand gut mit Alkohol auswäscht, von Neuem abpresst, und die so erhaltene reine Natriumsulfitverbindung des Ketones nach dem Trocknen durch Destillation mit Wasser zersetzt. Mit letzterem geht ein farbloses, angenehm pfefferminzartig riechendes leichtes Oel über, welches abgehoben, mit entwässertem Glaubersalz getrocknet und durch Destillation rein gewonnen wird. Es destillirt fast vom ersten bis zum letzten Tropfen bei 130,5°. Die Analyse lieferte zur Formel C_5H_8O sehr gut stimmende Zahlen.

	Berechnet:	Gefunden:
C_5	71,43	71,27 %
H_8	9,52	9,56 -
O	19,05	—
	100,00	

Dieses *Adipinketon* verbindet sich leicht mit Hydroxylamin, wenn man beide in alkoholisch wässeriger Lösung mit einander vermischt und einige Zeit stehen lässt. Man versetzt dann mit Wasser, äthert die Flüssigkeit aus und erhält nach dem Abdestilliren des Aethers ein Oel, welches beim Stehen über Schwefelsäure krystallinisch erstarrt. Unter vermindertem Drucke lässt die neue Verbindung sich unverändert destilliren

(bei 45 mm Quecksilberdruck liegt der Siedepunkt bei 120—121°) und bildet dann eine farblose, auch nach dem Umkrystallisiren bei 56° schmelzende Krystallmasse, welche zweifellos das *Adipinketoxim* $C_5H_8N(OH)$ ist.

Durch Salpetersäure von 1,2 specifischem Gewicht wird das Keton mit stürmischer Heftigkeit oxydirt und dabei in *Glutarsäure* und eine geringe Menge *Bernsteinsäure* verwandelt. Den Verdampfungsrückstand nimmt man in Wasser auf und sättigt mit Bariumhydrat. Dabei scheidet sich etwas bernsteinsaures Barium ab, dessen Säure bei 180° schmilzt, dabei stark zum Husten reizende Dämpfe ausstossend. Die von dem bernsteinsauren Barium abfiltrirte Mutterlauge krystallisirt nach starkem Einengen in schönen Prismen-Aggregaten, welche durchaus die Zusammensetzung des *glutarsauren Bariums* besitzen, indem sie bei 150° 24,93 % Wasser verloren und im Trockenzustande einen Bariumgehalt von 51,08 % gaben. Die Formel $C_5H_6BaO_4 + 5H_2O$ verlangt 25,21 % Wasser, während sich für $C_5H_6BaO_4$ 51,31 % *Ba* berechnen.

Durch Fällung einer verdünnten Lösung des Bariumsalzes mit Zinksulfat wurde eine Lösung des Zinksalzes dargestellt, welche beim Erwärmen die charakteristischen Ausscheidungen von *glutarsaurem Zink* ergab.

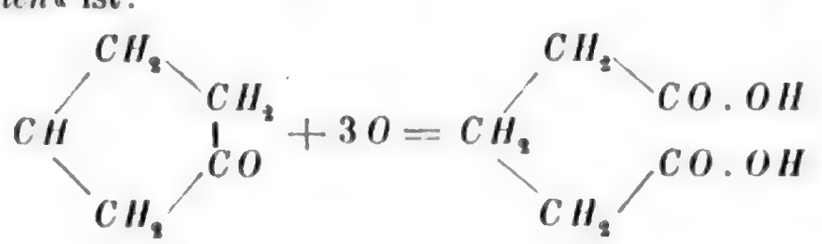
Die aus dem Bariumsalze durch genaue Zersetzung mit Schwefelsäure freigemachte Säure zeigte den Schmelzpunkt der Glutarsäure.

Die Menge des erhaltenen glutarsauren Bariums betrug mehr als 80 % von der nach den Gleichungen

$$C_5H_8O + 3O = C_5H_8O_4 \ ,$$
$$C_5H_8O_4 + Ba(OH)_2 = H_2O + C_5H_6BaO_4$$

berechneten; $\frac{1}{10}$ seines Gewichtes wurde an bernsteinsaurem Salze gewonnen.

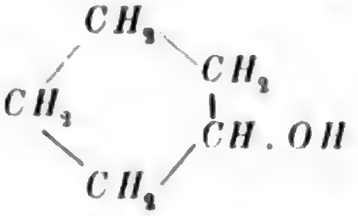
Diese sehr glatte Oxydation des Adipinketones zu Glutarsäure spricht unbedingt dafür, dass dasselbe das Ringketon »*Ketopenten*« ist:



Digitized by Google

Es mag hierbei erwähnt sein, dass genau dasselbe Keton in den sogenannten Holzölen vorkommt, welche bei der Rectification des rohen Holzgeistes hinterbleiben. Aus den Fractionen 125—135° desselben gewinnt man es durch Umwandlung in die Natriumfulfitverbindung, Auswaschen desselben mit Alkohol, Abpressen, Trocknen und Destillation mit Wasser als leichtes, farbloses, pfefferminzartig riechendes Oel von 130,5° Siedepunkt, dessen Oxim bei 56° schmilzt und welches durch Salpetersäure mit stürmischer Heftigkeit zu Glutarsäure und wenig Bernsteinsäure oxydirt wird. Bei der Elementaranalyse lieferte es die zur Formel C_5H_8O führenden Werthe $C = 71{,}36\,\%$ und $H = 9{,}38\,\%$.

Ein über Wasser geschichtetes Gemisch des Ketones mit Aether wird durch eingetragenes Natrium grösstentheils zu dem bei 139° siedenden Alkohol, dem *Hydroxypenten*



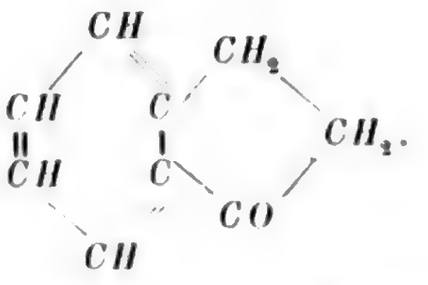
reducirt, welcher 69,51 % C und 11,57 % H ergab, während die Formel $C_5H_{10}O$ 69,76 und 11,62 % verlangt.

Durch Salpetersäure wird dieser Alkohol wieder sehr heftig zu Glutarsäure oxydirt, durch Jodwasserstoff in sein bei 180°—181° siedendes Jodür C_5H_9J (berechnet 64,79 %, gefunden 64,55 % Jod) verwandelt.

Die weitere Bearbeitung des Adipinketones wird im hiesigen Laboratorium durchgeführt.

2. Das α-Ketohydrinden,

von E. KÖNIG.



Diese Verbindung wird leicht erhalten, wenn Hydrozimmt-Orthocarbonsäure in freiem Zustande oder als Bariumsalz der trocknen Destillation unterworfen wird. Im ersteren Falle entwickelt sich Kohlensäuregas in reichlichen Mengen, im letzteren bleibt Bariumcarbonat zurück. Zweckmässig nimmt man die

Digitized by Google

Destillation aus einem Metallbade vor. Das braun gefärbte Destillat erstarrt zu einer Krystallmasse, welche entweder durch Umkrystallisiren aus Aether, oder durch Rectification gereinigt wird.

Das Hauptproduct bildet farblose Krystalle, die bei 40° schmelzen und bei 243° destilliren. Bei der Verbrennung lieferte es Werthe, welche für die erwartete Formel $C_9 H_8 O$ gut stimmten.

	Berechnet:	Gefunden:	
C_9	81,82	81,55	81,47
H_8	6,06	6,46	6,27
O	12,12	—	—
	100,00		

Durch Reduction in saurer oder ätherischer Lösung daraus den entsprechenden secundären Alkohol zu gewinnen, gelang nicht. Es entstanden immer höher molekulare nicht wohl zu reinigende Körper, welche wahrscheinlich Condensationsproducte, theilweise vielleicht auch Pinakone sind.

Dagegen lässt sich der gesuchte Alkohol durch Vermittelung des *Oxims* darstellen. In alkoholischer Lösung setzt sich das Keton leicht mit Hydroxylamin um und liefert dabei ein aus Alkohol gut krystallisirendes farbloses *Oxim*, dessen Schmelzpunkt bei 143° liegt. Dasselbe giebt zur erwartenden Formel $C_9 H_8 : N . OH$ stimmende Analysenresultate.

	Berechnet:	Gefunden:
C_9	73,47	73,24
H_9	6,12	6,44
N	9,52	9,63
O	10,89	—
	100,00	

Ebenso liefert das Keton mit Phenylhydrazin in alkoholischer Lösung leicht eine krystallinische, bei 133°—134° schmelzende Phenylhydrazinverbindung

$$C_9 H_8 : N . NH . C_6 H_5 .$$

	Berechnet:	Gefunden:		
C_{15}	81,08	80,83	80,98	—
H_{14}	6,31	6,74	6,51	—
N_2	12,61	—	—	12,58
	100,00			

Digitized by Google

Bei der Reduction in saurer Lösung gehen beide Verbindungen, die letztere unter gleichzeitiger Abspaltung von Anilin, in die Amidverbindung

$$C_9H_9 . NH_2$$

über, deren neutrales Chlorwasserstoffsalz beim Erwärmen mit einer wässerigen Lösung von Kaliumnitrit ein Oel abscheidet, welches zwischen 233° und 234° unzersetzt destillirt und der dem Keton entsprechende Alkohol $C_9H_9 . OH$ ist.

	Berechnet:	Gefunden:
C_9	80,60	80,70
H_{10}	7,46	7,95
O	11,74	—
	100,00	

Wird das Keton in Eisessiglösung mit trocknem Chlor behandelt, so bilden sich zwei verschiedene krystallinische gechlorte Derivate, welche in Folge verschiedener Löslichkeit von einander getrennt werden können:

1. Das *Dichlor-α-Ketohydrinden*, $C_9H_6Cl_2O$, schmilzt bei 76,5—77°.

	Berechnet:	Gefunden:		
C_9	53,73	53,44	—	—
H_6	2,99	3,26	—	—
Cl_2	35,32	—	35,12	35,16
O	7,96	—	—	—
	100,00			

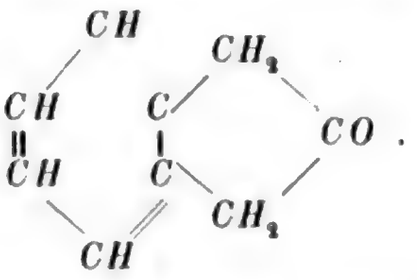
2. Das *Tetrachlor-α-Ketohydrinden*, $C_9H_4Cl_4O$, hat den Schmelzpunkt 107°.

	Berechnet:	Gefunden:	
C_9	40,00	39,84	—
H_4	1,48	1,89	—
Cl_4	52,59	—	52,74
O	5,93	—	—
	100,00		

Weitere Untersuchungen von Derivaten des α-Ketohydrindens werden bald abgeschlossen sein.

3. Das β-Ketohydrinden,

von H. Benedict.



Das Calciumsalz der *o-Xylylendicarbonsäure* liefert beim Erhitzen im luftverdünnten Raume ein krystallinisch erstarrendes Destillat, welches beim Umkrystallisiren aus Aether in farblosen Kryställchen von 60° Fp. und 224° Sp. erhalten wird. Es ist das gesuchte *β-Ketohydrinden* und giebt bei der Analyse Werthe, welche zur Formel C_9H_8O befriedigend stimmen.

Berechnet:	C_9	81,82	Gefunden: 82,20	81,86
	H_8	6,06	6,48	6,20
	O	12,12	—	—

In alkoholischer Lösung mit Hydroxylamin in Reaction gebracht, bildet es ein durch Umkrystallisiren aus Aether rein darstellbares *Oxim*, dessen Schmelzpunkt bei 150° liegt.

Berechnet:	C_9	73,47	Gefunden: 73,27
	H_9	6,12	6,65
	N	9,52	9,23
	O	10,89	—

Aus dem Keton durch directe Reduction den entsprechenden Alkohol zu erhalten, gelang nicht. Es wurde daher der Weg der Reduction des Oximes in essigsaurer Lösung mit Natriumamalgam eingeschlagen. Wird die Lösung nach erfolgter Reduction alkalisch gemacht und mit Aether ausgeschüttelt, so geht eine Basis in Lösung, welche mit Chlorwasserstoff ein krystallinisches, aber äusserst leicht zerfliessendes Hydrochlorür liefert. Da das letztere sich zur Analyse nicht eignet, so wurde es in die schwer lösliche Platinchloridverbindung übergeführt, welche in der That einen der Formel

$$(C_9H_9 . NH_3Cl)_2 PtCl_4$$

entsprechenden Platingehalt besitzt.

Berechnet: 28,79 % *Pt* Gefunden: 28,47 %

Die Umwandlung der Aminbase durch Salpetrigsäure in den Alkohol, sowie die Oxydation des Ketones sind noch nicht abgeschlossen.

Digitized by Google

W. Scheibner, *Ueber den Zusammenhang der Thetafunctionen mit den elliptischen Integralen.*

Fortsetzung zu S. 109.[1])

14.

Da für reelle Werthe von q die Wurzeln des Radicals H reell sind, so wollen wir, um auch den Fall zu behandeln, in welchem zwei Wurzeln von H conjugirt complex werden, qi statt q setzen. Alsdann wird

---

1) Art. 10, S. 103 hätte angemerkt werden sollen, dass der unbedingt convergirende WEIERSTRASS'sche Productenausdruck

$$\prod_{pp'}\left(1-\frac{u}{\omega}\right)e^{\frac{u}{\omega}+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{\omega}\right)^2}=\prod_{pp'}\left(1+\frac{u}{\omega}\right)e^{-\frac{u}{\omega}+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{\omega}\right)^2}$$

nicht bloss die Function $\zeta_1 u$, sondern auch die übrigen coordinirten Functionen ζu, $\zeta_2 u$, $\zeta_3 u$ darstellt, wenn respective

$$\omega=p\pi+(p'+\tfrac{1}{2})hi\ ,\qquad \omega=(p+\tfrac{1}{2})\pi+p'hi$$

und

$$\omega=(p+\tfrac{1}{2})\pi+(p'+\tfrac{1}{2})hi$$

gesetzt wird, während p und p' ohne Einschränkung alle ganzen Zahlen zwischen $\pm\infty$ durchlaufen. Eine *genaue Untersuchung der elliptischen unendlichen Doppelproducte* von der Form $\prod_{pp'}\left(1-\frac{u}{\alpha p+\beta p'+\gamma}\right)$ hat bekanntlich EISENSTEIN im 35. Bande des Crelle'schen Journals S. 153—274 geliefert.

$$\vartheta(u, qi) = \vartheta_3(2u, q^4) - i\vartheta_2(2u, q^4) ,$$

$$\vartheta_3(u, qi) = \vartheta_3(2u, q^4) + i\vartheta_2(2u, q^4) ,$$

$$\vartheta_1(u, qi) = 2i^{\frac{1}{4}} q^{\frac{1}{4}} \{\sin u + q^2 \sin 3u - q^6 \sin 5u - q^{12} \sin 7u \cdots\} ,$$

$$\vartheta_2(u, qi) = 2i^{\frac{1}{4}} q^{\frac{1}{4}} \{\cos u - q^2 \cos 3u - q^6 \cos 5u + q^{12} \cos 7u \cdots\} ,$$

so dass von den zwölf Quotienten der Thetafunctionen nur $\frac{\vartheta_1(u, qi)}{\vartheta_2(u, qi)}$ und $\frac{\vartheta_2(u, qi)}{\vartheta_1(u, qi)}$ reell bleiben. Mittelst der Multiplicationsformel (C.) des Art. 4 leitet man leicht die Ausdrücke ab:

$$\vartheta_1^2(u, qi) = \sqrt{i}\{\vartheta_2(q^2)\vartheta(2u, q^2) - \vartheta(q^2)\vartheta_2(2u, q^2)\} ,$$

$$\vartheta_2^2(u, qi) = \sqrt{i}\{\vartheta_2(q^2)\vartheta(2u, q^2) + \vartheta(q^2)\vartheta_2(2u, q^2)\} ,$$

welche eine einfachere Gestalt annehmen, wenn man u statt $2u$ und q statt q^2 schreibt.

Wir führen mithin als Argumente $\frac{1}{2}u$ statt u und $i\sqrt{q}$ statt q, oder $\frac{h - \pi i}{2}$ statt h ein, wodurch

$$\frac{\vartheta_1^2(\frac{1}{2}u, i\sqrt{q})}{\vartheta_2^2(\frac{1}{2}u, i\sqrt{q})} = \frac{\vartheta_2\vartheta u - \vartheta\vartheta_2 u}{\vartheta_2\vartheta u + \vartheta\vartheta_2 u} = \left\{\frac{\vartheta_1(\frac{1}{2}u)\,\vartheta_3(\frac{1}{2}u)}{\vartheta(\frac{1}{2}u)\,\vartheta_2(\frac{1}{2}u)}\right\}^2$$

$$= \frac{1 - \cos\varphi}{1 + \cos\varphi} = \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\varphi$$

hervorgeht. Zugleich wird

$$\vartheta(\tfrac{1}{2}u, i\sqrt{q})\,\vartheta_3(\tfrac{1}{2}u, i\sqrt{q}) = \vartheta_3\vartheta_3 u ,$$

$$\vartheta_1(\tfrac{1}{2}u, i\sqrt{q})\,\vartheta_2(\tfrac{1}{2}u, i\sqrt{q}) = \sqrt{i}\,\vartheta_3\vartheta_1 u ,$$

sowie

$$\vartheta_2(i\sqrt{q})\,\vartheta_1(\tfrac{1}{2}u, i\sqrt{q}) = 2\sqrt{i}\,\vartheta_1(\tfrac{1}{2}u)\,\vartheta_3(\tfrac{1}{2}u) ,$$

$$\vartheta_2(i\sqrt{q})\,\vartheta_2(\tfrac{1}{2}u, i\sqrt{q}) = 2\sqrt{i}\,\vartheta(\tfrac{1}{2}u)\,\vartheta_2(\tfrac{1}{2}u) .$$

Schreibt man nunmehr

Digitized by Google

$$\eta_4 u = \tfrac{1}{4}\eta_1(\tfrac{1}{2}u, i\sqrt{q}) = \left(\frac{d}{du}\right)^2 \lg \vartheta_4(\tfrac{1}{2}u, i\sqrt{q})$$

$$= \tfrac{1}{4}\frac{\vartheta_2''(i\sqrt{q})}{\vartheta_2(i\sqrt{q})} - \tfrac{1}{4}\vartheta_3^4 \frac{\vartheta_2^2(\tfrac{1}{2}u, i\sqrt{q})}{\vartheta_1^2(\tfrac{1}{2}u, i\sqrt{q})} ,$$

$$\eta_5 u = \tfrac{1}{4}\eta_2(\tfrac{1}{2}u, i\sqrt{q}) = \left(\frac{d}{du}\right)^2 \lg \vartheta_2(\tfrac{1}{2}u, i\sqrt{q})$$

$$= \tfrac{1}{4}\frac{\vartheta_2''(i\sqrt{q})}{\vartheta_2(i\sqrt{q})} - \tfrac{1}{4}\vartheta_3^4 \frac{\vartheta_1^2(\tfrac{1}{2}u, i\sqrt{q})}{\vartheta_2^2(\tfrac{1}{2}u, i\sqrt{q})} ,$$

wodurch η_4 und η_5 die Perioden 2π und $\pi + hi$, also auch $2hi$ erhalten, und setzt zur Abkürzung

$$\tfrac{1}{4}\frac{\vartheta_2''(i\sqrt{q})}{\vartheta_2(i\sqrt{q})} = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} - \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right) = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\vartheta''}{\vartheta} + \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right) = \varepsilon' ,$$

so folgt

$$\eta_4 u = \varepsilon' - \tfrac{1}{4}\vartheta_3^4 \cot^2 \tfrac{1}{2}\varphi , \quad \eta_5 u = \varepsilon' - \tfrac{1}{4}\vartheta_3^4 \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}\varphi ,$$

und durch Differentiation:

$$\eta_4' u = \tfrac{1}{4}\vartheta_3^4 \frac{\cos\frac{1}{2}\varphi}{\sin^3\frac{1}{2}\varphi}\frac{d\varphi}{du} = \tfrac{1}{4}\vartheta_3^4 \frac{\cot\frac{1}{2}\varphi}{\sin^2\frac{1}{2}\varphi}\sqrt{\vartheta_3^4\cos^2\varphi + \vartheta^4\sin^2\varphi}$$

$$= H_4 = \sqrt{(\varepsilon' - \eta_4)\left[\left(\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - 2\eta_4\right)^2 + \vartheta^4\vartheta_2^4\right]} ,$$

$$\eta_5' u = -\tfrac{1}{4}\vartheta_4^3 \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi}{\cos^2\frac{1}{2}\varphi}\sqrt{\vartheta_3^4\cos^2\varphi + \vartheta^4\sin^2\varphi}$$

$$= -H_5 = -\sqrt{(\varepsilon' - \eta_5)\left[\left(\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - 2\eta_5\right)^2 + \vartheta^4\vartheta_2^4\right]} .$$

15.

Hieraus entspringen die Formeln

$$u = \int_{-\infty}^{\eta_4}\frac{d\eta}{H} = \int_{\eta_5}^{\varepsilon'}\frac{d\eta}{H} , \qquad \pi = \int_{-\infty}^{\varepsilon'}\frac{d\eta}{H} ,$$

$$d\eta_4 = \{\tfrac{1}{2}\vartheta_1'(iq^{\frac{1}{2}})\}^3 \frac{\vartheta_4(u, iq^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_1^4(\tfrac{1}{2}u, iq^{\frac{1}{2}})}du ,$$

Digitized by Google

$$d\eta_5 = -\{\tfrac{1}{2}\vartheta_1'(iq^{\frac{1}{2}})\}^3 \frac{\vartheta_4(u, iq^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_2^4(\frac{1}{2}u, iq^{\frac{1}{2}})}\, du\,,$$

$$\sqrt{\varepsilon' - \eta_4} = \tfrac{1}{2}\vartheta_3^2 \cot\tfrac{1}{2}\varphi = \tfrac{1}{2}\vartheta_3^2 \frac{\vartheta_2(\frac{1}{2}u, iq^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_1(\frac{1}{2}u, iq^{\frac{1}{2}})}\,,$$

$$\sqrt{\varepsilon' - \eta_5} = \tfrac{1}{2}\vartheta_3^2 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi = \tfrac{1}{2}\vartheta_3^2 \frac{\vartheta_4(\frac{1}{2}u, iq^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_2(\frac{1}{2}u, iq^{\frac{1}{2}})}\,,$$

$$\vartheta_1^4(\tfrac{1}{2}u, iq^{\frac{1}{2}})H_4 = \vartheta_2^4(\tfrac{1}{2}u, iq^{\frac{1}{2}})H_5 = \{\tfrac{1}{2}\vartheta_1'(iq^{\frac{1}{2}})\}^3 \vartheta_4(u, iq^{\frac{1}{2}})\,.$$

Setzt man

$$H^2 = 4(\varepsilon' - \eta)(\varepsilon'' - \eta)(\varepsilon''' - \eta) = 4(\varepsilon_0 - \eta)^3 - g_2(\varepsilon_0 - \eta) - g_3\,,$$

so wird

$$\varepsilon'' = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} + i\vartheta^2\vartheta_2^2\right)\,, \qquad \varepsilon''' = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - i\vartheta^2\vartheta_2^2\right)\,,$$

$$\varepsilon_0 = \tfrac{1}{12}\frac{\vartheta_1'''(iq^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_1'(iq^{\frac{1}{2}})} = \tfrac{1}{12}\left(\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} + 3\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right) = \tfrac{1}{3}\left(\varepsilon' + \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right)\,,$$

während die Invarianten

$$g_2 = \tfrac{1}{12}(\vartheta_3^8 - 16\vartheta^4\vartheta_2^4)\,, \quad g_3 = \tfrac{1}{216}(\vartheta^4 - \vartheta_2^4)(\vartheta_3^8 + 32\vartheta^4\vartheta_2^4)$$

die nämlichen Werthe wie Art. 6 für $x_3 = \dfrac{\vartheta_4 u}{\vartheta_3 u}$ annehmen, wofür

$$g_2^3 - 27g_3^2 = \{\tfrac{1}{2}\vartheta_1'(iq^{\frac{1}{2}})\}^8 = -\tfrac{1}{16}\vartheta^4\vartheta_2^4\vartheta_3^{16}$$

gefunden wurde.

Lässt man jetzt auch das Argument u imaginär werden und schreibt

$$\overline{\eta_4} = \eta_4(ui)\,, \qquad \overline{\eta_5} = \eta_5(ui)\,,$$

$$\overline{H}^2 = (\overline{\eta} - \varepsilon')\left[\left(2\overline{\eta} - \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right)^2 + \vartheta^4\vartheta_2^4\right]\,,$$

so ergeben sich die Gleichungen

Digitized by Google

$$u = \int_{\bar{\eta}_4}^{\infty} \frac{d\eta}{\bar{H}} = \int_{\varepsilon'}^{\bar{\eta}_5} \frac{d\eta}{\bar{H}} , \qquad h = \int_{\varepsilon'}^{\infty} \frac{d\eta}{\bar{H}} ,$$

$$d\bar{\eta}_4 = -\{\tfrac{1}{2}\vartheta_1'(iq^{\frac{1}{2}})\}^3 \frac{\vartheta_1(ui, iq^{\frac{1}{2}})}{i\vartheta_1^4(\frac{1}{2}ui, iq^{\frac{1}{2}})}\, du ,$$

$$d\bar{\eta}_5 = \{\tfrac{1}{2}\vartheta_1'(iq^{\frac{1}{2}})\}^3 \frac{\vartheta_1(ui, iq^{\frac{1}{2}})}{i\vartheta_2^4(\frac{1}{2}ui, iq^{\frac{1}{2}})}\, du .$$

$$\sqrt{\bar{\eta}_4 - \varepsilon'} = \tfrac{1}{2}\vartheta_3^2 \frac{i\vartheta_2(\frac{1}{2}ui, iq^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_1(\frac{1}{2}ui, iq^{\frac{1}{2}})} ,$$

$$\sqrt{\bar{\eta}_5 - \varepsilon'} = \tfrac{1}{2}\vartheta_3^2 \frac{\vartheta_1(\frac{1}{2}ui, iq^{\frac{1}{2}})}{i\vartheta_2(\frac{1}{2}ui, iq^{\frac{1}{2}})} ,$$

$$\vartheta_1^4(\tfrac{1}{2}ui, iq^{\frac{1}{2}})\,\bar{H}_4 = \vartheta_2^4(\tfrac{1}{2}ui, iq^{\frac{1}{2}})\,\bar{H}_5 = \{\tfrac{1}{2}\vartheta_1'(iq^{\frac{1}{2}})\}^3 \frac{1}{i}\vartheta_1(ui, iq^{\frac{1}{2}}),$$

während g_3 sein Vorzeichen umkehrt.

Die entsprechenden Integrale zweiter Gattung endlich nehmen die Form an:

$$\frac{1}{2}\frac{\vartheta_1'(\frac{1}{2}u, iq^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_1(\frac{1}{2}u, iq^{\frac{1}{2}})} = -\int_{\eta_4}^{\varepsilon'} \frac{\eta\, d\eta}{H} , \qquad \frac{1}{2}\frac{\vartheta_2'(\frac{1}{2}u, iq^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_2(\frac{1}{2}u, iq^{\frac{1}{2}})} = \int_{\eta_5}^{\varepsilon'} \frac{\eta\, d\eta}{H} ,$$

$$\frac{1}{2i}\frac{\vartheta_1'(\frac{1}{2}ui, iq^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_1(\frac{1}{2}ui, iq^{\frac{1}{2}})} = -1 - \int_{\varepsilon'}^{\bar{\eta}_4} \frac{\eta\, d\eta}{\bar{H}} , \qquad \frac{1}{2i}\frac{\vartheta_2'(\frac{1}{2}ui, iq^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_2(\frac{1}{2}ui, iq^{\frac{1}{2}})} = \int_{\varepsilon'}^{\bar{\eta}_5} \frac{\eta\, d\eta}{\bar{H}} .$$

16.

Nachdem im vorigen Artikel die gleichen Invarianten wie für $x_3 = \frac{\vartheta_1 u}{\vartheta_3 u}$ erhalten worden sind, wollen wir, um analog zu den Invarianten für $x_2 = \frac{\vartheta_1 u}{\vartheta_2 u}$ und $x_1 = \frac{\vartheta_1 u}{\vartheta u}$ zu gelangen, in die Gleichungen des Art. 7 *erstens* q^2 statt q, und *zweitens* $\frac{1}{2}u$ statt u, so wie $\sqrt{q}$ statt q, oder $\frac{1}{2}h$ statt h einführen. Damit wird

Digitized by Google

erstens[1])

$$\eta u = \left(\frac{d}{du}\right)^2 \lg\ \vartheta(u, q^2) = \frac{\vartheta''(q^2)}{\vartheta(q^2)} - \vartheta_2^2(q^2)\,\vartheta_3^2(q^2)\,\frac{\vartheta_1^2(u, q^2)}{\vartheta^2(u, q^2)}$$
$$= \varepsilon_1 - \tfrac{1}{4}\vartheta_3^4\left(\frac{1 - \Delta\varphi}{\sin\varphi}\right)^2 ,$$

$$\eta_1 u = \left(\frac{d}{du}\right)^2 \lg\,\vartheta_1(u, q^2) = \frac{\vartheta''(q^2)}{\vartheta(q^2)} - \vartheta_2^2(q^2)\,\vartheta_3^2(q^2)\,\frac{\vartheta^2(u, q^2)}{\vartheta_1^2(u, q^2)}$$
$$= \varepsilon_1 - \tfrac{1}{4}\vartheta_3^4\left(\frac{1 + \Delta\varphi}{\sin\varphi}\right)^2 ,$$

$$\eta_2 u = \left(\frac{d}{du}\right)^2 \lg\,\vartheta_2(u, q^2) = \frac{\vartheta''(q^2)}{\vartheta(q^2)} - \vartheta_2^2(q^2)\,\vartheta_3^2(q^2)\,\frac{\vartheta_3^2(u, q^2)}{\vartheta_2^2(u, q^2)}$$
$$= \varepsilon_1 - \tfrac{1}{4}\vartheta_3^4\left(\frac{\Delta\varphi + \varkappa'}{\cos\varphi}\right)^2 ,$$

$$\eta_3 u = \left(\frac{d}{du}\right)^2 \lg\,\vartheta_3(u, q^2) = \frac{\vartheta''(q^2)}{\vartheta(q^2)} - \vartheta_2^2(q^2)\,\vartheta_3^2(q^2)\,\frac{\vartheta_2^2(u, q^2)}{\vartheta_3^2(u, q^2)}$$
$$= \varepsilon_1 - \tfrac{1}{4}\vartheta_3^4\left(\frac{\Delta\varphi - \varkappa'}{\cos\varphi}\right)^2 ,$$

mit den Perioden π und $2hi$;

1) Man kann bemerken, dass die Fälle 1) und 2) die beiden Transformationen enthalten, welche die Namen von GAUSS und von LANDEN tragen und nach JACOBI's Bezeichnung supplementär sind *(supplementariae ad duplicationem)*. In der That wird für

$$\frac{\vartheta_3(q^2)\ \ \vartheta_1(u, q^2)}{\vartheta_2(q^2)\ \ \vartheta(u, q^2)} = \sin\varphi_1 , \qquad \frac{\vartheta_3(\sqrt{q})\ \ \vartheta_1(\frac{1}{2}u, \sqrt{q})}{\vartheta(\sqrt{q})\ \ \vartheta_2(\frac{1}{2}u, \sqrt{q})} = \operatorname{tg}\varphi' :$$

$$\frac{1 - \varkappa'}{1 + \varkappa'}\sin^2\varphi_1 = \frac{1 - \Delta\varphi}{1 + \Delta\varphi} , \qquad \frac{1 - \varkappa}{1 + \varkappa}\operatorname{tg}^2\varphi' = \frac{\Delta\varphi - \cos\varphi}{\Delta\varphi + \cos\varphi} .$$

Von den mannichfachen Formen, welche man diesen Relationen geben kann, mögen hier nur die folgenden angeführt werden:

$$\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\pi + \varphi) = \frac{\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi + \varphi_1) + \varkappa'}{\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi - \varphi_1) + \varkappa'} ,$$

$$\operatorname{tg}(\varphi - \varphi') = \frac{1 - \varkappa}{1 + \varkappa}\operatorname{tg}\varphi' , \qquad \sin(2\varphi' - \varphi) = \varkappa\sin\varphi ,$$

wo bekanntlich $\varkappa = \left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\right)^2$, $\varkappa' = \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_3}\right)^2$ geschrieben sind.

Digitized by Google

zweitens[1])

$$\eta u = \left(\frac{d}{du}\right)^2 \lg\, \vartheta(\tfrac{1}{2}u, \sqrt{q}) = \tfrac{1}{4}\frac{\vartheta_2''(\sqrt{q})}{\vartheta_2(\sqrt{q})} + \tfrac{1}{4}\vartheta^2(\sqrt{q})\,\vartheta_3^2(\sqrt{q})\frac{\vartheta_3^2(\tfrac{1}{2}u, \sqrt{q})}{\vartheta^2(\tfrac{1}{2}u, \sqrt{q})}$$

$$= \varepsilon_3 + \tfrac{1}{4}\vartheta_3^4(\Delta\varphi + \varkappa\cos\varphi)^2 ,$$

$$\eta_1 u = \left(\frac{d}{du}\right)^2 \lg \vartheta_1(\tfrac{1}{2}u, \sqrt{q}) = -\tfrac{1}{4}\frac{\vartheta_2''(\sqrt{q})}{\vartheta_2(\sqrt{q})} - \tfrac{1}{4}\vartheta^2(\sqrt{q})\,\vartheta_3^2(\sqrt{q})\frac{\vartheta_2^2(\tfrac{1}{2}u, \sqrt{q})}{\vartheta_1^2(\tfrac{1}{2}u, \sqrt{q})}$$

$$= \varepsilon_3 - \tfrac{1}{4}\vartheta_3^4\left(\frac{\Delta\varphi + \cos\varphi}{\sin\varphi}\right)^2 ,$$

$$\eta_2 u = \left(\frac{d}{du}\right)^2 \lg \vartheta_2(\tfrac{1}{2}u, \sqrt{q}) = -\tfrac{1}{4}\frac{\vartheta_2''(\sqrt{q})}{\vartheta_2(\sqrt{q})} - \tfrac{1}{4}\vartheta^2(\sqrt{q})\,\vartheta_3^2(\sqrt{q})\frac{\vartheta_1^2(\tfrac{1}{2}u, \sqrt{q})}{\vartheta_2^2(\tfrac{1}{2}u, \sqrt{q})}$$

$$= \varepsilon_3 - \tfrac{1}{4}\vartheta_3^4\left(\frac{\Delta\varphi - \cos\varphi}{\sin\varphi}\right)^2 ,$$

$$\eta_3 u = \left(\frac{d}{du}\right)^2 \lg \vartheta_3(\tfrac{1}{2}u, \sqrt{q}) = \tfrac{1}{4}\frac{\vartheta_2''(\sqrt{q})}{\vartheta_2(\sqrt{q})} + \tfrac{1}{4}\vartheta^2(\sqrt{q})\,\vartheta_3^2(\sqrt{q})\frac{\vartheta^2(\tfrac{1}{2}u, \sqrt{q})}{\vartheta_3^2(\tfrac{1}{2}u, \sqrt{q})}$$

$$= \varepsilon_3 + \tfrac{1}{4}\vartheta_3^4(\Delta\varphi - \varkappa\cos\varphi)^2 ,$$

mit den zugehörigen Perioden 2π und hi.

Durch Differentiation erhält man hieraus

$$\eta_i' u \cdot \eta' u = H^2 = 4(\varepsilon_i - \eta)(\varepsilon_2 - \eta)(\varepsilon_3 - \eta) , \quad \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$$

$$= 4(\varepsilon_0 - \eta)^3 - g_2(\varepsilon_0 - \eta) - g_3 , \quad \varepsilon_0 = \tfrac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$$

und zwar wird im Fall 1):

$$H^2 = (\varepsilon_1 - \eta)\left[\left(\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - 2\eta\right)^2 - \vartheta^4\vartheta_3^4\right] ,$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\vartheta''(q^2)}{\vartheta(q^2)} = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} - \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right) = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\vartheta''}{\vartheta} + \frac{\vartheta''}{\vartheta_3}\right) ,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\vartheta_3''(q^2)}{\vartheta_3(q^2)} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} + \vartheta^2\vartheta_3^2\right) , \quad \varepsilon_3 = \frac{\vartheta_2''(q^2)}{\vartheta_2(q^2)} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \vartheta^2\vartheta_3^2\right),$$

$$\varepsilon_0 = \tfrac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''(q^2)}{\vartheta_1'(q^2)} = \tfrac{1}{12}\left(\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} + 3\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right) = \tfrac{1}{3}\left(\varepsilon_1 + \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right) ,$$

Digitized by Google

$$g_2 = \tfrac{1}{12}(\vartheta_2^8 + 16\vartheta^4\vartheta_3^4)\ , \quad g_3 = \tfrac{1}{216}(\vartheta^4 + \vartheta_3^4)(32\vartheta^4\vartheta_3^4 - \vartheta_2^8)\ ,$$

$$g_2^3 - 27g_3^2 = 16\{\vartheta_1'(q^2)\}^8 = \tfrac{1}{16}\vartheta^4\vartheta_2^{16}\vartheta_3^4\ ;$$

im Falle 2) dagegen:

$$H^2 = (\varepsilon_3 - \eta)\left[\left(\frac{\vartheta''}{\vartheta} - 2\eta\right)^2 - \vartheta_2^4\vartheta_3^4\right],$$

$$\varepsilon_1 = \tfrac{1}{4}\frac{\vartheta''(Vq)}{\vartheta(Vq)} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\vartheta''}{\vartheta} + \vartheta_2^2\vartheta_3^2\right),\ \varepsilon_2 = \tfrac{1}{4}\frac{\vartheta_3''(Vq)}{\vartheta_3(Vq)} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \vartheta_2^2\vartheta_3^2\right),$$

$$\varepsilon_3 = \tfrac{1}{4}\frac{\vartheta_2''(Vq)}{\vartheta_2(Vq)} = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} - \frac{\vartheta''}{\vartheta}\right) = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} + \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right),$$

$$\varepsilon_0 = \tfrac{1}{12}\frac{\vartheta_1'''(Vq)}{\vartheta_1'(Vq)} = \tfrac{1}{12}\left(\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} + 3\frac{\vartheta''}{\vartheta}\right) = \tfrac{1}{3}\left(\varepsilon_3 + \frac{\vartheta''}{\vartheta}\right),$$

$$g_2 = \tfrac{1}{12}(\vartheta^8 + 16\vartheta_2^4\vartheta_3^4)\ , \quad g_3 = \tfrac{1}{216}(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)(\vartheta^8 - 32\vartheta_2^4\vartheta_3^4)\ ,$$

$$g_2^3 - 27g_3^2 = \{\tfrac{1}{2}\vartheta_1'(q^{\frac{1}{2}})\}^8 = \tfrac{1}{16}\vartheta^{16}\vartheta_2^4\vartheta_3^4\ .$$

17.

Als die zugehörigen Integrale gehen die Ausdrücke hervor:

$$u = \int_{\eta}^{\varepsilon_1}\frac{d\eta}{H} = \int_{-\infty}^{\eta_1}\frac{d\eta}{H} = \int_{\eta_2}^{\varepsilon_3}\frac{d\eta}{H} = \int_{\varepsilon_2}^{\eta_3}\frac{d\eta}{H}\ ,$$

nebst

$$\int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1}\frac{d\eta}{H} = \int_{-\infty}^{\varepsilon_3}\frac{d\eta}{H} = \frac{\pi}{2}$$

im ersten, und

$$\int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1}\frac{d\eta}{H} = \int_{-\infty}^{\varepsilon_3}\frac{d\eta}{H} = \pi$$

im zweiten Falle.

Hier liegen η und η_3 zwischen ε_1 und ε_2; η_1 und η_2 aber sind kleiner als ε_3. Bei Einführung imaginärer Werthe von u dagegen sind $\overline{\eta_2}$ und $\overline{\eta_3}$ zwischen ε_2 und ε_3 enthalten, während $\overline{\eta}$ und $\overline{\eta_1}$ grösser als ε_1 werden. Dann hat man

$$u = \int_{\varepsilon_1}^{\overline{\eta}}\frac{d\eta}{\overline{H}} = \int_{\overline{\eta_1}}^{\infty}\frac{d\eta}{\overline{H}} = \int_{\varepsilon_3}^{\overline{\eta_2}}\frac{d\eta}{\overline{H}} = \int_{\overline{\eta_3}}^{\varepsilon_2}\frac{d\eta}{\overline{H}}\ ,$$

Digitized by Google

sowie

$$\int_{\varepsilon_3}^{\varepsilon_2} \frac{d\eta}{\overline{H}} = \int_{\varepsilon_1}^{\infty} \frac{d\eta}{\overline{H}} = h \quad \text{und resp.} = \tfrac{1}{2}h\,,$$

je nachdem der erste oder der zweite Fall betrachtet wird. Zugleich gelten die resp. Gleichungen:

$$\Theta^4(u, q^2)\, H_\delta^\varepsilon = \{\vartheta_1'(q^2)\}^3 \vartheta_\varepsilon(2u, q^2)\,,$$

$$\Theta^4(ui, q^2)\, \overline{H}_\delta^\varepsilon = \{\vartheta_1'(q^2)\}^3 \frac{1}{i} \vartheta_\varepsilon(2ui, q^2)\,,$$

$$\Theta^4(\tfrac{1}{2}u, \sqrt{q})\, H_\delta^\varepsilon = \{\tfrac{1}{2}\vartheta_1'(\sqrt{q})\}^3 \vartheta_\varepsilon(u, \sqrt{q})\,,$$

$$\Theta^4(\tfrac{1}{2}ui, \sqrt{q})\, \overline{H}\delta^\varepsilon = \{\tfrac{1}{2}\vartheta_1'(\sqrt{q})\}^3 \frac{1}{i} \vartheta_\varepsilon(ui, \sqrt{q})\,.$$

Es handelt sich noch um die Werthe der Integrale *zweiter* Gattung. Diese werden im *ersten* Falle

$$\frac{\vartheta'(u, q^2)}{\vartheta(u, q^2)} = \int_\eta^{\varepsilon_1} \frac{\eta\, d\eta}{H} = -\int_{\varepsilon_2}^{\eta} \frac{\eta\, d\eta}{H}\,,$$

$$\frac{\vartheta_1'(u, q^2)}{\vartheta_1(u, q^2)} = -\int_{\eta_1}^{\varepsilon_3} \frac{\eta\, d\eta}{H}\,,$$

$$\frac{\vartheta_2'(u, q^2)}{\vartheta_2(u, q^2)} = \int_{\eta_2}^{\varepsilon_3} \frac{\eta\, d\eta}{H}\,,$$

$$\frac{\vartheta_3'(u, q^2)}{\vartheta_3(u, q^2)} = \int_{\varepsilon_2}^{\eta_3} \frac{\eta\, d\eta}{H} = -\int_{\eta_3}^{\varepsilon_1} \frac{\eta\, d\eta}{H}\,,$$

$$\int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \frac{\eta\, d\eta}{H} = 0\,;$$

$$\frac{1}{i}\frac{\vartheta'(ui, q^2)}{\vartheta(ui, q^2)} = \int_{\varepsilon_1}^{\bar{\eta}} \frac{\eta\, d\eta}{\overline{H}}\,,$$

$$\frac{1}{i}\frac{\vartheta_1'(ui, q^2)}{\vartheta_1(ui, q^2)} = -1 - \int_{\varepsilon_1}^{\bar{\eta}_1} \frac{\eta\, d\eta}{\overline{H}}\,,$$

$$\frac{1}{i}\frac{\vartheta_2'(ui, q^2)}{\vartheta_2(ui, q^2)} = \int_{\varepsilon_3}^{\bar{\eta}_2} \frac{\eta\, d\eta}{\overline{H}} = -1 - \int_{\bar{\eta}_2}^{\varepsilon_2} \frac{\eta\, d\eta}{\overline{H}}\,,$$

$$\frac{1}{i}\frac{\vartheta_3'(ui, q^2)}{\vartheta_3(ui, q^2)} = \int_{\bar{\eta}_3}^{\varepsilon_2} \frac{\eta\, d\eta}{\overline{H}} = -1 - \int_{\varepsilon_3}^{\bar{\eta}_3} \frac{\eta\, d\eta}{\overline{H}}\,,$$

$$\int_{\varepsilon_3}^{\varepsilon_2} \frac{\eta\, d\eta}{\overline{H}} = -1\,.$$

Digitized by Google

Dagegen ergeben sich im *zweiten* Falle:

$$\frac{1}{2}\frac{\vartheta'(\frac{1}{2}u, \sqrt{q})}{\vartheta(\frac{1}{2}u, \sqrt{q})} = \int_{\eta}^{\varepsilon_1} \frac{\eta d\eta}{H} = -\int_{\varepsilon_2}^{\eta} \frac{\eta d\eta}{H},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\vartheta_1'(\frac{1}{2}u, \sqrt{q})}{\vartheta_1(\frac{1}{2}u, \sqrt{q})} = -\int_{\eta_1}^{\varepsilon_3} \frac{\eta d\eta}{H},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\vartheta_2'(\frac{1}{2}u, \sqrt{q})}{\vartheta_2(\frac{1}{2}u, \sqrt{q})} = \int_{\eta_2}^{\varepsilon_3} \frac{\eta d\eta}{H},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\vartheta_3'(\frac{1}{2}u, \sqrt{q})}{\vartheta_3(\frac{1}{2}u, \sqrt{q})} = \int_{\varepsilon_2}^{\eta_3} \frac{\eta d\eta}{H} = -\int_{\eta_3}^{\varepsilon_1} \frac{\eta d\eta}{H},$$

$$\int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \frac{\eta d\eta}{H} = 0;$$

$$\frac{1}{2i}\frac{\vartheta'(\frac{1}{2}ui, \sqrt{q})}{\vartheta(\frac{1}{2}ui, \sqrt{q})} = \int_{\varepsilon_1}^{\bar{\eta}} \frac{\eta d\eta}{\bar{H}},$$

$$\frac{1}{2i}\frac{\vartheta_1'(\frac{1}{2}ui, \sqrt{q})}{\vartheta_1(\frac{1}{2}ui, \sqrt{q})} = -\tfrac{1}{2} - \int_{\varepsilon_1}^{\bar{\eta}_1} \frac{\eta d\eta}{\bar{H}},$$

$$\frac{1}{2i}\frac{\vartheta_2'(\frac{1}{2}ui, \sqrt{q})}{\vartheta_2(\frac{1}{2}ui, \sqrt{q})} = \int_{\varepsilon_3}^{\bar{\eta}_2} \frac{\eta d\eta}{\bar{H}} = -\tfrac{1}{2} - \int_{\bar{\eta}_2}^{\varepsilon_2} \frac{\eta d\eta}{H},$$

$$\frac{1}{2i}\frac{\vartheta_3'(\frac{1}{2}ui, \sqrt{q})}{\vartheta_3(\frac{1}{2}ui, \sqrt{q})} = -\int_{\bar{\eta}_3}^{\varepsilon_2} \frac{\eta d\eta}{\bar{H}} = -\tfrac{1}{2} - \int_{\varepsilon_3}^{\bar{\eta}_3} \frac{\eta d\eta}{H};$$

$$\int_{\varepsilon_3}^{\varepsilon_2} \frac{\eta d\eta}{\bar{H}} = -\tfrac{1}{2}.$$

18.

Die Herren Hermite, Cayley und Aronhold [1] haben für das elliptische Differential die Form

$$\frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}}$$

aufgestellt, welche sich namentlich durch die Untersuchungen von Herrn Weierstrass als besonders vortheilhaft erwiesen hat.

1) Hermite, Crelle Band 52, Seite 8; Cayley, Crelle Band 50, S. 287, Band 55, S. 24; Aronhold im Berliner Monatsbericht 1861, S. 463.

Digitized by Google

Der enge Zusammenhang mit den Formeln der Artt. 8, 15, 16 liegt auf der Hand. Denn setzt man dort

$$\frac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} - \eta = \varepsilon_0 - \eta = p$$

und bezeichnet mit WEIERSTRASS durch $e_1 > e_2 > e_3$ die Wurzeln der cubischen Resolvente [1])

$$4\lambda^3 = g_2\lambda + g_3 ,$$

während für $g_2^3 < 27\, g_3^2$ e' die einzige reelle Wurzel sei, so wird

$$\frac{dp}{du} = -\delta\varepsilon\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3} = -\delta\varepsilon P ,$$

$$u = \int_{e_3}^{p}\frac{dp}{P} = \int_{p_1}^{\infty}\frac{dp}{P} = \int_{e_1}^{p_2}\frac{dp}{P} = \int_{p_3}^{e_2}\frac{dp}{P} = \int_{p_4}^{\infty}\frac{dp}{P} = \int_{e'}^{p_5}\frac{dp}{P} .$$

Für die Wurzelwerthe ergeben sich die Ausdrücke:

$$e_1 = \frac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} - \varepsilon_3 = \frac{1}{3}(\vartheta^4 + \vartheta_3^4) ,$$

$$e_2 = \frac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} - \varepsilon_2 = \frac{1}{3}(\vartheta_2^4 - \vartheta^4) ,$$

$$e_3 = \frac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} - \varepsilon_1 = -\frac{1}{3}(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4) ,$$

$$e' = \varepsilon_0 - \varepsilon' = \frac{1}{12}\{\vartheta^4(i\sqrt{q}) + \vartheta_3^4(i\sqrt{q})\} = \frac{1}{6}(\vartheta^4 - \vartheta_2^4) ,$$

während in den beiden Fällen des Art. 16:

1) $$e_1 = \varepsilon_0 - \varepsilon_3 = \frac{1}{3}\{\vartheta^4(q^2) + \vartheta_3^4(q^2)\} = \frac{1}{12}(\vartheta^4 - \vartheta_3^4 + 6\,\vartheta^2\vartheta_3^2) ,$$

$$e_2 = \varepsilon_0 - \varepsilon_2 = \frac{1}{3}\{\vartheta_2^4(q^2) - \vartheta^4(q^2)\} = \frac{1}{12}(\vartheta^4 + \vartheta_3^4 - 6\,\vartheta^2\vartheta_3^2) ,$$

$$e_3 = \varepsilon_0 - \varepsilon_1 = -\frac{1}{3}\{\vartheta_2^4(q^2) + \vartheta_3^4(q^2)\} = -\frac{1}{6}(\vartheta^4 + \vartheta_3^4) ;$$

2) $$e_1 = \frac{1}{12}\{\vartheta^4(\sqrt{q}) + \vartheta_3^4(\sqrt{q})\} = \frac{1}{6}(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4) ,$$

$$e_2 = \frac{1}{12}\{\vartheta_2^4(\sqrt{q}) - \vartheta^4(\sqrt{q})\} = -\frac{1}{12}(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4 - 6\,\vartheta_2^2\vartheta_3^2) ,$$

$$e_3 = -\frac{1}{12}\{\vartheta_2^4(\sqrt{q}) + \vartheta_3^4(\sqrt{q})\} = -\frac{1}{12}(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4 + 6\,\vartheta_2^2\vartheta_3^2) .$$

---

1) STREHLKE, Crelle Band 12, Seite 358; ARONHOLD, Crelle Band 39, Seite 158.

Digitized by Google

Für imaginäre Werthe der Amplitude hat man

$$\bar{p} = \bar{\eta} - \tfrac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} = \bar{\eta} - \varepsilon_0$$

zu schreiben und erhält analog:

$$\frac{d\bar{p}}{du} = \delta\varepsilon\sqrt{4\bar{p}^3 - g_2\bar{p} - g_3} = \delta\varepsilon\bar{P}\,,$$

$$u = \int_{\bar{p}}^{e_3}\frac{dp}{P} = \int_{-\infty}^{\bar{p}_1}\frac{dp}{P} = \int_{\bar{p}_2}^{e_1}\frac{dp}{P} = \int_{e_2}^{\bar{p}_3}\frac{dp}{P} = \int_{-\infty}^{\bar{p}_4}\frac{dp}{P} = \int_{\bar{p}_5}^{e'}\frac{dp}{P}\,.$$

Wie schon Art. 10 bemerkt, gebraucht Weierstrass die Bezeichnung

$$\wp u = \frac{1}{\vartheta_3^4}p_1\left(\frac{u}{\vartheta_3^2}\right)\,.$$

19.

Die bisher benutzten Werthe der Invarianten g_2 und g_3 hängen allein von dem Argumente q ab, es ist aber leicht, durch Einführung eines geeigneten Factors μ zu zwei beliebig gegebenen Invarianten G und H, sei es mit positiver oder negativer Discriminante, zu gelangen.

In der That erhält man für

$$\eta u = \mu^2\left(\frac{d}{du}\right)^2 \lg\vartheta u\,, \quad \text{u. s. w.}$$

mittelst einer leichten Transformation aus den Formeln des Art. 8:

$$u = \mu\int_{\eta}^{\mu^2\frac{\vartheta''}{\vartheta}}\frac{d\eta}{H} = \mu\int_{-\infty}^{\eta_1}\frac{d\eta}{H} = \mu\int_{\eta_2}^{\mu^2\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}}\frac{d\eta}{H} = \mu\int_{\mu^2\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}}^{\eta_3}\frac{d\eta}{H}$$

$$= \mu\int_{\mu^2\frac{\vartheta''}{\vartheta}}^{\bar{\eta}}\frac{d\eta}{H} = \mu\int_{\bar{\eta}_1}^{\infty}\frac{d\eta}{H} = \mu\int_{\mu^2\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}}^{\bar{\eta}_2}\frac{d\eta}{\bar{H}} = \mu\int_{\bar{\eta}_3}^{\mu^2\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}}\frac{d\eta}{\bar{H}}\,,$$

$$H^2 = 4\left(\mu^2\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \eta\right)\left(\mu^2\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \eta\right)\left(\mu^2\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \eta\right)\,,$$

$$\bar{H}^2 = 4\left(\bar{\eta} - \mu^2\frac{\vartheta''}{\vartheta}\right)\left(\bar{\eta} - \mu^2\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)\left(\bar{\eta} - \mu^2\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right)\,,$$

wodurch

Digitized by Google

$$\Theta^4 u\, H_\delta = \mu^3 \vartheta_1'^3 \vartheta_\delta (2u) \ , \quad \Theta^4 (ui)\, \bar{H}_\delta^\varepsilon = \mu^3 \vartheta_1'^3 \frac{1}{i} \vartheta_\delta (2ui) \ ,$$

$$\mu \vartheta_2 \vartheta_3 \frac{\vartheta_1 u}{\vartheta u} = \sqrt{\mu^2 \frac{\vartheta''}{\vartheta} - \eta} \ , \qquad \mu \vartheta \vartheta_3 \frac{\vartheta_3 u}{\vartheta u} = \sqrt{\eta - \mu^2 \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}} \ ,$$

$$\mu \vartheta_2 \vartheta \frac{\vartheta_2 u}{\vartheta u} = \sqrt{\eta - \mu^2 \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}} \ , \quad \mu \vartheta_2 \vartheta_3 \frac{\vartheta_1 (ui)}{i \vartheta (ui)} = \sqrt{\eta - \mu^2 \frac{\vartheta''}{\vartheta}} \ ,$$

u. s. w. Für die Integrale *zweiter* Gattung folgt ebenso

$$\mu \frac{\vartheta' u}{\vartheta u} = \int_\eta^{\mu^2 \frac{\vartheta''}{\vartheta}} \frac{\eta\, d\eta}{H} \ , \quad \text{u. s. w.}$$

Die zugehörigen Invarianten werden

$$G = \mu^4 g_2 \ , \quad H = \mu^6 g_3 \ , \quad G^3 - 27 H^2 = \mu^{12} (g_2^3 - 27 g_3^2) \ ,$$

während die Wurzeln der cubischen Resolvente

$$4\lambda^3 = G\lambda + H$$

ihrer Grösse nach durch

$$\lambda_1 = \mu^2 e_1 \ , \quad \lambda_2 = \mu^2 e_2 \ , \quad \lambda_3 = \mu^2 e_3$$

ausgedrückt werden. Die Gleichungen

$$\mu^2 \left(\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} \right) = \mu^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) = \mu^2 (e_1 - e_2) = \lambda_1 - \lambda_2 = \mu^2 \vartheta^4 \ ,$$

$$\mu^2 \left(\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} \right) = \mu^2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \mu^2 (e_2 - e_3) = \lambda_2 - \lambda_3 = \mu^2 \vartheta_2^4 \ ,$$

$$\mu^2 \left(\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} \right) = \mu^2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) = \mu^2 (e_1 - e_3) = \lambda_1 - \lambda_3 = \mu^2 \vartheta_3^4$$

liefern sogleich die Werthe von μ und q. Denn μ bestimmt sich als das arithmetisch-geometrische Mittel aus

$$m = \sqrt{\lambda_1 - \lambda_3} \quad \text{und} \quad n = \sqrt{\lambda_1 - \lambda_2} \ ,$$

während $\mu' = \dfrac{\mu \pi}{h}$ das entsprechende Mittel aus

$$m = \sqrt{\lambda_1 - \lambda_3} \quad \text{und} \quad n' = \sqrt{\lambda_2 - \lambda_3}$$

darstellt. Damit wird $q = e^{-\frac{\mu \pi}{\mu'}}$.

Digitized by Google

20.

Analoge Resultate erhält man für negative Discriminanten aus den Formeln des Art. 15. Es wird

$$u = \mu \int_{-\infty}^{\eta_4} \frac{d\eta}{H} = \mu \int_{\eta_3}^{\mu^2\varepsilon'} \frac{d\eta}{H} = \mu \int_{\bar{\eta}_4}^{\infty} \frac{d\eta}{\bar{H}} = \mu \int_{\mu^2\varepsilon'}^{\bar{\eta}_3} \frac{d\eta}{\bar{H}} .$$

Hier ist

$$H^2 = (\mu^2\varepsilon' - \eta)\left[\left(\mu^2 \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - 2\eta\right)^2 + \mu^4 \vartheta^4 \vartheta_2^4\right] ,$$

$$\bar{H}^2 = (\bar{\eta} - \mu^2\varepsilon')\left[\left(2\bar{\eta} - \mu^2 \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right)^2 + \mu^4 \vartheta^4 \vartheta_2^4\right] ,$$

$$\sqrt{\mu^2\varepsilon' - \eta_4} = \tfrac{1}{2}\mu\vartheta_3^2 \frac{\vartheta_2(\frac{1}{2}u, iq^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_4(\frac{1}{2}u, iq^{\frac{1}{2}})} , \quad \text{etc.}$$

$$\sqrt{\bar{\eta}_4 - \mu^2\varepsilon'} = \tfrac{1}{2}\mu\vartheta_3^2 \frac{i\vartheta_2(\frac{1}{2}ui, iq^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_4(\frac{1}{2}ui, iq^{\frac{1}{2}})} , \quad \text{etc.}$$

Da jetzt

$$G = \tfrac{1}{12}\mu^4(\vartheta_3^8 - 16\vartheta^4\vartheta_2^4) , \quad G^3 - 27H^2 = -\tfrac{1}{16}\mu^{12}\vartheta^4\vartheta_2^4\vartheta_3^{16} < 0 ,$$

und die Resolvente eine einzige reelle Wurzel

$$\lambda' = \mu^2 e' = \tfrac{1}{6}\mu^2(\vartheta^4 - \vartheta_2^4)$$

besitzt, so setzen wir, um die zugehörigen Werthe von μ und q zu finden,

$$\varrho'\varrho' = 12\lambda'\lambda' - G = 4(\lambda' - \lambda'')(\lambda' - \lambda''') .$$

Dann wird

$$\mu^2\vartheta^4 = \varrho' + 3\lambda' , \quad \mu^2\vartheta_2^4 = \varrho' - 3\lambda' , \quad \mu^2\vartheta_3^4 = 2\varrho' ,$$

mithin ist μ das arithmetisch-geometrische Mittel aus

$$m = \sqrt{2\varrho'} \quad \text{und} \quad n = \sqrt{\varrho' + 3\lambda'} .$$

Dagegen wird μ' das entsprechende Mittel aus

$$m = \sqrt{2\varrho'} \quad \text{und} \quad n' = \sqrt{\varrho' - 3\lambda'} ,$$

Digitized by Google

womit unsere Aufgabe auch für den Fall einer negativen Discriminante gelöst ist.

Die beiden Fälle des Art. 16 lassen sich ganz ähnlich behandeln. Setzt man

$$u = \mu\int_{\eta_1}^{\mu^2\varepsilon_1}\frac{d\eta}{H} = \mu\int_{-\infty}^{\eta_1}\frac{d\eta}{H} = \mu\int_{\eta_2}^{\mu^2\varepsilon_3}\frac{d\eta}{H} = \mu\int_{\mu^2\varepsilon_2}^{\eta_3}\frac{d\eta}{H},$$

so ergibt sich im *ersten* Falle

$$H^2 = (\mu^2\varepsilon_1 - \eta)\left[\left(\mu^2\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - 2\eta\right)^2 - \mu^4\vartheta^4\vartheta_3^4\right],$$

$$G = \tfrac{1}{12}\mu^4(\vartheta_2^8 + 16\vartheta^4\vartheta_3^4), \quad \varrho_3^2 = 12\lambda_3\lambda_3 - G,$$

$$\lambda_3 = \mu^2 e_3 = \mu^2(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) = -\tfrac{1}{6}\mu^2(\vartheta^4 + \vartheta_3^4),$$

$$\mu^2\vartheta^4 = -3\lambda_3 - \varrho_3, \quad \mu^2\vartheta_2^4 = 2\varrho_3, \quad \mu^2\vartheta_3^4 = -3\lambda_3 + \varrho_3$$

also μ das Gauss'sche Mittel aus

$$m = \sqrt{-3\lambda_3 + \varrho_3} \quad \text{und} \quad n = \sqrt{-3\lambda_3 - \varrho_3},$$

und μ' dasselbe aus

$$m = \sqrt{-3\lambda_3 + \varrho_3} \quad \text{und} \quad n' = \sqrt{2\varrho_3}.$$

Im *zweiten* Falle hat man

$$H^2 = (\mu^2\varepsilon_3 - \eta)\left[\left(\mu^2\frac{\vartheta''}{\vartheta} - 2\eta\right)^2 - \mu^4\vartheta_2^4\vartheta_3^4\right],$$

$$G = \tfrac{1}{12}\mu^4(\vartheta^8 + 16\vartheta_2^4\vartheta_3^4), \quad \varrho_1^2 = 12\lambda_1\lambda_1 - G,$$

$$\lambda_1 = \mu^2 e_1 = \mu^2(\varepsilon_0 - \varepsilon_3) = \tfrac{1}{6}\mu^2(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4),$$

$$\mu^2\vartheta^4 = 2\varrho_1, \quad \mu^2\vartheta_2^4 = 3\lambda_1 - \varrho_1, \quad \mu^2\vartheta_3^4 = 3\lambda_1 + \varrho_1,$$

$$m = \sqrt{3\lambda_1 + \varrho_1}, \quad n = \sqrt{2\varrho_1}, \quad n' = \sqrt{3\lambda_1 - \varrho_1}.$$ [1]

1) Bei einer Vergleichung mit der in meiner früheren Abhandlung Seite 83/144 enthaltenen Resultaten ist zu beachten, dass dort unter λ die reelle Wurzel der Resolvente verstanden wird, welche mit der Invariante H von gleichem Vorzeichen ist; die beiden anderen Wurzeln sind durch $\frac{1}{2}(\nu - \lambda)$ und $-\frac{1}{2}(\nu + \lambda)$ gegeben, wenn $\nu^2 = \lambda^2 - \frac{H}{\lambda} = G - 3\lambda^2$ geschrieben wird. Während jetzt $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ sein soll, ist dort $\lambda^2 > \lambda_1^2 > \lambda_2^2$ vorausgesetzt.

Digitized by Google

21.

Die im Vorhergehenden entwickelten Formeln reichen aus, um elliptische Integrale von der Form

$$\Omega = \int \frac{\varphi \eta^m}{f \eta^n} \frac{d\eta}{H},$$

wo f und φ ganze Functionen bedeuten, durch Thetafunctionen auszudrücken. Man hat hierzu (siehe S. 33 dieses Bandes) einen irrationalen Theil $\frac{\chi \eta^k}{g \eta^l} H$ abzutrennen, dessen Nenner $g\eta$ den grössten gemeinschaftlichen Theiler l^{ten} Grades von $f\eta$ und $f'\eta$ bezeichnet, während der Grad des Zählers $\chi\eta$ entweder durch

$k = n - m + l - 2$, oder wenn $n < m + 1$, durch $k = l - 1$

zu bestimmen ist. Schreibt man

$$\Omega = \frac{\chi}{g} H + \int \frac{X}{F} \frac{d\eta}{H},$$

wo $F = \frac{f}{g}$ eine ganze Function vom Grade $m - l$ wird, deren sämmtliche Wurzeln ungleich sind, so ergibt sich der Grad des Zählers X gleich $m - l + 1$, so dass bei der Zerlegung in Partialbrüche

$$\frac{X}{F} = a + b\eta + \sum' \frac{c}{\eta - p}$$

gesetzt werden darf. Damit ist

$$\Omega = \int \frac{\varphi}{f} du = \frac{\chi}{g} H + au + bv + \sum c_p w_p$$

auf die früher betrachteten Normalintegrale der drei Gattungen u, v, w zurückgeführt.

Die Werthe der Parameter p ergeben sich als Wurzeln der Gleichung $F = 0$, während die Ermittelung der Functionen g, χ und X nur auf linearen Gleichungen beruht.

In der That erhält man durch Differentiation nach u:

$$\frac{\varphi}{f} = \frac{\chi}{g} H H' + \left(\frac{\chi'}{g} - \frac{\chi g'}{g g}\right) H^2 + \frac{X}{F},$$

Digitized by Google

und für

$$f' = gF_1 \ , \quad g'F = (F_1 - F')g \ :$$

$$\varphi = FHH'\chi + (F' - F_1)H^2\chi + FH^2\chi' + gX \ .$$

Diese identisch zu erfüllende Gleichung liefert die zur Bestimmung der Coefficienten in χ und X erforderlichen linearen Relationen.

22.

Es handelt sich jetzt noch darum, ein elliptisches Integral von der allgemeinen Form

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\varphi x}{fx} \frac{dx}{X} \ ,$$

wo

$$X^2 = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4Dx + E$$

ein beliebiges Polynom vierten Grades bezeichnet, auf die Normalform des Integrals Ω zu reduciren.

Hierzu bedienen wir uns des folgenden Satzes[1]): »Wenn das Polynom

$$\mathfrak{A}y^4 + 4\mathfrak{B}y^3 + 6\mathfrak{C}y^2 + 4\mathfrak{D}y + \mathfrak{E} = Y^2$$

dieselben Invarianten G und H wie X^2 besitzt, so äquivalirt die Integralgleichung

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{X} = \pm \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{Y}$$

der algebraischen Gleichung

$$\frac{X_1 X_2^0 + X_2 X_1^0}{x - x_0} = \pm \frac{Y_1 Y_2^0 + Y_2 Y_1^0}{y - y_0} \ .«$$

Hier ist $X = X_1 X_2$, $Y = Y_1 Y_2$ geschrieben, wo

$$X_1^2 = l_1 x^2 + 2m_1 x + n_1 \ , \qquad X_2^2 = l_2 x^2 + 2m_2 x + n_2 \ ,$$

$$m_1 m_2 = C + \lambda \ ,$$

und analog

---

1) *Zur Reduction elliptischer Integrale*, 1879, Seite 6/62.

Digitized by Google

$$Y_1^2 = l_1 y^2 + 2m_1 y + n_1 , \qquad Y_2^2 = l_2 y^2 + 2m_2 y + n_2 ,$$
$$m_1 m_2 = \mathfrak{C} + \lambda ,$$

während λ eine Wurzel der cubischen Resolvente

$$4\lambda^3 = G\lambda + H \quad \text{oder} \quad 0 = \begin{vmatrix} A & B & C - 2\lambda \\ B & C + \lambda & D \\ C - 2\lambda & D & E \end{vmatrix}$$

darstellt. Für positive Werthe der vorkommenden Radicale correspondiren einander die doppelten Vorzeichen der obigen Gleichungen. Die drei Wurzeln λ entsprechen den drei möglichen Zerlegungen von X und Y, von denen entweder nur eine oder alle drei reell sind.

Wir setzen

$$\frac{X_1 X_2^0 + X_2 X_1^0}{2(x - x_0)} = \varpi(x, \lambda) , \quad \frac{Y_1 Y_2^0 + Y_2 Y_1^0}{2(y - y_0)} = \chi(y, \lambda)$$

und bezeichnen die den drei Wurzeln oder Zerlegungen entsprechenden Werthe durch $\varpi\,\varpi'\,\varpi''$ resp. $\chi\,\chi'\,\chi''$.

23.

Die hier eingeführte Function $\varpi(x, \lambda)$ besitzt, wie a. a. O. gezeigt, bemerkenswerthe Eigenschaften. Setzt man

$$\varpi\varpi = p(x) - \lambda , \quad XX = f(x) ,$$

so wird

$$p = \tfrac{1}{2}\frac{X_0 X + f_0}{(x - x_0)^2} + \tfrac{1}{4}\frac{f_0'}{x - x_0} + \tfrac{1}{24} f_0''\ ^1)$$
$$= \left(\tfrac{1}{2}\frac{X + X_0}{x - x_0}\right)^2 - \tfrac{1}{4} A(x + x_0)^2 - B(x + x_0) - C$$

1) Nach der Terminologie der neueren Algebra würde das Aggregat $F(xx_0) = f_0 + \frac{1}{2} f_0'(x - x_0) + \frac{1}{12} f_0''(x - x_0)^2 = f - \frac{1}{2} f'(x - x_0) + \frac{1}{12} f''(x - x_0)^2$ als zweite Polare von fx zu bezeichnen sein. Diese von Herrn F. Klein (Math. Annalen Bd. 27, S. 454) gemachte Bemerkung glaube ich hier hervorheben zu sollen, da Herr Pick (Annalen Bd. 28, Seite 309) darüber sagt: *Formeln, welche dieses wenigstens zum Theil (?) leisten* (sc. *die ele-*

Digitized by Google

von der Wurzel λ unabhängig. Folglich wird

$$2\varpi\varpi'\varpi'' = P = \sqrt{4p^3 - Gp - H}\,.$$

Durch Elimination des Radicals $X_0 X$ geht eine in Bezug auf p und auf $x - x_0$ quadratische Gleichung hervor, welche in der Form

$$(12p^2 - f_0''p + g_0'' - G)(x-x_0)^2 - 6(f_0'p - g_0')(x-x_0) - 12(f_0p - g_0) = 0$$

geschrieben werden kann, wenn

$$g = \tfrac{1}{16}f'f' - \tfrac{1}{12}ff'' = \tfrac{1}{12}X^2(X'X' - 2XX'')$$

die biquadratische Covariante von f bezeichnet.

Jede derartige Gleichung führt nach einem bekannten EULER-schen Satze zu einer Gleichung zwischen elliptischen Differentialen, und zwar ergibt die directe Rechnung

$$\left(\frac{dx}{X}\right)^2 = \left(\frac{dp}{P}\right)^2 .$$

Die Auflösung der quadratischen Gleichung aber liefert *identisch*

---

mentaren elliptischen Functionen als explicite Ausdrücke in den Grenzen und Constanten des Integrals darzustellen), sind seit längerer Zeit bekannt für die Form des elliptischen Differentials $\frac{dx}{\sqrt{fx}}$, *und zwar aus den Untersuchungen von Herrn* WEIERSTRASS *(in dessen zu Berlin gehaltenen Vorlesungen) und von Herrn* SCHEIBNER *(Abhandlungen der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften 1879). Allein erst von Herrn* KLEIN *(Annalen 27, § 12) ist dieses Formelsystem vervollständigt und was wichtiger ist, den Ausdrücken eine Schreibweise ertheilt worden, welche ihr wahres Bildungsgesetz aufdeckt* u. s. w.

Herr HALPHÉN sagt im 2. Bande seines *Traité des fonctions elliptiques*, Seite 359: *D'après M.* FÉLIX KLEIN (a. a. O. S. 457) *il paraît y avoir incertitude sur le premier inventeur de cette belle formule* $\left(\text{sc. } \frac{XX_0 + F(xx_0)}{2(x-x_0)^2}\right)$, *qu'il faut, sans doute, attribuer à M.* WEIERSTRASS. In meiner Abhandlung Seite 12/68 habe ich BIERMANN's *Dissert. inaugur. Berlin* 1865 citirt, der sich ausdrücklich auf die Methoden seines Lehrers WEIERSTRASS beruft. Im Übrigen ist mir der Inhalt der WEIERSTRASS'schen Vorlesungen, wie ich in der Vorrede vom Mai 1879 bemerkte, bis zur Veröffentlichung durch Herrn H. A. SCHWARZ (Göttingen 1885) unzugänglich geblieben. Zur Vergleichung füge ich noch hinzu, dass in der früheren Abhandlung $\xi\eta XY X_1 Y_1$ an Stelle von $\pm X \pm Y\, pq \equiv 1'$ geschrieben, und die Vorzeichen der Radicale $\xi = py + p_1$, $\eta = qy + q_1$ so beschaffen sind, dass stets $\frac{dx}{\xi} + \frac{dy}{\eta} = 0$ wird.

Digitized by Google

$$x - x_0 = 4 \frac{f_0 p - g_0}{\pm 2 X_0 P - f_0' p + g_0'},$$

mithin

$$\pm P = \frac{2}{X_0} \frac{f_0 p - g_0}{x - x_0} + \frac{f_0' p - g_0'}{2 X_0}.$$

Durch Substitution der Werthe von p und g kann man diesem Ausdruck die Form geben

$$\pm P = \frac{f_0 X + f X_0}{(x - x_0)^3} + \frac{f_0' X - f' X_0}{4 (x - x_0)^2} = - X \frac{dp}{dx}$$

oder

$$\frac{dx}{X} = \mp \frac{dp}{P} = \mp \frac{d\varpi}{\varpi' \varpi''},$$

im Einklange mit der obigen Differentialrelation. Durch Integration folgt

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{X} = \pm \int_{p}^{\infty} \frac{dp}{P},$$

wo für positive Werthe der Radicale X und P, welche wir stets voraussetzen wollen, das doppelte Vorzeichen gilt, je nachdem $x > x_0$ oder $x < x_0$.[1])

Auf demselben Wege erhält man

$$\frac{dy}{Y} = \mp \frac{d\chi}{\chi' \chi''}, \qquad \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{Y} = \pm \int_{q}^{\infty} \frac{dq}{Q},$$

---

1) Die quadratische Gleichung ändert sich nicht, wenn man das Vorzeichen des Radicals X umkehrt. In der That kann man

$$\varpi = \frac{X_1 X_2^0 - X_2 X_1^0}{2 (x - x_0)}, \qquad p = \tfrac{1}{2} \frac{f_0 - X X_0}{(x - x_0)^2} + \tfrac{1}{4} \frac{f_0'}{x - x_0} + \tfrac{1}{24} f_0''$$

setzen und die analogen Resultate wie oben ableiten, nur ergibt jetzt die Integration der Gleichung

$$\frac{dx}{X} = \pm \frac{dp}{P}$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{X} = \pm \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{P}, \qquad \text{wo } p_0 = \frac{g_0}{f_0}$$

geschrieben und das Vorzeichen von $(x - x_0) \cdot (p - p_0)$ zu wählen ist.

Digitized by Google

wenn

$$q = \tfrac{1}{2}\frac{Y_0 Y + \mathfrak{f}_0}{(y-y_0)^2} + \tfrac{1}{4}\frac{\mathfrak{f}_0'}{y-y_0} + \tfrac{1}{24}\mathfrak{f}_0'' ,$$

$$\mathfrak{f} = YY , \quad \pm Q = \frac{\mathfrak{f}_0 Y + \mathfrak{f} Y_0}{(y-y_0)^3} + \frac{\mathfrak{f}_0' Y - \mathfrak{f}' Y_0}{4(y-y_0)^2} ,$$

$$QQ = 4q^3 - Gq - H , \quad \chi\chi = q(y) - \lambda$$

geschrieben werden.

24.

Die Gleichung

$$\varpi(x) = \pm\chi(y) ,$$

welche der elliptischen Transformationsformel

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{X} = \pm\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{Y}$$

entspricht, kann folglich ersetzt werden sowohl durch

$$p(x) = q(y) ,$$

als auch durch $P = Q$, wofür man auch schreiben kann

$$\Xi(x) = \pm\Upsilon(y) ,$$

wenn zur Abkürzung eingeführt wird:

$$\Xi(x) = \frac{f_0 X + f X_0}{(x-x_0)^3} + \tfrac{1}{4}\frac{f_0' X - f' X_0}{(x-x_0)^2} = -X p'(x) ,$$

$$\Upsilon(y) = \frac{\mathfrak{f}_0 Y + \mathfrak{f} Y_0}{(y-y_0)^3} + \tfrac{1}{4}\frac{\mathfrak{f}_0' Y - \mathfrak{f}' Y_0}{(y-y_0)^2} = -Y q'(y) .$$

Hierbei ist überall das Vorzeichen des Productes $(x-x_0)(y-y_0)$ zu wählen.

Substituirt man diese Werthe in den identischen Ausdruck des vorigen Art. für $x - x_0$, so erhält man

$$x - x_0 = 4\frac{f_0 q - g_0}{\pm 2 X_0 \Upsilon - f_0' q + g_0'} ,$$

nebst

$$y - y_0 = 4\frac{\mathfrak{f}_0 p - \mathfrak{g}_0}{\pm 2 Y_0 \Xi - \mathfrak{f}_0' p + \mathfrak{g}_0'} .$$

Digitized by Google

Die vorstehende Gleichung findet sich S. 18/74 meiner Abhandlung auf die Gestalt gebracht

$$x - x_0 = \frac{2k_0 X_0 (y - y_0) + \alpha (y - y_0)^2}{\pm k_0 (Y + Y_0) + 2\beta (y - y_0) + \gamma (y - y_0)^2} ,$$

wo die Constanten $\alpha\,\beta\,\gamma$ die Form

$$\alpha = \alpha_1 X_0 \pm \alpha_2 Y_0 , \quad \beta = \beta_1 X_0 \pm \beta_2 Y_0 , \quad \gamma = \gamma_1 X_0 \pm \gamma_2 Y_0$$

haben, während

$$k = fg - fg$$

gesetzt ist. Man erhält

$$\alpha_1 = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial k_0}{\partial y_0} , \qquad \alpha_2 = h_0 ,$$

$$\beta_1 = -\tfrac{1}{4}\frac{\partial k_0}{\partial x_0} , \qquad \beta_2 = \tfrac{1}{4}\frac{\partial k_0}{\partial y_0} ,$$

$$\gamma_1 = -\tfrac{1}{8}\frac{\partial^2 k_0}{\partial x_0\,\partial y_0} , \qquad \gamma_2 = \tfrac{1}{12}\frac{\partial^2 k_0}{\partial y_0^2} - \tfrac{1}{6}\frac{\partial h_0}{\partial x_0} ,$$

wenn

$$h = \tfrac{1}{2}(f'g - fg') = \tfrac{1}{12} X^5 X'''$$

die Covariante sechsten Grades von f bezeichnet.

25.

Wenn für $\mathfrak{A} = 0$

$$Y^2 = 4\,\mathfrak{B}(y - \varepsilon_1)(y - \varepsilon_2)(y - \varepsilon_3)$$

nur vom dritten Grade ist, also

$$\mathfrak{C} = -\tfrac{2}{3}\mathfrak{B}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = -2\mathfrak{B}\varepsilon_0 ,$$

und man setzt

$$Y_1^2 = 2\mathfrak{m}_1 (y - \varepsilon_1) , \quad Y_2^2 = \mathfrak{l}_2 (y - \varepsilon_2)(y - \varepsilon_3) ,$$

$$\mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 = -\mathfrak{B}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) = \mathfrak{C} + \lambda ,$$

so ergibt sich der zugehörige Wurzelwerth der Resolvente

$$\lambda = \mathfrak{B}(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) .$$

Digitized by Google

Weiter hat man

$$(y-y_0)\chi = \sqrt{\mathfrak{B}(y-\varepsilon_1)(y_0-\varepsilon_2)(y_0-\varepsilon_3)} + \sqrt{\mathfrak{B}(y_0-\varepsilon_1)(y-\varepsilon_2)(y-\varepsilon_3)},$$

$$q = \chi^2 + \lambda = \tfrac{1}{2}\frac{Y_0 Y + \mathfrak{f}_0}{(y-y_0)^2} + \tfrac{1}{4}\frac{\mathfrak{f}'_0}{y-y_0} + \tfrac{1}{24}\mathfrak{f}''_0 ,$$

$$\pm Q = \frac{\mathfrak{f}_0 Y + \mathfrak{f} Y_0}{(y-y_0)^3} + \tfrac{1}{4}\frac{\mathfrak{f}'_0 Y - \mathfrak{f}' Y_0}{(y-y_0)^2} .$$

Diese Ausdrücke nehmen für $y_0 = \varepsilon_1$, wie für $y = \pm\infty$ eine besonders einfache Gestalt an. Man erhält im ersteren Falle

$$(y-\varepsilon_1)\chi = \sqrt{\mathfrak{B}(y-\varepsilon_1)(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(\varepsilon_1-\varepsilon_3)} ,$$

also für $\mathfrak{B} = -1$

$$\chi = -\sqrt{\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(\varepsilon_1-\varepsilon_3)}{\varepsilon_1-y}} ,$$

und für $\mathfrak{B} = 1$

$$\chi = \sqrt{\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(\varepsilon_1-\varepsilon_3)}{y-\varepsilon_1}} ;$$

ferner

$$q = \mathfrak{B}\left(\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(\varepsilon_1-\varepsilon_3)}{y-\varepsilon_1} + \varepsilon_1 - \varepsilon_0\right) ,$$

$$\pm Q = \mathfrak{B} Y \frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(\varepsilon_1-\varepsilon_3)}{(y-\varepsilon_1)^2} .$$

Für unendliche Werthe von y_0 dagegen wird, je nach dem Vorzeichen von $\mathfrak{B}$:

$$\chi = \mp\sqrt{\mathfrak{B}(y-\varepsilon_1)}$$

$$q = \mathfrak{B}(y-\varepsilon_0)$$

$$\pm Q = \mathfrak{B} Y ,$$

folglich

$$x - x_0 = 4\frac{\mathfrak{B} f_0 (y-\varepsilon_0) - g_0}{\pm 2\mathfrak{B} X_0 Y - \mathfrak{B} f'_0 (y-\varepsilon_0) + g'_0} ,$$

$$y = \varepsilon_0 + \frac{p}{\mathfrak{B}} .$$

Digitized by Google

Für $y_0 = \varepsilon_2$ endlich ergibt sich

$$(y - \varepsilon_2)\,\chi = \sqrt{\mathfrak{B}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(y - \varepsilon_2)\,(y - \varepsilon_3)}\,,$$

mithin für $\mathfrak{B} = 1$, $y < \varepsilon_2$:

$$\chi = -\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\,\frac{y - \varepsilon_3}{\varepsilon_2 - y}}\,,$$

und für $\mathfrak{B} = -1$, je nachdem $y > \varepsilon_2$ oder $y < \varepsilon_2$:

$$\chi = \pm\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\,\frac{y - \varepsilon_3}{y - \varepsilon_2}}\,;$$

ferner

$$q = \mathfrak{B}\left(\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)}{\varepsilon_2 - y} + \varepsilon_2 - \varepsilon_0\right)$$

$$\pm Q = \mathfrak{B}\,Y\,\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)}{(y - \varepsilon_2)^2}\,.$$

26.

Als Beispiel setzen wir

$$X^2 = 4(\varepsilon_1 - x)(\varepsilon_2 - x)(\varepsilon_3 - x)\,,\quad Y^2 = 4(\varepsilon_1 - y)(\varepsilon_2 - y)(\varepsilon_3 - y)$$

$$x_0 = \varepsilon_1\,,\quad y_0 = -\infty\,,\quad \mathfrak{B} = -1\,,$$

so wird

$$p = -\left(\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)}{x - \varepsilon_1} + \varepsilon_1 - \varepsilon_0\right),$$

$$y = \varepsilon_0 - p = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)}{x - \varepsilon_1} + \varepsilon_1\,,$$

oder

$$(\varepsilon_1 - x)(\varepsilon_1 - y) = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)\,.$$

Analog erhält man für $x_0 = \varepsilon_2$ resp. $x_0 = \varepsilon_3$

$$(x - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 - y) = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)\,,$$

$$(\varepsilon_3 - x)(\varepsilon_3 - y) = (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)\,.$$

Hieraus gehen für

$$\varepsilon_1 = \mu^2\frac{\vartheta''}{\vartheta}\,,\quad \varepsilon_2 = \mu^2\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\,,\quad \varepsilon_3 = \mu^2\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\,,\quad y = \eta_1\,,\quad Y = H_1$$

die Relationen hervor:

Digitized by Google

$$x = \eta \quad , \quad \left(\mu^2 \frac{\vartheta''}{\vartheta} - \eta\right)\left(\mu^2 \frac{\vartheta''}{\vartheta} - \eta_1\right) = \mu^4 \vartheta_2^4 \vartheta_3^4 = 3\lambda_3^2 - \tfrac{1}{4} G \ ,$$

$$x = \eta_3 \ , \quad \left(\eta_3 - \mu^2 \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right)\left(\mu^2 \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \eta_1\right) = \mu^4 \vartheta^4 \vartheta_2^4 = \tfrac{1}{4} G - 3\lambda_2^2 \ ,$$

$$x = \eta_2 \ , \quad \left(\mu^2 \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \eta_2\right)\left(\mu^2 \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \eta_1\right) = \mu^4 \vartheta^4 \vartheta_3^4 = 3\lambda_1^2 - \tfrac{1}{4} G \ .$$

Durch Elimination von η_1 ergeben sich ferner:

$$\left(\mu^2 \frac{\vartheta''}{\vartheta} - \eta_2\right)\left(\mu^2 \frac{\vartheta''}{\vartheta} - \eta_3\right) = \mu^4 \vartheta_2^4 \vartheta_3^4 = 3\lambda_3^2 - \tfrac{1}{4} G \ ,$$

$$\left(\eta - \mu^2 \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right)\left(\mu^2 \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \eta_2\right) = \mu^4 \vartheta^4 \vartheta_2^4 = \tfrac{1}{4} G - 3\lambda_2^2 \ ,$$

$$\left(\eta - \mu^2 \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)\left(\eta_3 - \mu^2 \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right) = \mu^4 \vartheta^4 \vartheta_3^4 = 3\lambda_1^2 - \tfrac{1}{4} G$$

27.

Vorstehende sechs Gleichungen, welche leicht direct verificirt werden können, enthalten die Transformationsformeln, durch welche die Integrale *erster* Gattung

$$u = \mu \int_{\eta}^{\mu^2 \frac{\vartheta''}{\vartheta}} \frac{d\eta}{H} = \mu \int_{-\infty}^{\eta_1} \frac{d\eta}{H} = \mu \int_{\eta_2}^{\mu^2 \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}} \frac{d\eta}{H} = \mu \int_{\mu^2 \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}}^{\eta_3} \frac{d\eta}{H}$$

in einander übergehen. Wir wollen diese Formeln noch anwenden, um die Art. 11 gefundenen Werthe der Integrale *zweiter* Gattung oder der logarithmischen Differentialquotienten der Thetafunctionen zu transformiren.

Man erhält dadurch die Ausdrücke [1]):

$$\frac{\vartheta' u}{\vartheta u} = u \frac{\vartheta''}{\vartheta} - \vartheta_2^4 \vartheta_3^4 \int_0^u \frac{du}{\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \eta_1} = u \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} + \vartheta^4 \vartheta_3^4 \int_0^u \frac{du}{\eta_3 - \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}}$$

$$= u \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} + \vartheta^4 \vartheta_2^4 \int_0^u \frac{du}{\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \eta_2} \ ,$$

1) Vergl. S. 92/148 der Abhandlung *Zur Reduction elliptischer Integrale.*

Digitized by Google

$$\frac{\vartheta_2' u}{\vartheta_2 u} = u\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \vartheta_2^4\vartheta_3^4\int_0^u \frac{du}{\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \eta_3} = u\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \vartheta^4\vartheta_3^4\int_0^u \frac{du}{\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \eta_4}$$

$$= u\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \vartheta^4\vartheta_2^4\int_0^u \frac{du}{\eta - \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}},$$

$$\frac{\vartheta_3' u}{\vartheta_3 u} = u\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \vartheta_2^4\vartheta_3^4\int_0^u \frac{du}{\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \eta_2} = u\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} + \vartheta^4\vartheta_3^4\int_0^u \frac{du}{\eta - \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}}$$

$$= u\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} + \vartheta^4\vartheta_2^4\int_0^u \frac{du}{\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \eta_1},$$

denen wegen

$$0 = \vartheta'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \vartheta_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \vartheta_3'\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\vartheta_1' = -\vartheta_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{i}q^{\frac{1}{4}}\vartheta'\left(\frac{hi}{2}\right)$$

die folgenden zur Seite stehen:

$$\frac{\vartheta' u}{\vartheta u} = -\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\frac{\vartheta''}{\vartheta} + \vartheta_2^4\vartheta_3^4\int_u^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du}{\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \eta_1}$$

$$= -\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \vartheta^4\vartheta_3^4\int_u^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du}{\eta_3 - \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}}$$

$$= -\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \vartheta^4\vartheta_2^4\int_u^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du}{\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \eta_2},$$

$$\frac{\vartheta_1' u}{\vartheta_1 u} = -\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\frac{\vartheta''}{\vartheta} + \vartheta_2^4\vartheta_3^4\int_u^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du}{\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \eta_1}$$

$$= -\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} + \vartheta^4\vartheta_3^2\int_u^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du}{\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \eta_2}$$

$$= -\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} + \vartheta^4\vartheta_2^4\int_u^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du}{\eta_3 - \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}},$$

Digitized by Google

$$\frac{\vartheta_3' u}{\vartheta_3 u} = -\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\frac{\vartheta''}{\vartheta} + \vartheta_2^4\vartheta_3^4\int_u^{\frac{1}{2}\pi}\frac{du}{\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \eta_2}$$

$$= -\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \vartheta^4\vartheta_3^4\int_u^{\frac{1}{2}\pi}\frac{du}{\eta - \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}}$$

$$= -\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \vartheta^4\vartheta_2^4\int_u^{\frac{1}{2}\pi}\frac{du}{\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \eta_1} .$$

Diese Formeln lehren, dass die Integrale *zweiter* Gattung als *Grenzfälle* auf solche der *ersten* und *dritten* Gattung zurückgeführt werden können, deren Parameter $p = \eta v$ die drei Werthe $\frac{\vartheta''}{\vartheta}$, $\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}$ und $\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}$ annehmen. Da

$$\eta 0 = \frac{\vartheta''}{\vartheta}\ ,\quad \eta\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\ ,\quad \eta_1 0 = -\infty\ ,\quad \eta_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\ ,$$

$$\eta_2 0 = \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\ ,\quad \eta_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\infty\ ,\quad \eta_3 0 = \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\ ,\quad \eta_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\vartheta''}{\vartheta}\ ,$$

so hat man in den Integralen dritter Gattung $v = 0$ oder $v = \frac{\pi}{2}$ zu setzen. Will man z. B. die Gleichung

$$\frac{\vartheta' u}{\vartheta u} = u\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \vartheta_2^4\vartheta_3^4\int_0^u\frac{du}{\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \eta_1}$$

verificiren, so setze man in der Gleichung

$$\lg\frac{\vartheta_3(v+u)}{\vartheta_3(v-u)} = 2u\frac{\vartheta_3' v}{\vartheta_3 v} - \vartheta_1'^3\frac{\vartheta_1(2v)}{\vartheta_3^4 v}\int_0^u\frac{du}{\eta_1 u - \eta_3 v}$$

des Art. 12 $v = \frac{\pi}{2} + w$ und entwickle auf beiden Seiten die in w multiplicirten Glieder, wodurch der obige Werth von $\frac{\vartheta' u}{\vartheta u}$ hervorgeht.

28.

In gleicher Weise erhält man:

Digitized by Google

$$\frac{1}{i}\frac{\vartheta'(ui)}{\vartheta(ui)} = \frac{\vartheta''}{\vartheta}u + \vartheta_2^4\vartheta_3^4\int_0^u \frac{du}{\eta_1 - \frac{\vartheta''}{\vartheta}} = \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}u + \vartheta^4\vartheta_3^4\int_0^u \frac{du}{\eta_3 - \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}}$$

$$= \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}u + \vartheta^4\vartheta_2^4\int_0^u \frac{du}{\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \eta_2} ,$$

$$\frac{1}{i}\frac{\vartheta_2'(ui)}{\vartheta_2(ui)} = \frac{\vartheta''}{\vartheta}u - \vartheta_2^4\vartheta_3^4\int_0^u \frac{du}{\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \eta_3} = \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}u + \vartheta^4\vartheta_3^4\int_0^u \frac{du}{\eta_1 - \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}}$$

$$= \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}u - \vartheta^4\vartheta_2^4\int_0^u \frac{du}{\eta - \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}} ,$$

$$\frac{1}{i}\frac{\vartheta_3'(ui)}{\vartheta_3(ui)} = \frac{\vartheta''}{\vartheta}u - \vartheta_2^4\vartheta_3^4\int_0^u \frac{du}{\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \eta_2} = \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}u + \vartheta^4\vartheta_3^4\int_0^u \frac{du}{\eta - \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}}$$

$$= \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}u - \vartheta^4\vartheta_2^4\int_0^u \frac{du}{\eta_1 - \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}} ,$$

und wegen

$$\eta\left(\frac{h}{2}\right) = \infty , \quad \eta_1\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{\vartheta''}{\vartheta} , \quad \eta_2\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} , \quad \eta_3\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} ,$$

$$\frac{1}{i}\frac{\vartheta_1'(\frac{1}{2}hi)}{\vartheta_1(\frac{1}{2}hi)} = \frac{1}{i}\frac{\vartheta_2'(\frac{1}{2}hi)}{\vartheta_2(\frac{1}{2}hi)} = \frac{1}{i}\frac{\vartheta_3'(\frac{1}{2}hi)}{\vartheta_3(\frac{1}{2}hi)} = -1 :$$

$$1 + \frac{1}{i}\frac{\vartheta_1'(ui)}{\vartheta_1(ui)} = -\left(\frac{h}{2} - u\right)\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \vartheta_2^4\vartheta_3^4\int_u^{\frac{1}{2}h} \frac{du}{\eta - \frac{\vartheta''}{\vartheta}}$$

$$= -\left(\frac{h}{2} - u\right)\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \vartheta^4\vartheta_3^4\int_u^{\frac{1}{2}h} \frac{du}{\eta_2 - \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}}$$

$$= -\left(\frac{h}{2} - u\right)\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \vartheta^4\vartheta_2^4\int_u^{\frac{1}{2}h} \frac{du}{\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \eta_3} ,$$

$$1 + \frac{1}{i}\frac{\vartheta_2'(ui)}{\vartheta_2(ui)} = -\left(\frac{h}{2} - u\right)\frac{\vartheta''}{\vartheta} + \vartheta_2^4\vartheta_3^4\int_u^{\frac{1}{2}h} \frac{du}{\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \eta_3}$$

$$= -\left(\frac{h}{2} - u\right)\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \vartheta^4\vartheta_3^4\int_u^{\frac{1}{2}h} \frac{du}{\eta_1 - \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}}$$

$$= -\left(\frac{h}{2} - u\right)\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} + \vartheta^4\vartheta_2^4\int_u^{\frac{1}{2}h} \frac{du}{\eta - \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}}$$

Digitized by Google

$$1 + \frac{1}{i}\frac{\vartheta_3'(ui)}{\vartheta_3(ui)} = -\left(\frac{h}{2} - u\right)\frac{\vartheta''}{\vartheta} + \vartheta_2^4\vartheta_3^4\int_u^{\frac{1}{2}h}\frac{du}{\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \overline{\eta}_2}$$

$$= -\left(\frac{h}{2} - u\right)\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \vartheta^4\vartheta_3^4\int_u^{\frac{1}{2}h}\frac{du}{\overline{\eta} - \frac{\vartheta_2''}{\vartheta''}}$$

$$= -\left(\frac{h}{2} - u\right)\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} + \vartheta^4\vartheta_2^4\int_u^{\frac{1}{2}h}\frac{du}{\overline{\eta}_4 - \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}}.$$

Ferner ergeben sich die Formeln

$$\eta_4 0 = -\infty\ ,\quad \eta_4\pi = \varepsilon'\ ,\quad \eta_5 0 = \varepsilon'\ ,\quad \eta_5\pi = -\infty\ ;$$

$$\overline{\eta}_4 h = \varepsilon'\ ,\quad \overline{\eta}_5 h = \infty\ ,\quad \frac{1}{2i}\frac{\vartheta_1'(\frac{1}{2}hi,\ i\sqrt{q})}{\vartheta_1(\frac{1}{2}hi,\ i\sqrt{q})} = -1\ ,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\vartheta_1'(\frac{1}{2}u,\ i\sqrt{q})}{\vartheta_1(\frac{1}{2}u,\ i\sqrt{q})} = -(\pi - u)\varepsilon' + \tfrac{1}{16}\vartheta_3^8\int_u^{\pi}\frac{du}{\varepsilon' - \eta_5}\ ,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\vartheta_2'(\frac{1}{2}u,\ i\sqrt{q})}{\vartheta_2(\frac{1}{2}u,\ i\sqrt{q})} = \varepsilon' u - \tfrac{1}{16}\vartheta_3^8\int_0^{u}\frac{du}{\varepsilon' - \eta_4}\ ,$$

$$\frac{1}{2i}\frac{\vartheta_1'(\frac{1}{2}ui, i\sqrt{q})}{\vartheta_1(\frac{1}{2}ui, i\sqrt{q})} = -1 - (h - u)\varepsilon' - \tfrac{1}{16}\vartheta_3^8\int_u^{h}\frac{du}{\overline{\eta}_5 - \varepsilon'}\ ,$$

$$\frac{1}{2i}\frac{\vartheta_2'(\frac{1}{2}ui, i\sqrt{q})}{\vartheta_2(\frac{1}{2}ui, i\sqrt{q})} = \varepsilon' u + \tfrac{1}{16}\vartheta_3^8\int_0^{u}\frac{du}{\overline{\eta}_4 - \varepsilon'}\ ,$$

denen man ähnliche Ausdrücke für die Fälle des Art. 17 zur Seite stellen kann.

29.

Substituirt man nunmehr in die Formeln des Art. 25 $y = \eta$ und $Y = H$, so ergibt eine leichte Rechnung die Ausdrücke:

$$\mu\vartheta_2\vartheta_3\frac{\vartheta_1 u}{\vartheta u} = \sqrt{\mu^2\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \eta} = \frac{\mu^2\vartheta_2^2\vartheta_3^2}{\varpi(x, \lambda_3)} = \frac{\sqrt{3\lambda_3^2 - \frac{1}{4}G}}{\varpi_3}\ ,$$

$$\mu\vartheta\vartheta_2\frac{\vartheta_2 u}{\vartheta u} = \sqrt{\eta - \mu^2\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}} = \mu\vartheta_2^2\frac{\varpi(x, \lambda_1)}{\varpi(x, \lambda_3)} = \sqrt{\lambda_2 - \lambda_3}\,\frac{\varpi_1}{\varpi_3}\ ,$$

$$\mu\vartheta\vartheta_3\frac{\vartheta_3 u}{\vartheta u} = \sqrt{\eta - \mu^2\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}} = \mu\vartheta_3^2\frac{\varpi(x, \lambda_2)}{\varpi(x, \lambda_3)} = \sqrt{\lambda_1 - \lambda_3}\,\frac{\varpi_2}{\varpi_3}\ ,$$

Digitized by Google

nebst

$$H = 2\,(3\,\lambda_3^2 - \tfrac{1}{4}\,G)\,\frac{\varpi_1\varpi_2}{\varpi_3^3} = \frac{3\,\lambda_3^2 - \frac{1}{4}\,G}{\varpi_3^4}\,P\ ,$$

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{\lambda_1 - \lambda_3}}{\varpi_3}\ ,\quad \cos\varphi = \frac{\varpi_1}{\varpi_3}\ ,\quad \Delta\varphi = \frac{\varpi_2}{\varpi_3}\ ;$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{\lambda_1 - \lambda_3}}{\varpi_1}\ ,\qquad \frac{\sin\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{\sqrt{\lambda_1 - \lambda_3}}{\varpi_2}\ .$$

Ferner erhält man

$$\mu\,\vartheta_2\vartheta_3\,\frac{\vartheta u}{\vartheta_1 u} = \sqrt{\mu^2\,\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \eta_1} = \varpi_3\ ,$$

$$\mu\,\vartheta_2\vartheta\,\frac{\vartheta_3 u}{\vartheta_1 u} = \sqrt{\mu^2\,\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \eta_1} = \varpi_2\ ,$$

$$\mu\,\vartheta\vartheta_3\,\frac{\vartheta_2 u}{\vartheta_1 u} = \sqrt{\mu^2\,\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \eta_1} = \varpi_1\ ,$$

$$H_1 = 2\,\varpi_1\varpi_2\varpi_3 = P\ ;$$

$$\mu\,\vartheta_2\vartheta_3\,\frac{\vartheta_3 u}{\vartheta_2 u} = \sqrt{\mu^2\,\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \eta_2} = \sqrt{\lambda_1 - \lambda_3}\,\frac{\varpi_2}{\varpi_1}\ ,$$

$$\mu\,\vartheta\vartheta_2\,\frac{\vartheta u}{\vartheta_2 u} = \sqrt{\mu^2\,\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \eta_2} = \sqrt{\lambda_1 - \lambda_2}\,\frac{\varpi_3}{\varpi_1}\ ,$$

$$\mu\,\vartheta\vartheta_3\,\frac{\vartheta_1 u}{\vartheta_2 u} = \sqrt{\mu^2\,\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \eta_2} = \frac{\sqrt{3\,\lambda_1^2 - \frac{1}{4}\,G}}{\varpi_1}\ ,$$

$$H_2 = \frac{3\,\lambda_1^2 - \frac{1}{4}\,G}{\varpi_1^4}\,P\ ;$$

$$\mu\,\vartheta_2\vartheta_3\,\frac{\vartheta_2 u}{\vartheta_3 u} = \sqrt{\mu^2\,\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \eta_3} = \sqrt{\lambda_2 - \lambda_3}\,\frac{\varpi_1}{\varpi_2}\ ,$$

$$\mu\,\vartheta\vartheta_2\,\frac{\vartheta_1 u}{\vartheta_3 u} = \sqrt{\eta_3 - \mu^2\,\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{4}\,G - 3\,\lambda_2^2}}{\varpi_2}\ ,$$

$$\mu\,\vartheta\vartheta_3\,\frac{\vartheta u}{\vartheta_3 u} = \sqrt{\eta_3 - \mu^2\,\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}} = \sqrt{\lambda_1 - \lambda_2}\,\frac{\varpi_3}{\varpi_2}\ ,$$

$$H_3 = \frac{\frac{1}{4}\,G - 3\,\lambda_2^2}{\varpi_2^4}\,P\ .$$

Die vorstehenden Gleichungen beziehen sich auf reelle Werthe der Wurzeln $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$, während für $G^3 < 27 H^2$ nur eine reelle Wurzel λ' der Gleichung $P = 0$ existirt. Alsdann hat man für $\varepsilon' = \frac{1}{4} \frac{\vartheta_2'(i\sqrt{q})}{\vartheta_2(i\sqrt{q})}$ zu setzen:

$$\tfrac{1}{2}\mu\,\vartheta_3^2 \frac{\vartheta_2(\frac{1}{2}u,\, iq^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_1(\frac{1}{2}u,\, iq^{\frac{1}{2}})} = \sqrt{\mu^2\varepsilon' - \eta_4} = \tfrac{1}{2}\mu\,\vartheta_3^2 \cot\tfrac{1}{2}\varphi = \varpi(x, \lambda') \;,$$

$$\tfrac{1}{2}\mu\,\vartheta_3^2 \frac{\vartheta_1(\frac{1}{2}u,\, iq^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_2(\frac{1}{2}u,\, iq^{\frac{1}{2}})} = \sqrt{\mu^2\varepsilon' - \eta_5} = \tfrac{1}{2}\mu\,\vartheta_3^2 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{\sqrt{3\lambda'^2 - \frac{1}{4}G}}{\varpi(x, \lambda')} \;,$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{\sqrt{3\lambda'^2 - \frac{1}{4}G}}{\varpi(x, \lambda')} \;, \qquad H_4 = P \;, \qquad H_5 = \frac{3\lambda'^2 - \frac{1}{4}G}{\varpi^4(x, \lambda')} P \;.$$

Diesen Formeln reihen sich nicht allein die entsprechenden für imaginäre Argumente ui an, wodurch η in $\overline{\eta}$ übergeht, sondern es können auch die Fälle des Art. 16 ganz analog behandelt werden. Indessen wollen wir der Kürze halber von dem Hinschreiben der betreffenden Formeln hier absehen.

30.

Zum Schluss sei mir die Bemerkung gestattet, dass wenn es sich um die Zurückführung eines elliptischen Integrals auf Thetafunctionen zum Behufe der praktischen Anwendung handelt, der Durchgang durch die Sigmafunctionen bei dem Reductionsgeschäfte meines Erachtens keine wesentliche Abkürzung gewährt. Es liegt auf der Hand, da beide Functionen sich nur um einfache Exponentialfactoren unterscheiden, dass die analytische Rechnung ebensowohl mit den einen, wie mit den anderen geführt werden kann: dennoch wird man als das directere Verfahren dasjenige zu bezeichnen haben, welches die Functionen, deren man sich für die numerische Auswerthung am Schlusse der Rechnung zu bedienen genöthigt ist, im ganzen Verlaufe derselben beibehält.

Ich kann desshalb nicht den gegentheiligen Behauptungen beipflichten, die sich z. B. in dem so reichhaltigen und schätzbaren Werke von Hrn. HALPHEN an verschiedenen Stellen finden.

Digitized by Google

So beginnt z. B. Capitel 8 des I. Bandes, S. 239 mit folgendem »*Avertissement. On trouvera, dans ce Chapitre, la représentation des fonctions elliptiques par les belles séries dont Jacobi doit être considéré comme l'inventeur, séries éminemment utiles pour les applications. Elles ne doivent être, en général, introduites qu'à la fin des calculs. Pour cette raison, les formules nombreuses et un peu compliquées qui vont être développées sont destinées à être consultées seulement. Il serait inutile de les retenir de mémoire; il suffit d'en bien connaître la nature.*« Oder Band I, Seite 208: »*Dans tous les anciens Traités, on procède à une réduction des intégrales elliptiques, pour les ramener à trois espèces caractéristiques. Ces considérations ont de l'intérêt pour l'histoire des fonctions elliptiques, mais dans notre mode d'exposition, elles sont dénuées d'utilité, tant pour la théorie que pour les applications et nous n'en parlerons pas.*« — während doch selbstverständlich auf Seite 207 die von den drei Functionen $\wp(u-v)$, $\zeta(u-v)$ und $\lg\sigma(u-v)$ abhängigen Glieder als Repräsentanten der drei *espèces caractéristiques* auftreten. Ganz abgesehen davon, dass bei der entwickelten Reductionsmethode des Art. 21 die l. c. von den Derivirten

$$m_s\wp^{(s-1)}(u-v)+m_{s-1}\wp^{(s-2)}(u-v)+\cdots$$

abhängigen Glieder überhaupt nicht erscheinen, weil die mehrfachen Wurzeln des Nenners auf algebraischem Wege entfernt worden sind.

Es ist ja an sich leicht erklärlich, dass das Studium der Sigmafunctionen, deren Einführung in die Analysis durch Herrn Weierstrass in so vielen Beziehungen sich als wichtig und fruchtbar erwiesen, seit dasselbe den Mathematikern in grösseren Kreisen zugänglich geworden und ihr Interesse in Anspruch genommen hat, eine Zeitlang auf Kosten der länger bekannten Jacobi-Abel'schen Thetafunctionen in den Vordergrund getreten ist. Im umgekehrten Falle würde es sich vermuthlich gerade umgekehrt verhalten haben, während wir doch froh sein dürfen, dass für die Erfordernisse der Theorie, wie der Praxis, dem Mathematiker nach doppelter Richtung so interessante Functionen zu Gebote stehen.

Digitized by Google

Sophus Lie, *Reduction einer Transformationsgruppe auf ihre canonische Form.*

Kennt man r unabhängige infinitesimale Transformationen

$$(1.) \quad X_\varkappa' f = \xi_{\varkappa 1}(x_1' \cdots x_n') \frac{\partial f}{\partial x_1'} + \cdots + \xi_{\varkappa n}(x') \frac{\partial f}{\partial x_n'} = \sum_i \xi_{\varkappa i}' \frac{\partial f}{\partial x_i'}$$

einer r-gliedrigen Gruppe:

$$(2.) \qquad x_\varkappa' = f_\varkappa(x_1 \cdots x_n\, a_1 \cdots a_r) \ ,$$

so findet man die *canonischen Gleichungen* dieser Gruppe, indem man die lineare partielle Differentialgleichung:

$$\lambda_1 X_1' f + \cdots + \lambda_r X_r' f + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

aufstellt und darnach das äquivalente simultane System:

$$(3.) \qquad \frac{dx_1'}{\sum_\varkappa \lambda_\varkappa \xi_{\varkappa 1}'} = \cdots = \frac{dx_n'}{\sum_\varkappa \lambda_\varkappa \xi_{\varkappa n}'} = dt$$

integrirt. Die zu den Anfangsbedingungen: $x_\varkappa' = x_\varkappa$ für $t = 0$ gehörigen Integralgleichungen:

$$x_\varkappa' = \mathfrak{f}_\varkappa(x_1 \cdots x_n\,,\ \lambda_1 t\,,\ \cdots \lambda_r t) \ ,$$

welche die Grössen $\lambda_1 \ldots \lambda_r, t$ nur in den Verbindungen:

$$\eta_1 = \lambda_1 t\,,\ \cdots\ \eta_r = \lambda_r t$$

enthalten und sich daher folgendermassen

$$(4.) \qquad x_\varkappa' = \mathfrak{f}_\varkappa(x_1 \cdots x_n\, \eta_1 \cdots \eta_r)$$

schreiben lassen, sind die gewünschten canonischen Gleichungen der Gruppe (2.).

Digitized by Google

Es ist nun von hohem Interesse, dass die Integration des simultanen Systems (3.), wie ich längst angekündigt habe, sich in vielen Fällen wirklich durchführen lässt.

I.

Zunächst werde ich nachweisen, dass die Integration des simultanen Systems (3.) sich durch *Quadraturen* leisten lässt, wenn die *endlichen* Gleichungen $x_\varkappa' = f(x,a)$ der Gruppe $X_1'f \dots X_r'f$ schon bekannt sind. Dies ergiebt sich ohne Schwierigkeit, indem man meine Theorie der *Parametergruppe* und der *adjungirten Gruppe* mit meinen alten Integrationstheorien verbindet. Bildet man meine bekannten Gleichungen:

$$\xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') = \sum_1^r{}_\varkappa \, \alpha_{j\varkappa}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial x_i'}{\partial a_\varkappa}$$

$$(j = 1 \cdots r, \quad i = 1 \cdots n)$$

und setzt

$$A_\varkappa f = \sum_1^r{}_\mu \, a_{\varkappa\mu}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_\mu}, \quad (k = 1 \cdots r),$$

so gestattet das Gleichungssystem:

$$x_\varkappa' = f_\varkappa(x_1 \cdots x_n \, a_1 \cdots a_r) \quad (\varkappa = 1 \cdots n)$$

die r infinitesimalen Transformationen:

$$X_1'f + A_1 f, \; \cdots \; X_r'f + A_r f;$$

geben nämlich die Gleichungen $x_\varkappa' = f_\varkappa(x, a)$ durch Auflösung

$$x_\varkappa = F_\varkappa(x_1' \cdots x_r' \, a_1 \cdots a_r) \quad (\varkappa = 1 \cdots n),$$

so sind ja die Grössen $F_1 \cdots F_n$ Lösungen des vollständigen Systems:

$$X_1'f + A_1 f = 0 \cdots X_r'f + A_r f = 0.$$

Bildet man andererseits die lineare partielle Differentialgleichung:

$$\lambda_1 A_1 f + \cdots + \lambda_r A_r f + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \tag{5.}$$

und integrirt das äquivalente simultane System:

$$\frac{da_1}{\sum_\varkappa \lambda_\varkappa a_{\varkappa 1}} = \cdots = \frac{da_r}{\sum_\varkappa \lambda_\varkappa a_{\varkappa r}} = dt \tag{6.}$$

Digitized by Google

mit den Anfangsbedingungen $a_\varkappa = a_\varkappa^0$ für $t = 0$, wo $a_\varkappa^0$ die Parameterwerthe der identischen Transformation bezeichnen, so enthalten die hervorgehenden Integralgleichungen:

$$(7.) \qquad a_\varkappa = \mathfrak{A}_\varkappa(\lambda_1 t, \cdots \lambda_r t)$$

die Grössen $\lambda_1 \ldots \lambda_r, t$ nur in den Verbindungen $\eta_\varkappa = \lambda_\varkappa t$ und lassen sich daher folgendermassen schreiben:

$$(7'.) \qquad a_\varkappa = \mathfrak{A}_\varkappa(\eta_1 \cdots \eta_r) \ .$$

Werden diese Werthe der Grössen $a_\varkappa$ in den Gleichungen $x_\varkappa' = f_\varkappa(x, a)$ eingesetzt, so sind die hervorgehenden Gleichungen:

$$(8.) \qquad x_\varkappa' = f_\varkappa(x_1 \cdots x_n \ , \ \mathfrak{A}_1(\eta) \cdots \mathfrak{A}_r(\eta))$$

eben die canonischen Gleichungen der r-gliedrigen Gruppe.

Zur Reduction einer vorgelegten Gruppe: $x_\varkappa' = f_\varkappa(x_1 \ldots x_n a_1 \ldots a_r)$ auf ihre canonische Form ist es daher jedenfalls nur erforderlich, das simultane System (6.) *zu integriren.*

Anders ausgesprochen: *Es genügt unter den Bahncurven der infinitesimalen Transformation* $\lambda_1 A_1 f + \cdots + \lambda_r A_r f + \dfrac{\partial f}{\partial t}$ *in den Veränderlichen* $a_1 \ldots a_r$, t *diejenige zu bestimmen, welche zu dem Werthsysteme* $a_1 = a_1^0 \ldots a_r = a_r^0$, $t = 0$ *gehört.*

Die allgemeine infinitesimale Transformation:

$$\sum_1^r{}_\varkappa e_\varkappa' \sum_1^n{}_i \xi_{\varkappa i}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_\varkappa e_\varkappa X_\varkappa f$$

der vorgelegten Gruppe erhält in den neuen Veränderlichen $x_\varkappa' = f_\varkappa(x, a)$ die Form:

$$\sum e_\varkappa' X_\varkappa' f = \sum e_\varkappa X_\varkappa f \ .$$

Dabei sind die $e_\varkappa'$ lineare homogene Functionen von den e_i

$$(9.) \qquad e_\varkappa' = \varrho_{\varkappa 1}(a_1 \cdots a_r) \cdot e_1 + \cdots + \varrho_{\varkappa r}(a) \cdot e_r \ ,$$

$$(\varkappa = 1, 2 \cdots r) \ ,$$

Diese letzten Gleichungen, welche unter den gemachten Voraussetzungen ohne Integration aufgestellt werden können, stellen die *adjungirte Gruppe* dar. Sind nun die Gleichungen $a_\varkappa = \mathfrak{A}_\varkappa(\eta_1 \ldots \eta_r)$ bekannt, so findet man die canonischen

Gleichungen der adjungirten Gruppe einfach dadurch, dass man in (9.) die Substitution: $a_\varkappa = \mathfrak{A}_\varkappa$ ausführt:

$$e_\varkappa' = \sum_1^r{}_i \varrho_{\varkappa i}(\mathfrak{A}_1 \cdots \mathfrak{A}_r) \cdot e_i = \sum_1^r{}_i \sigma_{\varkappa i}(\eta) \cdot e_i \, .$$

Es ist aber leicht zu erkennen, dass die canonischen Gleichungen der adjungirten Gruppe sich ohne Benutzung der Relationen: $a_\varkappa = \mathfrak{A}_\varkappa$ aufstellen lassen. Bezeichnet man nämlich die infinitesimalen Transformationen der adjungirten Gruppe mit:

$$E_\mu' f = \sum_{kj}^{1 \ldots r} c_{j\mu\varkappa} e_j' \frac{\partial f}{\partial e_\varkappa'} = \sum_\varkappa \varepsilon_{\mu'\varkappa} \frac{\partial f}{\partial e_\varkappa'}$$

und bildet die lineare partielle Differentialgleichung:

$$\lambda_1 E_1' f + \cdot \cdot + \lambda_r E_r' f + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \, , \tag{10.}$$

so enthalten diejenigen Integralgleichungen

$$e_\varkappa' = \psi_{\varkappa 1}(\lambda_1 t, \cdots \lambda_r t)\, e_1 + \cdots + \psi_{\varkappa r} e_r$$

des äquivalenten simultanen Systems:

$$\frac{de_1'}{\sum_j \lambda_j \varepsilon_{j'1}} = \cdots = \frac{de_r'}{\sum_j \lambda_j \varepsilon_{j'r}} = dt \, ,$$

welche die Anfangsbedingungen

$$[e_\varkappa']_{t=0} = e_\varkappa$$

erfüllen, die Grössen $\lambda_1, \ldots \lambda_r, t$ nur in den Verbindungen $\eta_\varkappa = \lambda_\varkappa t$. *Diese Integralgleichungen*

$$e_\varkappa' = \psi_{\varkappa 1}(\eta_1 \cdots \eta_r) \cdot e_1 + \cdots + \psi_{\varkappa r} \cdot e_r \, , \tag{11.}$$

deren Aufstellung nur die Auflösung einer algebraischen Gleichung verlangt, sind die canonischen Gleichungen der adjungirten Gruppe.

Es ist also unter unseren Voraussetzungen immer möglich, sogar *zwei verschiedene Darstellungsformen*:

$$e_\varkappa' = \sum_1^r{}_i \varrho_{\varkappa i}(a_1 \cdots a_r) \cdot e_i \, , \quad e_\varkappa' = \sum_1^r{}_i \psi_{\varkappa i}(\eta_1 \cdots \eta_r) \cdot e_i$$

der adjungirten Gruppe *ohne Integration* zu finden. Dabei wissen wir, dass die $\varrho_{\varkappa i}(a)$ durch die Substitution: $a_\varkappa = \mathfrak{A}_\varkappa(\eta)$ die Form $\psi_{\varkappa i}(\eta)$ annehmen.

Digitized by Google

Es gehen daher die Gleichungen: $\varrho_{\varkappa i}(a) - \psi_{\varkappa i}(\eta) = 0$, die wir immer aufstellen können, durch die Substitution: $a_\varkappa = \mathfrak{A}_\varkappa(\eta)$ in lauter Identitäten über.

Enthält nun die r-gliedrige Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ keine ausgezeichnete infinitesimale Transformation, so ist auch die adjungirte Gruppe r-gliedrig, und es finden sich daher unter den Functionen $\varrho_{\varkappa i}(a)$ gerade r unabhängige. *Die Gleichungen* $\varrho_{\varkappa i}(a) - \psi_{\varkappa i}(\eta) = 0$ *sind in diesem Falle auflösbar nach* $a_1 \ldots a_r$, und dabei leuchtet es ein, dass die in dieser Weise hervorgehenden Relationen:

$$a_\varkappa = B_\varkappa(\eta_1 \cdots \eta_r)$$

mit den Gleichungen $a_\varkappa = \mathfrak{A}_\varkappa(\eta)$ *identisch sein müssen.*

Kennt man daher die endlichen Gleichungen einer r-gliedrigen Gruppe $x_\varkappa' = f_\varkappa(x\,a)$, *welche keine ausgezeichnete infinitesimale Transformation enthält, so verlangt die Reduction dieser Gruppe auf ihre canonische Form nicht einmal Quadraturen, sondern nur die Auflösung von algebraischen Gleichungen.*

Dieser Satz spielt eine wichtige Rolle in meiner Integrationstheorie[1] eines vollständigen Systems mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Es ist nämlich möglich, es so einzurichten, dass neben eingliedrigen Gruppen nur Gruppen ohne ausgezeichnete infinitesimale Transformationen in Betracht kommen.

Wir wenden uns jetzt zu dem Falle, dass die vorgelegte Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ gewisse, etwa gerade $r - m$ unabhängige ausgezeichnete infinitesimale Transformationen enthält; dabei können wir ohne Beschränkung annehmen, dass $X_{m+1} f, X_{m+2} f \ldots X_r f$ solche ausgezeichnete infinitesimale Transformationen sind. Alsdann enthält die adjungirte Gruppe: $E_1' f \ldots E_r' f$ gerade m unabhängige infinitesimale Transformationen, nämlich $E_1' f \ldots E_m' f$, während $E_{m+1}' f$, $E_{m+2}' f \ldots E_r' f$ identisch Null sind.

Auch in diesem Falle gehen die Gleichungen $\varrho_{\varkappa i}(a) - \psi_{\varkappa i}(\eta) = 0$ bei der Substitution $a_\varkappa = \mathfrak{A}_\varkappa(\eta)$ in Identitäten über. Anders ausgesprochen, es sind die Gleichungen:

$$\varrho_{\varkappa i}(a) - \psi_{\varkappa i}(\eta) = 0$$

[1] Math. Annalen Band XI und XXV.

Digitized by Google

Integralgleichungen des simultanen Systems (6.), welche überdies bei der Substitution:

$$(12.) \qquad t_{i1} = 0 \cdots t_{ir} = 0 \ , \quad a_1 = a_1^0 \cdots a_r = a_r^0$$

erfüllt werden.

Es leuchtet daher ein, dass *das Gleichungssystem*: $\varrho_{\varkappa i}(a) - \psi_{\varkappa i}\,\lambda t = 0$ *die infinitesimale Transformation*

$$\lambda_1 A_1 f + \cdots + \lambda_r A_r f + \frac{\partial f}{\partial t}$$

gestattet. Wir behaupten, dass es überdies die infinitesimale Transformation

$$A_{m+1} f \ , \ \cdots \quad A_r f$$

zulässt.

Um dies nachzuweisen, zeigen wir zunächst, dass das Gleichungssystem

$$(9.) \qquad e_\varkappa' = \varrho_{\varkappa 1}(a) \cdot e_1 + \cdots + \varrho_{\varkappa r}(a) \cdot e_r \ ,$$

welches die adjungirte Gruppe darstellt, die infinitesimalen Transformationen

$$E_\varkappa' f + A_\varkappa f \quad (\varkappa = 1 \cdots m \cdots r)$$

gestattet.

Die Gleichung

$$\sum_j e_j' X_j' f = \sum_j e_j X_j f$$

geht bei der Substitution:

$$x_i' = f_i(x\,a) \ , \quad e_\varkappa' = \varrho_{\varkappa 1}(a)\, e_1 + \cdots + \varrho_{\varkappa r}\, e_r$$

in eine Identität über. Setzen wir nun:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = p_i \ , \quad \frac{\partial f}{\partial x_i'} = p_i' \ ,$$

$$\sum_1^n{}_\nu \xi_{j\nu}(x')\, p_\nu' = H_j' \ , \quad \sum_1^n{}_\nu \xi_{j\nu}(x)\, p_\nu = H_j$$

und denken uns die *erweiterte* Gruppe:

$$x_i' = f_i(x\,,\, a) \ , \quad p_i' = P_i(x, p, a)$$
$$(i = 1 \cdots n)$$

Digitized by Google

berechnet, so besteht die Gleichung:

$$\sum_j e_j' H_j'(x' p') = \sum_j e_j H_j(x p)$$

nach der Substitution:

$$x_\varkappa' = f_\varkappa(x a) , \quad p_\varkappa' = P_\varkappa(x p a) \quad e_\varkappa' = \sum_i \varrho_{\varkappa i}(a) \cdot e_i$$

identisch in den Veränderlichen $x_1 \dots x_n$, $p_1 \dots p_n$, $a_1 \dots a_r$. Fassen wir daher diese $2n + r$ Grössen als unabhängige Veränderliche auf, so führt die soeben besprochene Substitution auch die Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial a_\varkappa} \left(\sum_j e_j' H_j' \right) = 0 \tag{13.}$$

in eine Identität über.

Nun ist:

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_\varkappa} = \sum_1^r{}_\nu \psi_{\nu\varkappa}(a_1 \cdots a_r) \cdot \xi_{\nu i}(x_1' \cdots x_n') ,$$

was wir auch so schreiben können:

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_\varkappa} = \sum_1^r{}_\nu \psi_{\nu\varkappa}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial H_\nu'}{\partial p_i'} ;$$

dem entsprechend ist

$$\frac{\partial p_i'}{\partial a_\varkappa} = -\sum_1^r{}_\nu \psi_{\nu\varkappa}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial H_\nu'}{\partial x_i'} .$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial H_j'}{\partial a_\varkappa} = \sum_1^r{}_\nu \psi_{\nu\varkappa}(a) \cdot (H_\nu' H_j')$$

$$= \sum_1^r{}_\nu \psi_{\nu\varkappa} \cdot \sum_1^r{}_\sigma c_{\nu j\sigma} H_\sigma'$$

und

$$\frac{\partial}{\partial a_\varkappa} \sum_j e_j' H_j' = \sum_1^r{}_\sigma H_\sigma' \left(\frac{\partial e_\sigma'}{\partial a_\varkappa} + \sum_\nu \psi_{\nu\varkappa} \sum_j c_{\nu j\sigma} e_j' \right) .$$

Die Gleichung (13.) zerlegt sich daher in die Gleichungen:

$$\frac{\partial e_\sigma'}{\partial a_\varkappa} + \sum_\nu \psi_{\nu\varkappa}(a) \sum_j c_{\nu j\sigma} e_j' = 0 ,$$

Digitized by Google

die sich folgendermassen schreiben lassen:

$$\frac{\partial e_i'}{\partial a_\varkappa} = \sum_\nu \psi_{\nu\varkappa}(a) \cdot \varepsilon_\nu' {}_i \ .$$

Hier verschwindet die Determinante der $\psi_{\nu\varkappa}$ nicht identisch; also kommt durch Auflösung:

$$\varepsilon_{j\,i}'(e_1' \cdots e_r') = \sum_1^r{}_\varkappa \alpha_{j\varkappa}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial e_i'}{\partial a_\varkappa} \ .$$

Lösen wir nun die Gleichungen:

$$e_i' = \varrho_{i1}(a) \cdot e_1 + \cdots + \varrho_{ir}(a) \cdot e_r$$

nach $e_1 \ldots e_r$ auf:

$$e_i = \Phi_i(e_1' \cdots e_r'\ a_1 \cdots a_r) \ ,$$

so finden wir leicht gewisse lineare partielle Differentialgleichungen in den unabhängigen Veränderlichen $e_1' \ldots e_r'\ a_1 \ldots a_r$, welche die Φ_i erfüllen. Differentiiren wir nämlich die letzten Gleichungen nach den $a_\varkappa$, indem wir die e' als Functionen von $e_1 \ldots e_r\ a_1 \ldots a_r$ auffassen, so finden wir:

$$0 = \sum_1^n{}_\nu \frac{\partial \Phi_i}{\partial e_\nu'} \frac{\partial e_\nu'}{\partial a_\varkappa} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial a_\varkappa} \ ;$$

und wenn wir mit $\alpha_{j\varkappa}$ multipliciren und nach $\varkappa$ summiren:

$$0 = \sum_1^r{}_\nu \frac{\partial \Phi_i}{\partial e_\nu'} \varepsilon_j' {}_\nu + \sum_1^r{}_\varkappa \frac{\partial \Phi_i}{\partial a_\varkappa} \alpha_{j\varkappa} = 0$$

oder

$$0 = E_j' \Phi_i + A_j \Phi_i \cdot \ (j = 1 \cdots r) \ .$$

Es sind daher $\Phi_1 \ldots \Phi_r$ Lösungen des vollständigen Systems:

$$E_1' f + A_1 f = 0 \ \cdots \ E_r' f + A_r f = 0 \ ;$$

anders ausgesprochen: *Es gestattet das Gleichungssystem*:

(9.) $$e_\varkappa' = \varrho_{\varkappa 1}(a) \cdot e_1 + \cdots + \varrho_{\varkappa r}(a) \cdot e_r$$

die r infinitesimalen Transformationen:

$$E_1' f + A_1 f \cdots E_r' f + A_r f \ .$$

Nun aber ist

$$E_{m+1}' f \equiv 0 \cdots E_r' f \equiv 0 \ ;$$

Digitized by Google

also gestattet unser Gleichungssystem (9.) die infinitesimalen Transformationen: $A_{m+1}f \ldots A_rf$; kurz es bestehen die Gleichungen

$$A_{m+1}\varrho_{\varkappa i} \equiv 0 \cdots A_r\varrho_{\varkappa i} \equiv 0 \ ,$$

so dass das früher besprochene *Gleichungssystem*

$$\varrho_{\varkappa i}(a) - \psi_{\varkappa i}(\lambda t) = 0 \ ,$$

wirklich nicht allein die infinitesimale Transformation

$$\lambda_1 A_1 f + \cdots + \lambda_r A_r f + \frac{\partial f}{\partial t} = Af \ ,$$

sondern auch die infinitesimalen Transformationen $A_{m+1}f \ldots A_r$ *gestattet.*

Hierbei ist zu bemerken, dass diese $r - m + 1$ infinitesimalen Transformationen paarweise vertauschbar sind, und dass andererseits die $(r - m + 1)$-reihigen Determinanten der zugehörigen Matrix weder identisch noch vermöge des Gleichungssystems $\varrho_{\varkappa i}(a) - \psi_{\varkappa i}(\lambda t) = 0$, das ja keine von den λ freie Relation liefert, verschwinden.

Wir lösen die Gleichungen $\varrho_{\varkappa i}(a) - \psi_{\varkappa i}(\lambda t) = 0$ hinsichtlich m Grössen a etwa $a_1 \cdots a_m$ auf:

$$a_1 = B_1(a_{m+1} \cdots a_r, \lambda_1 t, \cdots \lambda_r t) \cdots a_m = B_m \ ,$$

führen sodann die Substitution:

$$a_1 = B_1 \ , \cdots a_m = B_m \ , \quad \frac{\partial f}{\partial a_1} = 0 \cdots \frac{\partial f}{\partial a_m} = 0$$

in

$$Af \ , A_{m+1}f \cdots A_rf$$

aus und bezeichnen die hervorgehenden verkürzten infinitesimalen Transformationen in den Veränderlichen $a_{m+1} \cdots a_r, t$ mit:

$$\bar{A}f \ , \ \bar{A}_{m+1}f \cdots \bar{A}_rf \ .$$

Dabei ist sicher, dass dieselben paarweise vertauschbar sind, ferner dass die $(r - m + 1)$-reihigen Determinanten der zugehörigen Matrix nicht alle identisch verschwinden, endlich noch dass keine Relation:

$$\beta(a, t)\, Af + \beta_{m+1}\, \bar{A}_{m+1}f + \cdots + \beta_r\, \bar{A}_rf = 0$$

besteht.

Digitized by Google

Es bilden daher die $r - m$ linearen, partiellen Differentialgleichungen:

$$\overline{A}f = 0\ ,\ \overline{A}_{m+1}f = 0 \cdots \overline{A}_{j-1}f = 0\ ,\ \overline{A}_{j+1}f = 0 \cdots \overline{A}_r f = 0$$

ein vollständiges System, welches die infinitesimale Transformation $A_j f$ gestattet. Die entsprechende Lösung φ_j wird nach meiner alten Theorie aus den Gleichungen:

$$\overline{A}\varphi_j = 0,\ \overline{A}_{m+1}\varphi_j = 0 \cdots \overline{A}_{j-1}\varphi_j = 0\ ,\ \overline{A}_{j+1}\varphi_j = 0 \cdots \overline{A}_r\varphi_j = 0,$$
$$A_j\varphi = 1$$

bestimmt[1]). Dieselben bestimmen die Differentialquotienten von φ_j und geben daher φ_j durch eine Quadratur.

In dieser Weise finden wir $r - m$ unabhängige Lösungen

$$\varphi_{m+1}\ \varphi_{m+2} \cdots \varphi_r$$

der linearen partiellen Differentialgleichung $\overline{A}f = 0$. In den entsprechenden Integralgleichungen:

$$\varphi_j(a_{m+1} \cdots a_r, \lambda_1 t, \cdots \lambda_r t) = c_j$$

bestimmen wir die Integrationsconstanten c so, dass $a_{m+1} \ldots a_r$ für $t = 0$ die Werthe $a^0_{m+1} \ldots a^0_r$ annehmen, wir setzen also:

$$\varphi_j(a^0_{m+1} \cdots a^0_r, 0, \cdots 0) = c_j = \varphi^0_j\ .$$

Alsdann liefern die Gleichungen:

(15.) $a_1 = B_1 \cdots a_m = B_m, \varphi_{m+1} = \varphi^0_{m+1} \cdots \varphi_r = \varphi^0_r$

dasjenige System Integralgleichungen des simultanen Systems:

$$\frac{da_1}{\Sigma\lambda_\varkappa a_{\varkappa 1}} = \cdots = \frac{da_r}{\Sigma\lambda_\varkappa a_{\varkappa r}} = dt\ ,$$

welches zu den Anfangsbedingungen $a_\varkappa = a^0_\varkappa$ für $t = 0$ gehört; führt man sodann in (15.) die Substitution $\lambda_\varkappa t = \eta_\varkappa$ aus, und

---

1) Bilden die Gleichungen $A_1 f = 0 \ldots A_{n-1} f = 0$ in n Veränderlichen $y_1 \ldots y_n$ ein $(n-1)$-gliedriges vollständiges System mit der bekannten infinitesimalen Transformation Bf, welche nicht die Form $\Sigma\alpha_\varkappa A_\varkappa$ besitzt, so haben sie eine ganz bestimmte gemeinsame Lösung φ, welche die Gleichungen:

$$A_\varkappa\varphi = 0\ ,\ B\varphi = 1$$

erfüllt. Man findet daher die Differentialquotienten von φ durch Auflösung und darnach φ selbst durch Quadratur.

Digitized by Google

löst nach $a_1 \ldots a_r$ auf, so findet man eben die gesuchten Gleichungen:

$$a_\varkappa = \mathfrak{A}_\varkappa(\eta_1 \cdots \eta_r), \quad (\varkappa = 1 \cdots r),$$

deren Bestimmung durch $r - m$ unabhängige Quadraturen hiermit geleistet ist.

Kennt man die endlichen Gleichungen: $x'_\varkappa = f_\varkappa(x_1 \ldots x_n\ a_1 \ldots a_n)$ *einer* r*-gliedrigen Gruppe mit* $r - m$ *unabhängigen ausgezeichneten infinitesimalen Transformationen, so verlangt die Reduction dieser Gruppe auf ihre canonische Form im Allgemeinen* $r - m$ *unabhängige Quadraturen.*

II.

1. Wir werden die Bedeutung des eben entwickelten allgemeinen Satzes durch mehrere wichtige Anwendungen illustiren.

Es seien wiederum die *endlichen* Gleichungen: $x'_\varkappa = f_\varkappa(x\,a)$ einer r-gliedrigen Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ vorgelegt. Alsdann ist es immer möglich, die *infinitesimalen* Transformationen aller Untergruppen zu finden. Wir werden zeigen, dass es dann zugleich möglich ist, die *endlichen* Gleichungen einer jeden Untergruppe anzugeben.

Sind nämlich die infinitesimalen Transformationen:

$$\lambda_1 X_1 f + \cdots + \lambda_r X_r f$$

einer gewissen m-gliedrigen Untergruppe etwa durch die $r - m$ Gleichungen:

$$\lambda_{m+\varkappa} = d_{\varkappa 1}\lambda_1 + \cdots + d_{\varkappa m}\lambda_m$$

bestimmt, so braucht man nur in die früher bestimmten canonischen Gleichungen:

$$x_\varkappa' = f_\varkappa(x_1 \cdots x_n\ \eta_1 \cdots \eta_r) = f_\varkappa(x\,A)$$

die Substitution:

$$\eta_{m+\varkappa} = d_{\varkappa 1}\eta_1 + \cdots + d_{\varkappa m}\eta_m$$

zu machen, um die *endlichen* Gleichungen der betreffenden Untergruppe in canonischer Form zu erhalten.

Sind

$$x'_\varkappa = \psi_\varkappa(x_1 \cdots x_n\ \eta_1 \cdots \eta_m)$$

Digitized by Google

die endlichen Gleichungen einer Untergruppe, so findet man mit Benutzung meiner bekannten Regeln durch *Elimination* einerseits alle Invarianten dieser Untergruppe, andererseits alle zugehörigen invarianten Gleichungssysteme[1]).

Wir werden jetzt zeigen, dass zu jeder r-gliedrigen Gruppe mit bekannten *endlichen* Gleichungen gewisse *integrable* simultane Systeme zugeordnet sind.

Seien $X_1 f \cdots X_r f$ r unabhängige infinitesimale Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe mit bekannten endlichen Gleichungen: $x'_\varkappa = f_\varkappa(x_1 \cdots x_n\ a_1 \cdots a_r)$. Alsdann ist es leicht zu sehen, dass das simultane System

$$\frac{dx_1}{\sum_\varkappa \lambda_\varkappa \xi_{\varkappa 1}} = \cdots = \frac{dx_n}{\sum_\varkappa \lambda_\varkappa \xi_{\varkappa n}} \tag{16.}$$

integrabel ist, welche Werthe auch die Constante λ besitzen möge; früher fanden wir ja, dass das äquivalente simultane System

$$\frac{dx_1}{\sum_\varkappa \lambda_\varkappa \xi_{\varkappa 1}} = \cdots = \frac{dx_n}{\sum \lambda_\varkappa \xi_{\varkappa n}} = dt$$

unter den gemachten Voraussetzungen integrirt werden kann.

Wendet man diesen allgemeinen Satz auf die *lineare* Gruppe:

$$x'_\varkappa = a_{\varkappa 1} x_1 + \cdots + a_{\varkappa n} x_n + a_\varkappa$$

an, so erhält man den D'ALEMBERT'schen Satz, dass jedes lineare simultane System:

$$dx_\varkappa = (c_{\varkappa 1} x_1 + \cdots + c_{\varkappa n} x_n + c_\varkappa)\, dt$$
$$(\varkappa = 1 \cdots n)$$

integrabel ist.

Betrachtet man andererseits die allgemeine *projective* Gruppe in *zwei* Veränderlichen, so erkennt man die Integrabilität der sogenannten JACOBI'schen Differentialgleichung erster Ordnung.

---

1) Bei einer früheren Gelegenheit betrachtete ich die Invarianten von zwei, von drei, überhaupt von m Punkten gegenüber einer r-gliedrigen Gruppe. Ich bemerkte, dass die Anzahl der wesentlichen derartigen Invarianten *begrenzt* ist. Ich füge jetzt *ausdrücklich* hinzu, dass es im ungünstigsten Falle genügt, Invarianten von $r+1$ Punkten in Betracht zu ziehen. Werden nämlich r Punkte allgemeiner Lage festgehalten, so bleiben *alle* Punkte in Ruhe.

Digitized by Google

III.

Wir werden die erhaltenen Resultate verallgemeinern.

Sind $X_1 f \cdots X_r f$ unabhängige infinitesimale Transformationen einer *assystatischen* r-gliedrigen Gruppe, so können die endlichen Gleichungen dieser Gruppe aufgestellt werden. Also können die Bahncurven jeder infinitesimalen Transformation der Gruppe gefunden werden.

Besitzen andererseits alle infinitesimalen Transformationen Yf, welche mit sämmtlichen infinitesimalen Transformationen der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ vertauschbar sind, die Form $\Sigma e_\varkappa X_\varkappa f$; so ist es wiederum möglich, die endlichen Gleichungen dieser Gruppe aufzustellen [1]).

Wir werden jetzt annehmen, dass eine r-gliedrige Gruppe $X_1 \cdots X_r f$ vorgelegt ist, welche so beschaffen ist, dass die Gleichungen:

$$(X_1 Y) = 0 \cdots (X_r Y) = 0$$

eine *endliche* Gruppe $Y_1 f \cdots Y_m f$ bestimmen. Wir setzen andererseits voraus, dass alle $Y_\varkappa f$ *bekannt* sind.

Alsdann bilden $X_1 \cdots X_r\ Y_1 \cdots Y_m$ eine Gruppe; dabei gehören alle infinitesimalen Transformationen, welche mit allen Transformationen $X_\varkappa$ und $Y_\varkappa$ vertauschbar sind, der Gruppe $X_1 \cdots X_r\ Y_1 \cdots Y_m$ an. Daher ist es möglich, die endlichen Gleichungen der Gruppe X, Y und gleichzeitig die endlichen Gleichungen der Gruppe $X_1 \cdots X_r$ aufzustellen.

1) Vergleiche Math. Annalen Band XXV, Seite 416. Die allgemeinsten Grössen $x_1' \ldots x_n'$, welche alle Gleichungen $X_\varkappa' f = X_k f$ erfüllen, werden offenbar im vorliegenden Falle durch ein integrables vollständiges System bestimmt.

Digitized by Google

G. Scheffers, *Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen.*[1])

Die Arbeiten von Weierstrass, Dedekind u. A.[2]) über die aus mehreren Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen, deren Multiplication den drei Gesetzen der Commutation, Association und Distribution folgt, beschäftigen sich ausschliesslich mit der *arithmetischen* Seite des Problems, indem es sich

---

1) Indem ich der Königlichen Gesellschaft die obige Note des Herrn Dr. Scheffers vorlege, erlaube ich mir mit einigen Worten auf die Beziehung derselben zu einigen noch nicht erschienenen Arbeiten des Herrn Dr. Study hinzuweisen, welche der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen und der hiesigen Gesellschaft der Wissenschaften vorgelegt worden sind. In einer Mittheilung an die französische Académie des Sciences (3. November 1884) bemerkte schon Herr Poincaré, dass die Bestimmung aller Systeme von complexen Zahlen darauf hinauskommt, alle (transitiven) linearen homogenen Gruppen in n Veränderlichen zu finden, deren Coefficienten lineare Functionen von n Parametern sind. In meinen Seminar-Uebungen forderte ich Herrn Scheffers, der sich schon mit complexen Zahlen beschäftigt hatte, dazu auf, die hiermit definirte Kategorie von linearen Gruppen zu untersuchen, indem ich besonders hervorhob, dass für den Fall $n = 3$ die Bestimmung aller derartigen Gruppen ohne weiteres aus meiner Bestimmung (September 1884) aller projectiven Gruppen in zwei Veränderlichen hervorgeht. In dieser Weise ist die Arbeit des Herrn Dr. Scheffers entstanden. Inzwischen hat Herr Dr. Study in Marburg schöne Untersuchungen über complexe Zahlen und ihren Zusammenhang mit der Theorie der linearen Transformationsgruppen den oben genannten Gesellschaften vorlegen lassen. Diese Arbeiten sind, wie bereits gesagt, noch nicht erschienen und konnten daher von Herrn Scheffers nicht citirt werden. Um so nöthiger scheint es mir festzustellen, dass soweit die Ergebnisse des Herrn Scheffers mit denjenigen des Herrn Study übereinstimmen, die Priorität dem Letzteren zukommt. S. Lie.

2) Weierstrass, Gött. Nachr. 1884, S. 395; Dedekind, desgl. 1885, S. 141; ferner: Schwarz, 1884, S. 516; Dedekind 1887, S. 1, u. A.

Digitized by Google

in denselben im Wesentlichen um die Auslegung der bekannten Stelle in Gauss' Werken, Bd. II, S. 178, handelt.

Die *gruppentheoretische* Seite des Problems dagegen hat kürzlich Schur in den Mathematischen Annalen hervorgehoben. Vom gruppentheoretischen Standpunkte aus sind die von Weierstrass und Dedekind als zulässig bezeichneten Systeme nur specielle und durchaus nicht die interessantesten.

Weierstrass unterwirft nämlich die Zahlensysteme drei Bedingungen (a. a. O. S. 403): Zwei Determinanten ε und N_0 und die Discriminante einer gewissen Gleichung sollen nicht identisch verschwinden. (Dedekind hat diese drei Bedingungen in eine einzige $\Delta \neq 0$ zusammengefasst, a. a. O. S. 147.) Von den drei Zulässigkeitsbedingungen ist eine ($\varepsilon \not\equiv 0$) wegen der Forderung der Eindeutigkeit der Division *in der Natur der Sache begründet.* Die beiden übrigen dagegen fliessen aus andern arithmetischen Postulaten.

Im Folgenden betrachte ich solche Systeme, in denen eben diese eine naturgemässe Forderung erfüllt ist, die beiden anderen Postulate Weierstrass' dagegen beiseite gelassen sind. Ueberdies soll die Multiplication auch nur dem distributiven und dem associativen Gesetz unterworfen sein. In der That spielt das commutative Princip keine fundamentale Rolle wie die beiden anderen: Das associative Gesetz stellt die innige Beziehung zur Gruppentheorie, das distributive die nothwendige Verknüpfung zwischen Addition und Multiplication her. *Die Commutativität des Productes wird also nicht vorausgesetzt.*

§ 1.

Allgemeines.

Seien $e_1 \dots e_n$ die n irreducibelen Einheiten, aus denen das zu betrachtende Zahlensystem abgeleitet werde, derart, dass jede Zahl x des Systems sich in der Form

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n = \sum x_i e_i$$

darstellt, wo $x_1 \dots x_n$ Zahlen bedeuten, die den gewöhnlichen Rechenregeln folgen, also gewöhnlich complexe Zahlen (wie auch bei Dedekind, a. a. O. S. 159). Addition wie Subtraction

Digitized by Google

$$x \pm y = \sum (x_i + y_i) e_i \ , \quad \text{wenn } x = \sum x_i e_i , \ \sum y_i e_i \text{ ist} \ ,$$

folgen den gewöhnlichen Regeln.

Um zu einer Productdefinition zu gelangen, fordern wir, dass das *associative* Gesetz:

$$(a\,b)\,c = a\,(b\,c)$$

und das *distributive* Gesetz:

$$(a + b)\,(c + d) = ac + bc + ad + bd$$

für die Multiplication im Systeme bestehen. Ist nun das Product zweier Einheiten $e_i e_\varkappa$ in allgemeinster Weise definirt durch die Formel

$$e_i e_\varkappa = \sum_s \eta_{si\varkappa} e_s \ , \tag{1.}$$
$$(i, \varkappa = 1, 2 \ldots n) \ ,$$

wo die $\eta_{si\varkappa}$ gewöhnlich-complexe und für das betreffende System charakteristische Constanten bedeuten, so ist auch allgemein nach dem distributiven Gesetze das Product xy beliebiger Zahlen x, y des Systems definirt. Denn es ist

$$x\,y = (x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n)\,(y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n) = \sum_i \sum_\varkappa x_i y_\varkappa e_i e_\varkappa \ ,$$

d. h. nach (1.):

$$xy = \sum_s \sum_i \sum_\varkappa \eta_{si\varkappa} x_i y_\varkappa e_s \ . \tag{2.}$$

Die Forderung, dass für diese Productdefinition (2.) das associative Gesetz $(xy)z = x(yz)$ erfüllt sein soll, führt auf die dazu nothwendigen und hinreichenden Bedingungen (vgl. Dedekind, a. a. O. S. 143):

$$\sum_s \eta_{si\varkappa} \eta_{\sigma s\lambda} = \sum_s \eta_{s\varkappa\lambda} \eta_{\sigma is} \ , \tag{3.}$$
$$(i, \varkappa, \lambda, \sigma = 1 \cdots n) \ .$$

Endlich stellen wir noch das Verlangen, dass die Umkehrung der Multiplication, die Division, im Allgemeinen eindeutig sei, d. h. dass die Gleichung

$$xy = z \tag{4.}$$

oder nach (2.) das folgende System von n Gleichungen aus dem gewöhnlich complexen Gebiete

Digitized by Google

(4'.) $$\sum_i \sum_\varkappa \eta_{si\varkappa} x_i y_\varkappa = z_s$$
$$(s = 1, 2 \cdots n)$$

im Allgemeinen eindeutig nach x resp. $x_1 \ldots x_n$ oder y resp. $y_1 \ldots y_n$ auflösbar seien [1]). Dazu ist nothwendig und hinreichend, dass die Determinanten [2])

(5.) $$\Delta_x \equiv \left| \sum_i \eta_{si\varkappa} x_i \right|_{s,\varkappa = 1,2 \cdots n}, \qquad \Gamma_y \equiv \left| \sum_\varkappa \eta_{si\varkappa} y_\varkappa \right|_{s,i = 1,2 \cdots n}$$

nicht identisch verschwinden.

Es giebt nunmehr im System stets eine und nur eine Zahl

$$\varepsilon = \varepsilon_1 e_1 + \cdots + \varepsilon_n e_n$$

von der Beschaffenheit, dass stets

$$x\varepsilon = x\,, \quad \varepsilon x = x$$

ist, welche Zahl des Systems auch x sein möge.

Zum Beweise sei

$$a = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$$

eine solche Zahl des Systems, für welche Δ_a und $\Gamma_a \neq 0$ sind. Dann lässt sich die Forderung

$$a = a\varepsilon$$

auf nur eine Weise durch eine gewisse Zahl ε erfüllen. Ist x eine beliebige Zahl des Systems, so lässt sich wegen $\Gamma_a \neq 0$ die Gleichung

$$x = z\,a$$

stets durch ein z befriedigen, sobald nur nicht $x = 0$ ist. Dann aber giebt das Gesetz der Association für das soeben gefundene ε:

$$x\varepsilon = (z\,a)\varepsilon = z(a\varepsilon) = z\,a = x\,, \quad \text{also} \quad x\varepsilon = x\,.$$

Andererseits liefert die Gleichung

$$a\,y = a\,y'$$

stets $y = y'$, sobald $\Delta_a \neq 0$ ist, sodass mithin aus

$$a(\varepsilon y) = (a\varepsilon)\,y = a\,y$$

---

1) Weil die Gültigkeit des commutativen Gesetzes der Multiplication nicht vorausgesetzt wird, giebt es zwei verschiedene Arten der Division.

2) Δ_x ist die Determinante ε bei Weierstrass.

folgt:

$$\varepsilon y = y \ ,$$

womit unsere Behauptung dargethan ist.

Die Zahl ε hat dieselbe Eigenthümlichkeit in unserem System, wie die Zahl 1 im gewöhnlich-complexen Zahlengebiete: Eine Zahl, mit der sie als erster oder zweiter Factor multiplicirt wird, bleibt dabei völlig ungeändert. Wir nennen ε den *Modul des Systems*[1]).

Wir kommen zur *gruppentheoretischen* Auffassung der Zahlensysteme: Jede Productbildung lässt sich als eine *Transformation* auffassen. Multipliciren wir nämlich

$$x = \sum x_i e_i \quad \text{mit} \quad y = \sum y_\varkappa e_\varkappa$$

nach (2.), so kommt eine Zahl

$$x' = \sum x_s' e_s \ ,$$

für welche

$$x_s' = \sum_i \sum_\varkappa x_i y_\varkappa \eta_{si\varkappa} \quad (s = 1 \ , \ 2 \cdots n) \tag{6.}$$

ist, und diese n Gleichungen stellen eine lineare homogene Transformation von $x_1 \ldots x_n$ in $x_1' \ldots x_n'$ dar. $y_1 \ldots y_n$ spielen dabei die Rolle von blossen Parametern. Bilden wir nacheinander

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\,y \ , \quad x'' = x'\,z \ , \\ x'' &= (x\,y)\,z = x\,(y\,z) \ , \end{aligned}\right\} \tag{7.}$$

so kommt

d. h. die successive Ausführung der Transformationen mit den Parametern $y_1 \ldots y_n$ und $z_1 \ldots z_n$ ist äquivalent mit der directen Ausführung der Transformation mit den Parametern $(y\,z)_1 \ldots (y\,z)_n$.

Die durch (6.) dargestellte Schaar von Transformationen (— indem $y_1 \ldots y_n$ ∞^n Werthsysteme bedeuten —) ist also eine *Gruppe* und zwar, wie aus (17.) folgt, eine sogenannte *Parametergruppe*. Sie ist n-gliedrig und einfach-transitiv, sie besitzt die identische Transformation, weil das Zahlensystem einen Modul ε hat. Die Transformationen für welche die Parameter $y_1 \ldots y_n$ die Relation $F_y = 0$ erfüllen, sind ausgeartet.

---

1) Die Existenz des Moduls hebt schon WEIERSTRASS hervor (a. a. O. S. 399). Doch wird sie bei ihm nur unter Voraussetzung der Commutativität des Productes, die ja hier nicht gemacht wird, bewiesen (a. a. O. S. 414).

Digitized by Google

Um die *infinitesimalen Transformationen* der Gruppe zu erhalten, haben wir $y_1 \dots y_n$ unendlich wenig von $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$ verschieden anzunehmen. Wir setzen also etwa $y_\varkappa = \varepsilon_\varkappa + \alpha_\varkappa \delta t$ und finden, da $x\varepsilon = x$ ist:

$$x_s' = x_s + \delta x_s = x_s + \sum_i \sum_\varkappa x_i \alpha_\varkappa \eta_{si\varkappa} \delta t \ ,$$

sodass sich ergiebt

$$\delta x_s = \left(\sum_i \sum_\varkappa x_i \alpha_\varkappa \eta_{si\varkappa}\right) \delta t \ .$$

Die Gruppe besitzt also die n von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen

$$X_\varkappa f = \sum_s \sum_i \eta_{si\varkappa} x_i \frac{\partial f}{\partial x_s} \tag{8.}$$

$$(\varkappa = 1, 2 \cdots n) \ .$$

$X_\varkappa x_s \, . \, \delta t$ stellt hiernach den Zuwachs dar, den x_s bei der Multiplication von x mit $\varepsilon + e_\varkappa \delta t$ erfährt. Die Klammeroperation giebt unter Benutzung von (3.):

$$(X_i X_\varkappa) = \sum_s (\eta_{si\varkappa} - \eta_{s\varkappa i}) X_s f \ . \tag{9.}$$

Nach allgemeinen Gesetzen stellt $\Delta_x = 0$ die grösste bei unserer Gruppe invariante Mannigfaltigkeit dar. In der That folgt dies auch aus der Relation

$$\Delta_x \Delta_y = \Delta_{xy} \ , \tag{10.}$$

von deren Richtigkeit man sich durch Benutzung des Multiplicationstheorems der Determinanten und der Bedingungen (3.) überzeugt.

Wir sind bei der Productbildung

$$x' = xy$$

auf eine n-gliedrige Gruppe gekommen, indem wir $y_1 \dots y_n$ als Parameter auffassten. Jede Multiplication mit einer Zahl y des Systems als zweitem Factor ist also äquivalent der Ausführung einer Transformation der Gruppe.

Indem wir nun in der Productgleichung den *ersten* Factor als Parameter auffassen:

$$y' = xy \ ,$$

gelangen wir ganz analog zu einer *zweiten* n-gliedrigen linearen

Digitized by Google

homogenen Gruppe in $y_1 \dots y_n$, deren infinitesimale Transformationen $Y_1 f \dots Y_n f$ aus $X_1 f \dots X_n f$ einfach dadurch abgeleitet werden können, dass man in ihnen jedes $\eta_{si\varkappa}$ durch $\eta_{s\varkappa i}$ und jedes x durch y ersetzt. Die grösste bei dieser zweiten Gruppe invariante Mannigfaltigkeit wird durch $F_y = 0$ dargestellt, was auch aus der (10.) entsprechenden Relation

$$F_x F_y = F_{xy} \tag{11.}$$

ohne weiteres hervorgeht. Aus (10.) und (11.) geht aber auch hervor, dass $F_x = 0$ eine bei der ersten, $\Delta_y = 0$ eine bei der zweiten Gruppe invariante Mannigfaltigkeit ist. Mithin stellen $\Delta_x = 0$ und $F_x = 0$ dieselbe Mannigfaltigkeit dar: Bei beiden Gruppen bleibt dieselbe Mannigfaltigkeit invariant.

Die beiden Gruppen sind zu einander reciprok, was aus dem associativen Gesetze $(ab)c = a(bc)$ folgt. Beide haben ferner die Eigenthümlichkeit, dass man aus ihren infinitesimalen Transformationen unmittelbar die endlichen Transformationsgleichungen ableiten kann. Wir deuten dies bei der Gruppe Xf an: Gesetzt wir kennen ihre infinitesimalen Transformationen $X_\varkappa f$ (8.), so brauchen wir nur $\sum y_\varkappa X_\varkappa f$ zu bilden. Der Coefficient von $\frac{\partial f}{\partial x_s}$ darin ist dann die rechte Seite von (3.).

Handelt es sich um die Bestimmung gewisser Typen derartiger Gruppen, so ist wohl zu beachten, dass man ihre infinitesimalen Transformationen $X_1 f \dots X_n f$ nicht durch n lineare Combinationen derselben $\sum_\varkappa c_{\lambda\varkappa} X_\varkappa f (\lambda = 1, 2 \dots n)$, wo $\sum \pm c_{11} c_{22} \dots c_{nn} \neq 0$ ist, ersetzen darf, ohne gleichzeitig statt der $x_1 \dots x_n$ neue Veränderliche vermöge

$$x'_\lambda = \sum_\varkappa c_{\lambda\varkappa} x_\varkappa$$

einzuführen, weil nämlich im Zahlensysteme die Gruppenparameter mit den Variabeln auf derselben Stufe stehen.

Man kann aber, wenn man die Xf selbst noch nicht kennt, sondern nur n lineare Combinationen

$$X_\lambda f = \sum_\varkappa c_{\lambda\varkappa} X_\varkappa f$$

derselben, die $X_\varkappa f$ leicht bestimmen. Nach (8.) lautet nämlich die allgemeine infinitesimale Transformation der Gruppe

$$Xf = \sum_s \sum_i \sum_\varkappa \eta_{si\varkappa} x_i y_\varkappa .$$

Digitized by Google

Wenn wir nun $\bar{X}_1 f \dots \bar{X}_n f$ kennen:

$$\bar{X}_\lambda f = \sum_s \sum_i a_{si\lambda} x_i \frac{\partial f}{\partial x_s} ,$$

so bilden wir

$$\sum_\lambda \omega_\lambda \bar{X}_\lambda f$$

und dieser Ausdruck muss sich mit Xf decken, wenn für die ω_λ passende lineare homogene Functionen von $y_1 \dots y_n$ gesetzt werden. Wir haben demnach die Forderung zu erfüllen:

$$\sum_s \sum_i \sum_\varkappa \eta_{si\varkappa} x_i y_\varkappa \frac{\partial f}{\partial x_s} = \sum_\lambda \omega_\lambda \sum_s \sum_i a_{si\lambda} x_i \frac{\partial f}{\partial x_s} .$$

Nach dem Früheren können wir alsdann die Gleichungen (6.) ersetzen durch

$$x_s' = \sum_\lambda \sum_i a_{si\lambda} x_i \omega_\lambda , \tag{12.}$$

wo allerdings die ω_λ noch unbekannt sind.

Wir benutzen zu ihrer Bestimmung den Modul

$$\varepsilon = \varepsilon_1 a + \dots + \varepsilon_n a_n ,$$

der ja sicher existirt. Wenn $x = \varepsilon$ ist, so ist $x' = \varepsilon y = y$. Somit giebt (12.):

$$y_s = \sum_\lambda \sum_i a_{si\lambda} \varepsilon_i \omega_\lambda \tag{13.}$$

$$(s = 1, 2 \dots n)$$

und hieraus bestimmen sich *stets* $\omega_1 \dots \omega_n$ als lineare homogene Functionen von $y_1 \dots y_n$, die noch $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$ enthalten. Nun ist für $y = \varepsilon$ auch $x' = x\varepsilon = x$, d. h. nach (12.):

$$x_s = \sum_\lambda \sum_i a_{si\lambda} x_i \bar{\omega}_\lambda$$

oder

$$\sum_\lambda a_{si\lambda} \bar{\omega}_\lambda = (i, s) ,$$

wo $\bar{\omega}_\lambda$ den Werth von ω_λ für $y = \varepsilon$ bedeutet. Man kann leicht zeigen, dass diese Relationen identisch bestehen, sobald (13.) erfüllt ist.

Hat man $\omega_1 \dots \omega_n$ aus (13.) bestimmt, so giebt ihre Substitution in $\sum_\lambda \omega_\lambda \bar{X}_\lambda f$ die allgemeine infinitesimale Transformation $\sum_s \sum_i \sum_\varkappa \eta_{si\varkappa} x_i y_\varkappa \frac{\partial f}{\partial x_s}$ der Gruppe und damit auch $X_1 f \dots X_n f$.

Freilich kommen in ihnen die n Zahlen $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$ vor. Ob dieselben beliebig genommen werden können oder weiteren Bedingungen unterworfen sind, erkennt man durch Prüfung der Gültigkeit des associativen Gesetzes.

§ 2.

Bestimmung aller aus drei Einheiten gebildeten Zahlensysteme.

Wir wenden das soeben angegebene Verfahren an, um die aus drei Einheiten ableitbaren Zahlensysteme zu bestimmen. Zunächst handelt es sich (um die obige Gruppe $X_1 f \dots X_n f$ zu finden) um die Aufstellung der Typen von einfach-transitiven linearen und homogenen Gruppen in x_1, x_2, x_3. Doch brauchen wir dieselben nicht sämmtlich. Weil nämlich im Zahlensysteme ein Modul ε vorkommen muss, so muss die Gruppe die infinitesimale Transformation

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}$$

besitzen. Wenn wir dann nicht-homogene Variabeln einführen vermöge

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3},$$

so geht die Gruppe über in eine projective Gruppe in x, y und zwar in eine nur noch zweigliedrige. Diese sind aber längst bekannt. Wählen wir aus ihren Typen die einfach-transitiven heraus und führen wir wieder homogene Variabeln ein, indem wir $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}$ hinzufügen, so lauten die zu betrachtenden Gruppen:

1. $x_1 p_1 \quad x_2 p_2 \quad x_3 p_3$,
2. $x_3 p_2 \quad x_1 p_1 \quad x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3$,
3. $x_1 p_2 \quad x_3 p_2 + x_1 p_1 \quad x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3$,
4. $x_3 p_2 \quad x_1 p_1 + a x_3 p_3 \quad x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3$,
5. $x_3 p_2 \quad x_1 p_2 + x_3 p_1 \quad x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3$,
6. $x_3 p_1 \quad x_2 p_2 \quad x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3$,

Digitized by Google

7. $x_3 p_2 \quad x_3 p_3 \quad x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3$,
8. $x_3 p_2 \quad x_3 p_1 + x_2 p_2 \quad x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3$,
9. $x_1 p_2 + x_3 p_1 \quad x_2 p_2 - x_3 p_3 \quad x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3$.

Hierin ist p_s für $\frac{\partial f}{\partial x_s}$ geschrieben.

In jedem dieser 9 Fälle können wir die drei Transformationen als die oben mit $\overline{X}_1 f$, $\overline{X}_2 f$, $\overline{X}_3 f$ bezeichneten ansehen und dementsprechend die Gleichungen (12.), (13.) bilden.

Typus 2. z. B. liefert als System (12.) sofort

$$(12'.) \qquad \begin{cases} x_1' = \omega_2 x_1 + \omega_3 x_1 \ , \\ x_2' = \omega_1 x_3 + \omega_3 x_2 \ , \\ x_3' = \omega_3 x_3 \ . \end{cases}$$

Die Gleichungen (13.) lauten demnach hier

$$(13'.) \qquad \begin{cases} y_1 = \omega_2 \varepsilon_1 + \omega_3 \varepsilon_1 \ , \\ y_2 = \omega_1 \varepsilon_3 + \omega_3 \varepsilon_2 \ , \\ y_3 = \omega_3 \varepsilon_3 \ , \end{cases}$$

und hieraus folgt

$$\omega_1 = \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_3^2} (\varepsilon_1 \varepsilon_3 y_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 y_3) \ ,$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_3^2} (\varepsilon_3^2 y_1 - \varepsilon_1 \varepsilon_3 y_3) \ ,$$

$$\omega_3 = \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_3^2} \varepsilon_1 \varepsilon_3 y_3 \ .$$

Setzen wir diese Werthe in (12'.) ein, so ergeben sich als Gleichungen (6.):

$$x_1' = \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_3^2} \cdot \varepsilon_3^2 x_1 y_1 \ ,$$

$$x_2' = \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_3^2} \cdot (-\varepsilon_1 \varepsilon_2 x_3 y_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 (x_2 y_3 + x_3 y_2)) \ ,$$

$$x_3' = \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_3^2} \cdot \varepsilon_1 \varepsilon_3 x_3 y_3 \ .$$

Digitized by Google

Es ist hier

$$\Delta_x \equiv \frac{x_1 x_3^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_3^2} .$$

Dies zeigt, dass ε_1 und $\varepsilon_3 \neq 0$ sein müssen. An Stelle der dritten Einheit e_3 können wir daher $\varepsilon = \varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2 + \varepsilon_3 e_3$ einführen. Zunächst ist:

$$e_1 e_1 = \frac{1}{\varepsilon_1} e_1 , \quad e_2 e_1 = 0 \quad , \quad \varepsilon_3 e_1 = 0 \quad ,$$

$$e_1 e_2 = 0 \quad , \quad e_2 e_2 = 0 \quad , \quad e_3 e_2 = \frac{1}{\varepsilon_3} e_2 ,$$

$$e_1 e_3 = 0 \quad , \quad e_2 e_3 = \frac{1}{\varepsilon_3} e_2 , \quad e_3 e_3 = \frac{1}{\varepsilon_3} e_3 ,$$

und, wenn wir ε statt e_3 als neues e_3 einführen, da $x\varepsilon = \varepsilon x = x$ ist:

$$(14.') \qquad \begin{cases} e_1 e_1 = \frac{1}{\varepsilon_1} e_1 , & e_2 e_1 = 0 , & e_3 e_1 = e_1 , \\ e_1 e_2 = 0 , & e_2 e_2 = 0 , & e_3 e_2 = e_2 , \\ e_1 e_3 = e_1 , & e_2 e_3 = e_2 , & e_3 e_3 = e_3 . \end{cases}$$

Man erkennt, dass das associative Gesetz erfüllt ist und auch noch die von Null verschiedene Zahl $\varepsilon_1 = 1$ gemacht werden kann. Die zugehörigen Xf sind dann

$$X_1 f = x_1 p_1 + x_3 p_1 , \qquad X_2 f = x_3 p_2 ,$$
$$X_3 f = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 ,$$

und es ist nunmehr

$$\Delta_x \equiv (x_1 + x_3) x_3^2 .$$

In dieser Weise kann man mit allen 9 Typen verfahren. Man findet, dass 1, 2, 4, 5, 6 auch 5 verschiedene Systeme bestimmen, dass dagegen Typus 3, 7, 8, 9 nichts Neues, resp. gar nichts liefern.

Im Folgenden sind die so bestimmten Zahlensysteme zusammengeordnet. Die Systeme sind in der Rubrik Z nach dem Schema (14'.) angegeben, Rubrik G enthält die zugehörige Gruppe Xf, Rubrik Δ_x den Werth von Δ_x und Rubrik N enthält den Vermerk, ob das betreffende System commutativ ist oder nicht, d. h. ob $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ mit einander vertauschbar sind oder nicht.

Digitized by Google

	Z			G	Δ_x	N
I.	e_1	0	0	$x_1 p_1$	$x_1 x_2 x_3$	—
	0	e_2	0	$x_2 p_2$		
	0	0	e_3	$x_3 p_3$		
II.	e_1	0	e_1	$(x_1 + x_3) p_1$	$(x_1 + x_3) x_3^2$	—
	0	0	e_2	$x_3 p_2$		
	e_1	e_2	e_3	$x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3$		
III.	e_1	e_2	e_1	$(x_1 + x_3) p_1 + x_2 p_2$	$(x_1 + x^3) x_3^2$	Nicht
	0	0	e_2	$x_3 p_2$		
	e_1	e_2	e_3	$x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3$		
IV.	0	0	e_1	$x_3 p_1$	x_3^3	—
	0	0	e_2	$x_3 p_2$		
	e_1	e_2	e_3	$x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3$		
V.	e_2	0	e_1	$x_3 p_1 + x_1 p_2$	x_3^3	—
	0	0	e_2	$x_3 p_2$		
	e_1	e_2	e_3	$x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3$		

Keines dieser 5 Systeme ist überzählig.

Bemerkenswerth ist, dass in allen Δ_x in drei lineare Factoren zerfällt.

Man kann auch unabhängig von der Lie'schen Aufstellung aller Typen von projectiven Gruppen in zwei Variabeln die obigen Systeme bilden. Zunächst kann man zeigen, dass Δ_x wenigstens einen linearen Factor enthält. Es folgt dies aus einem allgemeinen Satze, der im folgenden § 3 abgeleitet wird. Indem man nun x_1, x_2, x_3 als homogene Punktcoordinaten in der Ebene deutet, hat man in $\Delta_x = 0$ die bei der Gruppe invarianten Curvengebilde. Eine invariante Curve ist die durch jenen linearen Factor bestimmte Gerade. Ausser ihr kann noch ein Kegelschnitt oder ein Geradenpaar festbleiben. Ersteres lässt sich als unmöglich nachweisen. Δ_x muss also in drei lineare Factoren zerfallen.

Digitized by Google

Jedenfalls bleibt also eine Gerade invariant. Nehmen wir die Einheitspunkte e_1, e_2 auf ihr an, so können wir als dritten den Modulpunkt ε wählen, der ja nicht $\Delta_x = 0$ macht. Dann ist:

$$e_1 e_3 = e_1 \qquad e_2 e_3 = e_2 \qquad e_3 e_3 = e_3$$
$$e_3 e_1 = e_1 \qquad e_3 e_2 = e_2$$

und die Producte $e_1 e_1$, $e_1 e_2$, $e_2 e_1$, $e_2 e_2$ müssen sich durch Punkte jener Geraden darstellen, d. h. aus e_1 und e_2 ableiten lassen. e_1, e_2 bilden also für sich ein Zahlensystem in 2 Einheiten. Freilich kann dasselbe auch ausgeartet sein (d. h. eine oder beide Determinanten Δ_x und Γ_x können für dasselbe $\equiv 0$ sein). Die Systeme in 2 Einheiten sind aber bekannt und danach auch auf diesem Wege die in 3 Einheiten.

Man findet so in der That wieder obige 5 Typen.

§ 3.

Die Theiler der Null: $\Delta_x = 0$.

Um die aus 4 Einheiten ableitbaren Zahlensysteme zu bilden, bedarf es einer Betrachtung allgemeiner Art über die Zahlen, für welche $\Delta_x = 0$ (oder, was auf dasselbe hinauskommt, $\Gamma_x = 0$) ist und die von Weierstrass die Theiler der Null genannt worden sind.

Wir kehren daher zunächst zum allgemeinen Systeme aus n Einheiten zurück.

Wie zum Schluss des vorigen Paragraphen bedienen wir uns auch hier der geometrischen Deutung:

$x_1 \ldots x_n$ fassen wir als homogene Punktcoordinaten in einem Raume R_n von n^{ter} Stufe auf. Jeder Zahl x entspricht alsdann ein Punkt dieses Raumes R_n und umgekehrt stellt jeder Punkt des Raumes R_n ∞^1 Zahlen des Systems dar, welche alle die Form $\varrho \cdot x$ haben, wo ϱ eine beliebige gewöhnlich-complexe Zahl bezeichnet.

$\Delta_x = 0$ oder, was nach dem Obigen dasselbe ist, $\Gamma_x = 0$, stellt eine bei der Gruppe des Zahlensystems invariante Mannigfaltigkeit $(n-1)^{\text{ter}}$ Stufe und n^{ten} Grades im R_n dar, die allerdings zerfallen kann (wie wir dies im Falle $n = 3$ erkannten).

Mit Hülfe des Früheren, namentlich der Formel (17.) lassen sich leicht die Sätze beweisen:

Digitized by Google

(22.) Das Product zweier Zahlen, deren keine Theiler der Null ist, ist auch nicht Theiler der Null.

(23.) Ist ein Factor eines Productes Theiler der Null, so ist das Product auch Theiler der Null.

(24.) Ist $x \cdot y = 0$ und weder x noch y selbst Null, so sind beide Factoren Theiler der Null.

(25.) Sind $x \cdot y$, $x \cdot z$, $x \cdot u \cdots$ sämmtlich gleich Null, so ist auch jedes Product $x(\lambda y + \mu z + \nu u + \cdots)$, wo $\lambda, \mu, \nu \cdots$ beliebige gewöhnlich-complexe Zahlen bedeuten, gleich Null. Dasselbe gilt, wenn x letzter Factor im Product ist.

Nehmen wir auf dem Gebiet $\Delta_x = 0$ eine Zahl u an und bestimmen wir alle Zahlen v, für welche $uv = 0$ ist, so bilden diese Zahlen v nach (25.) eine ebene Mannigfaltigkeit, welche ganz von Theilern der Null erfüllt wird. Sie sei von ϱ^{ter} Stufe. Man erkennt, dass $\varrho > 0$ sein muss.

Bilden wir nun alle Producte von der Form ux, was wir auch so ausdrücken: uR_n, indem wir sagen, dass u mit allen Punkten des R_n multiplicirt werden soll, so muss sich eine ebene Mannigfaltigkeit ergeben (infolge des distributiven Gesetzes) und zwar, wie man unschwer beweist, eine solche von $(n - \varrho)^{\text{ter}}$ Stufe. Da $u\varepsilon = u$ ist, so gehört derselben u selbst an.

Somit gehören zu jedem Punkte u von Δ_x zwei ebene Mannigfaltigkeiten, deren Stufenzahlen ϱ und $(n - \varrho)$ sich zu n ergänzen. Auch die letztere gehört dem Nullgebiet an (nach (23.)). Also ergiebt sich der

Satz: Jedem Punkte u von $\Delta_x = 0$ ist eine Zahl ϱ zugeordnet derart, dass alle Zahlen v, für die $uv = 0$ ist, auf einer ebenen Mannigfaltigkeit ϱ^{ter} Stufe liegen. Ferner geht durch u eine ebene Mannigfaltigkeit $(n - \varrho)^{\text{ter}}$ Stufe, welche alle Productpunkte ux enthält. Beide Mannigfaltigkeiten sind in Δ_x enthalten. Es ist $0 < \varrho < n$.

Ein ebensolcher Satz gilt, wenn u als zweiter Productfactor gewählt wird.

Digitized by Google

§ 4.

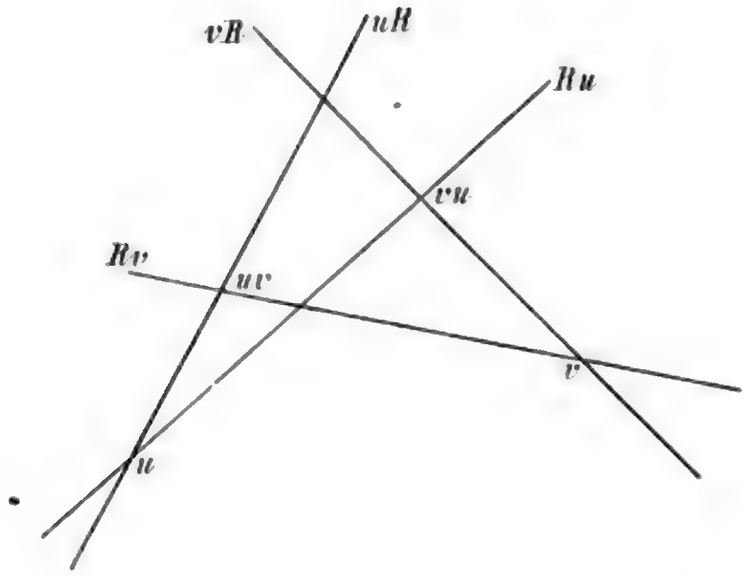
Bestimmung der aus 4 Einheiten gebildeten Systeme, für welche Δ_x keinen linearen Factor hat.

Die Zahlensysteme, welche aus 4 Einheiten gebildet werden, zerfallen in 2 Klassen. Einmal kann bei der betreffenden Gruppe in R_4 eine Ebene invariant bleiben, d. h. Δ_x einen linearen Factor haben; das andere Mal bleiben bei der Gruppe nur krumme Flächen invariant.

Die Systeme der ersteren Art lassen sich auf solche aus 3 Einheiten zurückführen, da die Producte der Punkte in der invarianten Ebene wieder sich als Punkte dieser Ebene darstellen müssen.

Wir wenden uns zur Bestimmung der Systeme der letzteren Art, bei denen also Δ_x keinen linearen Factor besitzt, also $\Delta_x = 0$ keine Ebene enthält (bei der Deutung im R_4, d. h. im gewöhnlichen Raume).

Für einen Punkt u von $\Delta_x = 0$ kann dann die Zahl ϱ unseres Satzes nicht $= 1$ oder $= 3$ sein, d. h. es ist $\varrho = 2$ und daher $n - \varrho = 2$. Multipliciren wir den ganzen R_4 mit einem Theiler der Null u: uR_4, so ergeben sich folglich nur die Punkte einer



Geraden, welche durch u geht. Wir bezeichnen sie als die Gerade uR. Ebenso ergiebt sich eine Gerade Ru durch u, wenn wir u als zweiten Factor benutzen.

Digitized by Google

Da alle Punkte x, für die $ux = 0$ ist, auf einer Geraden liegen und ebenso alle Punkte x, für die $xu = 0$ ist, so giebt es sicher noch Theiler des Null v, für die uv und $vu \neq 0$ sind. Einen solchen wählen wir und construiren die zugehörigen Geraden vR und Rv.

Der Punkt uv liegt sowohl auf uR als auch auf Rv. Diese beiden Geraden schneiden sich also in uv. Ebenso ist vu Schnitt von Ru und vR.

Es fragt sich, ob uR und vR windschief gegen einander sind oder nicht. u und v können auf $\Delta_x = 0$ variiren. Demgemäss giebt es ∞' Geraden uR oder vR. Wenn alle diese Geraden sich schnitten, so müssten sie eine Ebene oder einen Kegel erzeugen. Der erstere Fall ist ausgeschlossen worden. Im letzteren Falle nehmen wir das Coordinatentetraeder so an, dass die von e_4 ausgehenden Kanten dem Kegel angehören. Dann ist jedenfalls

$$e_1^2 = \lambda e_1 + \alpha e_4,\ e_1e_2 = c e_4,\ e_2e_1 = c' e_4,\ e_1e_4 = r e_4,\ e_4e_1 = r' e_4,$$

$$e_2^2 = \mu e_2 + \beta e_4,\ e_2e_3 = a e_4,\ e_3e_2 = a' e_4,\ e_2e_4 = s e_4,\ e_4e_2 = s' e_4,\ e_4^2 = w e_4,$$

$$e_3^2 = \nu e_3 + \gamma e_4,\ e_3e_1 = b e_4,\ e_1e_3 = b' e_4,\ e_3e_4 = t e_4,\ e_4e_3 = t' e_4,$$

wo $\lambda, \mu, \nu \ldots$ gewöhnlich-complexe Zahlen bedeuten. Δ_x aber wäre hier mit den linearen Factoren x_1, x_2, x_3 behaftet, was ausgeschlossen ist.

Mithin können wir annehmen, u und v seien so gewählt, dass uR und vR sich nicht schneiden. Ebenso dürfen wir Ru und Rv als zu einander windschief voraussetzen.

Demnach können die Geraden Ru und uR nicht zusammenfallen, ebenso nicht die Geraden Rv und vR. Die Punkte u, v, uv und vu sind nunmehr die Ecken eines wirklichen Tetraeders, das wir zum Coordinatentetraeder wählen, indem wir setzen:

$$e_1 = u\ ,\quad e_2 = v\ ,\quad e_3 = uv\ ,\quad e_4 = vu\ .$$

u^2 muss auf uR und auf Ru, d. h. in u liegen. Daher ist $u^2 = \alpha u$ und analog $v^2 = \beta v$, wo α, β gewöhnlich-complexe Zahlen bedeuten. Also:

$$e_1e_1 = \alpha e_1\ ,\quad e_2e_2 = \beta e_2\ ,$$

uvu liegt auf uR und Ru, d. h.:

$$uvu = \lambda u \quad \text{und:} \quad vuv = \mu v\ .$$

Digitized by Google

Nun ist

$$(uvu)v = \lambda uv = u(vuv) = \mu uv \ ,$$

$$(vuv)u = \mu vu = v(uvu) = \lambda vu \ ,$$

d. h. $\lambda = \mu$, da $uv \neq 0$ ist. Wir haben daher:

$$e_3 e_1 = \lambda e_1 \ , \quad e_4 e_2 = \lambda e_2 \ ,$$

$$e_1 e_4 = \lambda e_1 \ , \quad e_2 e_3 = \lambda e_3 \ .$$

Ferner ist $u \cdot uv = uu \cdot v = \alpha uv$ u. s. w. So kommt ohne Schwierigkeit:

$$\begin{array}{llll} e_1 e_1 = \alpha e_1 \ , & e_2 e_1 = e_4 \ , & e_3 e_1 = \lambda e_1 \ , & e_4 e_1 = \alpha e_4 \ , \\ e_1 e_2 = e_3 \ , & e_2 e_2 = \beta e_2 \ , & e_3 e_2 = \beta e_3 \ , & e_4 e_2 = \lambda e_2 \ , \\ e_1 e_3 = \alpha e_3 \ , & e_2 e_3 = \lambda e_2 \ , & e_3 e_3 = \lambda e_3 \ , & e_4 e_3 = \alpha\lambda e_2 \ , \\ e_1 e_4 = \lambda e_1 \ , & e_2 e_4 = \beta e_4 \ , & e_3 e_4 = \beta\lambda e_1 \ , & e_4 e_4 = \lambda e_4 \ . \end{array}$$

Das associative Gesetz ist hierin erfüllt. Die Determinante hat den Werth

$$\Delta_x = (\lambda - \alpha\beta)^2 (x_1 x_2 - \lambda x_3 x_4)^2$$

und also muss $\lambda \neq \alpha\beta$ sein. Die Theiler der Null liegen auf einer Fläche zweiten Grades. Da diese nach Voraussetzung nicht in Ebenen zerfallen darf, so muss $\lambda \neq 0$ sein.

Der Modul des Systems ist

$$\varepsilon = \frac{1}{\lambda - \alpha\beta} (-\beta e_1 - \alpha e_2 + e_3 + e_4) \ .$$

Zu ε gehört ein Polarkegelschnitt auf der Fläche 2. Grades. Auf diesem Kegelschnitt wählen wir e_1 und e_2. Dann muss $\alpha = \beta = 0$ sein. Nunmehr führen wir als Einheiten die Ecken eines Polartetraeders ein, das von ε ausgeht. Die neuen Einheiten seien

$$\bar{e}_1 = \varepsilon = \frac{1}{\lambda} (e_3 + e_4) \ , \quad \bar{e}_3 = \sqrt{\frac{i}{\lambda}} (e_1 + i e_2) \ ,$$

$$\bar{e}_2 = \frac{i}{\lambda} (e_3 - e_4) \ , \quad \bar{e}_4 = i\sqrt{\frac{i}{\lambda}} (e_1 - i e_2) \ .$$

Alsdann lautet das System, wenn die neuen Einheiten nun durch e_1, e_2, e_3, e_4 selbst bezeichnet worden:

Digitized by Google

$$
\begin{array}{llll}
e_1e_1 = e_1\,, & e_2e_1 = e_2\,, & e_3e_1 = e_3\,, & e_4e_1 = e_4\,,\\
e_1e_2 = e_2\,, & e_2e_2 = -e_1\,, & e_3e_2 = -e_4\,, & e_4e_2 = e_3\,,\\
e_1e_3 = e_3\,, & e_2e_3 = e_4\,, & e_3e_3 = -e_1\,, & e_4e_3 = -e_2\,,\\
e_1e_4 = e_4\,, & e_2e_4 = -e_3\,, & e_3e_4 = e_2\,, & e_4e_4 = -e_1\,.
\end{array}
$$

Es ist dies das System der *Quaternionen von* Hamilton. Seine Determinante ist

$$\Delta_x = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2\,.$$

Die zugehörige Gruppe lautet

$$
\begin{array}{l}
x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4\,,\\
-x_2p_1 + x_1p_2 + x_4p_3 - x_3p_4\,,\\
-x_3p_1 - x_4p_2 + x_1p_3 + x_2p_4\,,\\
-x_4p_1 + x_3p_2 - x_2p_3 + x_1p_4\,.
\end{array}
$$

SITZUNG VOM 1. JULI 1889.

A. Mayer, *Ueber die Maxima und Minima impliciter Functionen und die Reciprocitätsgesetze in der Theorie des gewöhnlichen Maximums und Minimums.*

Von den, in den Problemen des gewöhnlichen Maximums und Minimums zu Tage tretenden Reciprocitätsgesetzen ist bisher wohl immer nur das der isoperimetrischen Probleme besonders hervorgehoben, aber, soviel ich weiss, in seiner ganzen Ausdehnung auch noch nicht vollständig bewiesen worden. Es dürfte daher nicht uninteressant sein, zu zeigen, wie alle diese reciproken Sätze, wenigstens alle mir bekannten, unmittelbar aus der Theorie des Maximums und Minimums impliciter Functionen entspringen. Dabei kann man zwei verschiedene Wege einschlagen, die Aufgaben nämlich ebensowohl als Probleme des absoluten, wie auch als solche des relativen Maximums und Minimums behandeln. Der erste Weg ist im Grunde allgemeiner; ich ziehe trotzdem aber den zweiten vor, weil er einerseits klarer erscheint und andererseits die Resultate auch gleich in derjenigen Form liefert, die sich für die Anwendungen am bequemsten eignet.

§ 1.

Die Maxima und Minima impliciter Functionen.

Die allgemeine Aufgabe, die hier betrachtet werden soll, ist folgende:

Man sucht unter allen Werthsystemen der $n+1$ *Variabeln* $x_0\, x_1 \ldots x_n$, *welche* $r+1$ *gegebene, von einander unabhängige Bedingungsgleichungen:*

Digitized by Google

(1.) $\varphi_0 = 0\ ,\quad \varphi_1 = 0\ ,\ \cdots\ ,\quad \varphi_r = 0\ ,\quad r < n\ ,$

erfüllen, diejenigen, in welchen die Variable x_0 selbst einen grössten oder kleinsten Werth besitzt, wobei es sich selbstverständlich immmer nur um solche Maximums- oder Minimums-Stellen $x_0\ x_1 \ldots x_n$ handelt, in deren Umgebung die Functionen φ sich regulär verhalten.

Nun geht das allgemeine Problem des relativen Maximums und Minimums »unter allen Werthen, welche eine gegebene Function f von $x_0\ x_1 \ldots x_n$ anzunehmen vermag, während ihre Variabeln den Bedingungen (1.) unterworfen sind, die grössten und die kleinsten zu finden« in die vorliegende Aufgabe über, sobald man f sich auf x_0 reduciren lässt.

Nach der Theorie des relativen Max. und Min.[1]) hat man daher, um die Aufgabe zu lösen, mit dem Ausdrucke:

$$\Phi \equiv x_0 + \lambda_0 \varphi_0 + \lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_r \varphi_r$$

die $n + 1$ Gleichungen zu bilden:

$$(2.)\quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_0} \equiv 1 + \lambda_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_0} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} + \cdots + \lambda_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_0} = 0\ ,$$

$$(3.)\quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_h} \equiv \lambda_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_h} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_h} + \cdots + \lambda_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_h} = 0\ ,$$

$$h = 1, 2, \cdots n\ ,$$

und aus ihnen und den $r + 1$ gegebenen Gleichungen (1.) die $n + 1 + r + 1$ Unbekannten

$$x_0\ x_1 \cdots x_n\ \lambda_0\ \lambda_1 \cdots \lambda_r$$

zu bestimmen.

Jedes System reeller Auflösungen der Gleichungen (1.), (2.), (3.), für welches die $r + 1$ Bedingungsgleichungen zwischen den Variationen $\delta x_0\, \delta x_1 \cdots \delta x_n$:

$$(4.)\quad \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial x_0} \delta x_0 + \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial x_1} \delta x_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial x_n} \delta x_n = 0\ ,$$

$$\varrho = 0, 1, \cdots r\ ,$$

von einander unabhängig bleiben, beziehungsweise auch jedes Werthsystem $x_0\ x_1 \cdots x_n$, das einem solchen System von Auf-

1) Vergl. dieses Heft p. 129.

Digitized by Google

lösungen angehört, will ich kurzweg eine *Lösung* der vorgelegten Aufgabe nennen. Unter Umständen können in einer solchen Lösung eine oder mehrere der Unbekannten x willkürlich bleiben. Auf jeden Fall aber gehören, sobald man nur eventuell die unbestimmt gebliebenen x als fest gegeben betrachtet, einer jeden Lösung stets vollständig bestimmte Werthe der Multiplicatoren λ zu.

Eine Lösung entspricht ferner sicher einem Maximum oder Minimum des Problems, oder sicher keinem solchen, jenachdem für dieselbe die zweite Variation von x_0:

$$\delta^2 x_0 = \sum_0^n{}' \sum_i \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_h \partial x_i} \delta x_h \delta x_i$$

in Folge der $r+1$ Bedingungsgleichungen (4.) definit oder indefinit ausfällt, wobei jedoch[1]) die Variationen der etwa willkürlich gebliebenen x gleich Null zu setzen sind.

Multiplicirt man aber die Bedingungsgleichung (4.) mit dem Werthe von λ_ϱ, der der betrachteten Lösung zugehört, und summirt hierauf nach ϱ, so erhält man nach (2.) und (3.) die Bedingung

$$\delta x_0 = 0 \ ,$$

die man auch unmittelbar hätte voraussagen können, da ja δx_0 nichts anderes ist, als die erste Variation derjenigen Function x_0, die einen grössten oder kleinsten Werth erreichen soll.

Die Bedingungsgleichungen (4.) reduciren sich hiernach auf die Gleichung $\delta x_0 = 0$ und auf r von den $r+1$ Gleichungen:

$$\frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial x_2} \delta x_2 + \cdots + \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial x_n} \delta x_n = 0 \ , \tag{5.}$$

von denen wegen der n Gleichungen (3.) eine eben eine blosse Folge der r übrigen wird, und zugleich reducirt sich die zweite Variation von x_0 auf:

$$\delta^2 x_0 = \sum_1^n{}' \sum_i \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_h \partial x_i} \delta x_h \delta x_i \ , \tag{6.}$$

sodass also ein reguläres Maximum oder Minimum nur davon

1) Vergl. diese Berichte 1881 p. 47.

Digitized by Google

abhängt, wie sich für die betreffende Lösung diese ganze homogene Function zweiten Grades von $\delta x_1 \dots \delta x_n$ unter den Bedingungen (5.) verhält.

§ 2.

Das allgemeine Reciprocitätsgesetz.

Nimmt man nunmehr an, dass in den gegebenen Functionen $\varphi_0\, \varphi_1 \dots \varphi_r$ ausser den Variabeln $x_0\, x_1 \dots x_n$ selbst *noch wenigstens eine unbestimmte Constante* y_0 vorkomme, so kann man auch umgekehrt x_0 als unbestimmte Constante und y_0 als diejenige implicite Function der Variabeln $x_1 \dots x_n$ betrachten, welche unter den Bedingungen (1.) einen grössten oder kleinsten Werth erreichen soll. Man kann also dann dem eben gelösten Probleme:

(A.) $$x_0 = Max., Min., \quad y_0 = const.$$

das folgende gegenüberstellen:

(A'.) $$y_0 = Max., Min., \quad x_0 = const.$$

Nach dem Vorhergehenden wird dies neue Problem durch die $n + 1$ Gleichungen gelöst:

$$(2'.) \qquad 1 + \mu_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial y_0} + \mu_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} + \cdots + \mu_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial y_0} = 0 \ ,$$

$$(3'.) \qquad \mu_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_h} + \mu_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_h} + \cdots + \mu_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_h} = 0 \ ,$$

$$h = 1, 2, \cdots n \ ,$$

denen wiederum die, beiden Problemen gemeinsamen Bedingungsgleichungen (1.) hinzuzufügen sind.

Die Gleichungen (3'.) sind aber bis auf die Bezeichnung der Multiplicatoren identisch mit den Gleichungen (3.). Daher ergeben sich aus den $r + 1 + n$ Gleichungen (1.) und (3.) für:

$$x_0\, x_1 \cdots x_n \text{ und etwa } \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \frac{\lambda_2}{\lambda_0} \cdots \frac{\lambda_r}{\lambda_0}$$

dieselben, von y_0 abhängigen Werthe, welche auch die Gleichungen (1.) und (3'.) für:

$$x_0\, x_1 \cdots x_n \text{ und } \frac{\mu_1}{\mu_0} \frac{\mu_2}{\mu_0} \cdots \frac{\mu_r}{\mu_0}$$

liefern. Dagegen erhält μ_0 im Problem (A'.) einen anderen

Digitized by Google

Werth als λ_0 im Problem (A.). Denn μ_0 bestimmt sich aus (2'.), λ_0 aber aus der hiervon verschiedenen Gleichung (2.).

In (A.) wie in (A'.) sind aber die λ und μ nur Hülfsgrössen. Hat man also irgend eine Lösung:

$$(7.) \qquad x_0 = X_0(y_0)\ , \quad x_1 = X_1(y_0)\ , \quad \cdots\ , \quad x_n = X_n(y_0)$$

des Problems (A.) gefunden, in welcher der Werth von x_0 nicht gerade frei von y_0 geworden ist, so erhält man daraus sofort eine correspondirende Lösung:

$$(7'.) \qquad y_0 = Y_0(x_0)\ , \quad x_1 = Y_1(x_0)\ , \quad \cdots\ , \quad x_n = Y_n(x_0)$$

des Problems (A'.), wenn man die erste Gleichung (7.) nach y_0 auflöst und die Auflösung in die übrigen Gleichungen (7.) einsetzt, und für diese zusammengehörigen Lösungen beider Probleme wird:

$$(8.) \qquad \frac{\mu_1}{\mu_0} = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\ , \ \cdots\ , \frac{\mu_r}{\mu_0} = \frac{\lambda_r}{\lambda_0}\ .$$

Setzt man daher:

$$\Psi \equiv \varphi_0 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\varphi_1 + \cdots + \frac{\lambda_r}{\lambda_0}\varphi_r\ ,$$

so werden nach (6.) für diese beiden Lösungen die zweiten Variationen von x_0 im Problem (A.) und von y_0 im Problem (A'.):

$$\delta^2 x_0 = \lambda_0 \sum_1^n{}_h \sum_1^n{}_i \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_h \partial x_i}\, \delta x_h \delta x_i$$

und:

$$\delta^2 y_0 = \mu_0 \sum_1^n{}_h \sum_1^n{}_i \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_h \partial x_i}\, \delta x_h \delta x_i\ ,$$

und beide Male bestehen zwischen den Variationen $\delta x_1 \ldots \delta x_n$ dieselben Bedingungsgleichungen (5.), daher wird:

$$\frac{\delta^2 x_0}{\delta^2 y_0} = \frac{\lambda_0}{\mu_0}$$

und es hat folglich $\delta^2 y_0$ jeder Zeit dasselbe oder das entgegengesetzte Zeichen von $\delta^2 x_0$, jenachdem

$$\frac{\lambda_0}{\mu_0} > 0 \quad \text{oder} \quad < 0 \text{ ist.}$$

Digitized by Google

Ueberdies kann der Ausnahmefall $\frac{\lambda_0}{\mu_0} = 0$ nicht eintreten. Zunächst nämlich folgt aus (2'.) und (8.)

$$1 + \mu_0 \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y_0} + \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} + \cdots + \frac{\lambda_r}{\lambda_0} \frac{\partial \varphi_r}{\partial y_0} \right) = 0 ,$$

also:

$$(9.) \qquad \frac{\lambda_0}{\mu_0} = - \left(\lambda_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial y_0} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} + \cdots + \lambda_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial y_0} \right) .$$

Andrerseits erhält man für die Auflösungen $x_0 x_1 \ldots x_n \lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_r$ der Gleichungen (1.), (2.), (3.) aus den Gleichungen (1.) durch Differentiation nach y_0:

$$\frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y_0} + \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial x_0} \frac{dx_0}{dy_0} + \sum_1^n{}_h \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial x_h} \frac{dx_h}{dy_0} = 0$$

und folglich:

$$\sum_0^r{}_\varrho \lambda_\varrho \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y_0} + \frac{dx_0}{dy_0} \sum_0^r{}_\varrho \lambda_\varrho \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial x_0} + \sum_1^n{}_h \frac{dx_h}{dy_0} \sum_0^r{}_\varrho \lambda_\varrho \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial x_h} = 0 ,$$

d. i. aber nach (2.) und (3.):

$$(10.) \qquad \lambda_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial y_0} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} + \cdots + \lambda_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial y_0} = \frac{dx_0}{dy_0} .$$

Daher ist $\frac{\lambda_0}{\mu_0}$ immer verschieden von Null, es sei denn, dass in der erhaltenen Lösung des Problems (A.) der Werth von x_0 unabhängig von y_0 wäre.

Man erkennt ohne Weiteres, dass alles Vorhergehende auch dann noch Geltung behält, wenn in der betrachteten Lösung des Problems (A.) ein Theil der Unbekannten $x_1 \ldots x_n$ unbestimmt geblieben sein sollte, und hat somit den folgenden *allgemeinen Reciprocitätssatz* gewonnen:

I. *Zwischen den $n+1$ Variabeln $x_0 x_1 \ldots x_n$ sind vorgeschrieben $r+1$ von einander unabhängige Bedingungsgleichungen:*

$$\varphi_0 = 0 , \quad \varphi_1 = 0 , \cdots , \varphi_r = 0 , \quad r < n ,$$

in denen neben diesen Variabeln noch wenigstens ein unbestimmter Parameter y_0 vorkommt.

Digitized by Google

Hat man dann irgend eine Lösung des Problems

(A.) $$x_0 = Max.,\ Min.,\ y_0 = const.$$

gefunden, und ist der Werth

$$x_0 = X_0(y_0)\ ,$$

den x_0 in dieser Lösung erhält, nicht gerade unabhängig von y_0, so verwandelt sich dieselbe, sobald man darin für y_0 den Werth

$$y_0 = Y_0(x_0)$$

setzt, der sich durch Auflösung der Gleichung $X_0(y_0) = x_0$ ergiebt, in eine Lösung des reciproken Problems:

(A'.) $$y_0 = Max.,\ Min.,\quad x_0 = const.\ ,$$

und diese beiden, einander entsprechenden Lösungen verhalten sich in Betreff des Maximums und Minimums folgendermassen:

Ist $x_0 = X_0(y_0)$ weder Maximum noch Minimum im Problem (A.), *so gilt dasselbe im Problem* (A'.) *auch von $y_0 = Y_0(x_0)$.*

Wenn dagegen

$$x_0 = X_0(y_0) \quad \textit{ein Max., resp. Min.,}$$

im Problem (A.) *ist, so ist zugleich*

$$y_0 = Y_0(x_0) \quad \textit{ein Max. resp. Min.,}$$
$$\textit{oder} \qquad \textit{ein Min. resp. Max.}$$

im Problem (A'.), *jenachdem der Differentialquotient*

$$\frac{dX_0}{dy_0}$$

oder, was, wenn man das Problem (A.) *mit Hülfe der $n+1$ Gleichungen*

$$1 + \lambda_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_0} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} + \cdots + \lambda_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_0} = 0\ ,$$

$$\lambda_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_h} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_h} + \cdots + \lambda_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_h} = 0\ ,$$

$$h = 1\ ,\ 2\ ,\ \cdots\ n\ ,$$

gelöst hat, dasselbe besagt, jenachdem für die erhaltene Lösung die Summe:

$$S = \lambda_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial y_0} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} + \cdots + \lambda_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial y_0}$$

einen negativen oder einen positiven Werth besitzt.

Digitized by Google

§ 3.

Die Reciprocitätsgesetze inverser Functionen und der isoperimetrischen Probleme.

Indem man die Formen der Bedingungsgleichungen (1.) specialisirt, kann man aus dem allgemeinen Satze I eine ganze Reihe besonderer Reciprocitätssätze ableiten, von denen ich hier nur die beiden folgenden hervorheben will.

Nimmt man zunächst

$$\varphi_0 \equiv x_0 - f_0(x_1 \cdots x_n y_0)$$

und für $\varkappa > 0$

$$\varphi_\varkappa \equiv f_\varkappa(x_1 \cdots x_n) \ ,$$

so erhält man aus I. sofort den folgenden Satz, welcher die reciproken Beziehungen zwischen den Max. und Min. *inverser Functionen* auseinandersetzt.

II. *Es sei:*

$$y_0 = F_0(x_1 \cdots x_n \, x_0)$$

die Auflösung der Gleichung:

$$f_0(x_1 \cdots x_n \, y_0) = x_0 \ ,$$

überdies seien die Variabeln $x_1 \cdots x_n$ entweder unabhängig oder aber irgend $r < n$ gegebenen, von x_0 und y_0 freien Bedingungsgleichungen unterworfen.

Kennt man dann irgend eine Lösung des Problems:

(A.) $$f_0 = Max., \ Min., \ y_0 = const.,$$

der ein, nicht gerade von y_0 unabhängiger Werth $X_0(y_0)$ von f_0 zugehört, so erhält man aus dieser Lösung, sobald man darin für y_0 die Auflösung

$$y_0 = Y_0(x_0) \text{ der Gleichung } X_0(y_0) = x_0$$

substituirt, eine correspondirende Lösung des reciproken Problems:

(A'.) $$F_0 = Max., \ Min., \ x_0 = const. \ ,$$

welche der Function F_0 den Werth $Y_0(x_0)$ ertheilt.

War $f_0 = X_0(y_0)$ kein Maximum, Minimum in (A.), *so ist auch $F_0 = Y_0(x_0)$ kein Maximum, Minimum in* (A'.).

War aber $f_0 = X_0(y_0)$ ein Maximum, resp. Minimum in (A.), *so ist, jenachdem für die betrachtete Lösung des Problems* (A.):

Digitized by Google

$$\frac{dY_0}{dy_0} \equiv \frac{\partial f_0}{\partial y_0}$$

einen negativen oder einen positiven Werth besitzt, gleichzeitig auch $F_0 = Y_0(x_0)$ *ein Maximum resp. Minimum oder umgekehrt ein Minimum resp. Maximum in* (A'.). —

Nimmt man dagegen

$$\varphi_0 \equiv x_0 - f_0(x_1 \cdots x_n) ,$$
$$\varphi_1 \equiv f_1(x_1 \cdots x_n) - y_0 ,$$

und für $\varkappa > 1$

$$\varphi_\varkappa \equiv f_\varkappa(x_1 \cdots x_n) ,$$

so wird:

$$S = -\lambda_1 ,$$

und die Gleichungen (2.) und (3.) reduciren sich auf:

$$1 + \lambda_0 = 0 ,$$
$$-\lambda_0 \frac{\partial f_0}{\partial x_h} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_h} + \cdots + \lambda_r \frac{\partial f_r}{\partial x_h} = 0 ,$$

d. i. auf:

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_h} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_h} + \cdots + \lambda_r \frac{\partial f_r}{\partial x_h} = 0 .$$

Schreibt man daher der Symmetrie halber noch a_0 und a_1 für x_0 und y_0, so verwandelt sich Satz I. in das *Reciprocitätsgesetz der isoperimetrischen Probleme:*

III. *Es seien* $f_0 f_1 \ldots f_r$, $(r < n)$, $r+1$ *gegebene unabhängige Functionen der n Variabeln* $x_1 x_2 \ldots x_n$, *dagegen* a_0 *und* a_1 *unbestimmte, in diesen Functionen selbst nicht vorkommende Constanten, und man habe mittelst der n Gleichungen:*

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_h} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_h} + \cdots + \lambda_r \frac{\partial f_r}{\partial x_h} = 0 ,$$
$$h = 1, 2, \cdots n ,$$

irgend eine Lösung des isoperimetrischen Problems gewonnen:

(A.) $\quad f_0 = Max., Min., \; f_1 = a_1 , \; f_2 = 0 , \cdots , f_r = 0 .$

Hat dann in dieser Lösung f_0 *den von* a_1 *abhängigen Werth*

$$f_0 = A_0(a_1)$$

Digitized by Google

erhalten, so braucht man nur für a_1 die Auflösung

$$a_1 = A_1(a_0) \text{ der Gleichung } A_0(a_1) = a_0$$

zu setzen, um die Lösung überzuführen in eine entsprechende Lösung des reciproken isoperimetrischen Problems:

(A'.) $\quad f_0 = a_0\,,\ f_1 = Max.,\ Min.,\ f_2 = 0\,,\ \cdots,\ f_r = 0\,,$

für welche f_1 den Werth $A_1(a_0)$ annimmt.

Ist $f_0 = A_0(a_1)$ kein Maximum, Minimum in (A.), *so ist auch $f_1 = A_1(a_0)$ kein Maximum in* (A'.)

Ist aber

$$f_0 = A_0(a_1) \text{ ein } Max., Min.$$

in (A.), *so ist zu gleicher Zeit auch in* (A'.)

$$f_0 = A_1(a_0) \text{ ein } Max. \text{ resp. } Min.\,,$$
$$\text{oder} \qquad \text{ein } Min. \text{ resp. } Max.\,,$$

jenachdem $\left(-\frac{dX_0}{da_1}\right.$ *d. i. jenachdem) in der erhaltenen Lösung des Problems* (A.).

$$\lambda_1 > 0 \text{ oder } < 0 \text{ war.} -$$

Um keinen Zweifel darüber zu lassen, wie diese Sätze gemeint sind, erläutere ich noch den letzten Satz an dem einfachen Beispiele:

(A.)
$$\begin{cases} f_0 \equiv x_1 x_2 \cdots x_n = Max., Min., \\ f_1 \equiv x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a_1\,. \end{cases}$$

Setzt man

$$\Phi \equiv x_1 x_2 \cdots x_n + \lambda_1 (x_1 + x_2 + \cdots + x_n - a_1)\,,$$

so wird diese Aufgabe gelöst durch die n Gleichungen:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_h} \equiv \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{x_h} + \lambda_1 = 0\,,$$

und diese liefern verbunden mit der isoperimetrischen Bedingung $f_1 = a_1$ die Werthe:

(a.) $\quad x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x = \frac{a_1}{n}\,, \quad \lambda_1 = -x^{n-1}\,.$

Für diese Lösung wird

Digitized by Google

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_h^2} = 0 , \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_h \partial x_i} \equiv \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{x_h x_i} = x^{n-2}$$

und daher die zweite Variation von f_0 in unserer Aufgabe:

$$\delta^2 f_0 = \sum_1^n \sum_i \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_h \partial x_i} \delta x_h \delta x_i = x^{n-2} \left[\left(\sum_1^n {}_h \delta x_h \right)^2 - \sum_1^n {}_h (\delta x_h)^2 \right].$$

Aus $f_1 = a_1$ aber ergiebt sich die Bedingung: $\sum_h \delta x_h = 0$, also bleibt nur:

$$(\beta.) \qquad \delta^2 f_0 = - x^{n-2} \sum_1^n {}_h (\delta x_h)^2 ,$$

sodass $\delta^2 f_0$ definit wird und das entgegengesetzte Zeichen von x^{n-2} erhält.

Durch Substitution der Werthe $(\alpha.)$ geht nun die Gleichung $f_0 = a_0$ über in:

$$(\gamma.) \qquad \left(\frac{a_1}{n} \right)^n = a_0 ,$$

welche $\frac{a_1}{n} = a_0^{\frac{1}{n}}$ ergiebt.

Das reciproke isoperimetrische Problem:

$$(\mathrm{A}'.) \qquad \begin{cases} f_0 \equiv x_1 x_2 \cdots x_n = a_0 , \\ f_1 \equiv x_1 + x_2 + \cdots + x_n = Max., \; Min., \end{cases}$$

besitzt demnach die Lösung

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x = a_0^{\frac{1}{n}} ,$$

und durch diese erhält f_1 den Werth $a_1 = n a_0^{\frac{1}{n}}$.

Nach $(\alpha.)$, $(\beta.)$, $(\gamma.)$ wird ferner, so lange $a_1 > 0$ ist,

$$x > 0 , \quad \lambda_1 < 0 , \quad \delta^2 f_0 < 0 , \quad a_0 > 0 .$$

Für $a_1 < 0$ dagegen wird $x < 0$ und,

$$\text{falls } n = 2\varkappa , \; \lambda_1 > 0 , \; \delta^2 f_0 < 0 , \; a_0 > 0 ,$$
$$\text{» } n = 2\varkappa + 1 , \; \lambda_1 < 0 , \; \delta^2 f_0 > 0 , \; a_0 < 0 .$$

Man hat somit folgendes Resultat:

Beide Aufgaben (A.) und (A'.) werden gelöst durch:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x .$$

Digitized by Google

Es wird aber

in (A.), $x = \frac{a_1}{n}$, $f_0 = \left(\frac{a_1}{n}\right)^n$	in (A'.), $x = a_0^{\frac{1}{n}}$, $f_1 = n a_0^{\frac{1}{n}}$
und für $a_1 > 0$:	$a_0 > 0$
$f_0 = Max.$,	$f_1 = Min.$,
für $a_1 < 0$ und $n = 2\varkappa$:	$a_0 > 0$
$f_0 = Max.$,	$f_1 = Max.$,
für $a_1 < 0$ und $n = 2\varkappa + 1$:	$a_0 < 0$
$f_0 = Min.$,	$f_1 = Max.$ —

Um endlich auch anzudeuten, wie einfach sich in vielen Fällen die Anwendung des Satzes III. gestaltet, mögen F und U Fläche und Umfang eines Polygons bezeichnen. Dann sind F und U homogene Functionen zweiter und erster Ordnung der Coordinaten der Ecken des Polygons, und wenn ξ irgend eine dieser Coordinaten bedeutet, so führt die Aufgabe: $F = Max.$, $U = const.$ auf die Gleichungen:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} + \lambda_1 \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0 .$$

Diese aber ergeben, mit ξ multiplicirt und addirt:

$$2F + \lambda_1 U = 0 ,$$

folglich, weil F und U positiv sind, $\lambda_1 < 0$; woraus, da es von vornherein evident ist, dass die Aufgabe ein wirkliches Maximum zulassen muss, nach III. unmittelbar der bekannte Satz hervorgeht: Das grösste n-Eck von gegebenem Umfange ist zugleich auch dasjenige, welches bei gegebener Fläche den kleinsten Umfang besitzt. —

Nachträgliche Berichtigung zu dem Aufsatze p. 122—144.

Pag. 137 ist der Z. 4 v. u. beginnende Satz durch den folgenden zu ersetzen: Diese letzte Bedingung verlangt, dass die der x-Axe zugekehrten Winkel ψ_0 und ψ_1, welche die Endradien des Bogens mit den Lothen bilden, nicht stumpf seien, . .

und pag. 138 Z. 5 v. o. statt: »All' dieses gilt auch dann noch« zu lesen: Diese Formeln und Bedingungen bleiben auch dann noch gültig, . .

Digitized by Google

Sophus Lie, *Ueber irreducible Berührungstransformationsgruppen.*

Eine infinitesimale Berührungstransformation der zx-Ebene besitzt, wenn

$$dz - ydx = 0$$

gesetzt wird, die Form

$$\delta x = -\frac{\partial W}{\partial y}\delta t, \quad \delta z = \left(W - y\frac{\partial W}{\partial y}\right)\delta t, \quad \delta y = \left(\frac{\partial W}{\partial x} + y\frac{\partial W}{\partial z}\right)\delta t,$$

so dass

$$[Wf] - W\frac{\partial f}{\partial z}$$

ihr allgemeines Symbol ist.

Die Grössen z, x, y sind *Coordinaten eines Linienelements der zx-Ebene*; sie können aber auch als *Punktcoordinaten in einem dreifach ausgedehnten Raume* x, y, z gedeutet werden. Bei dieser letzten Auffassung ordnet die PFAFF'sche Gleichung $dz - ydx = 0$ jedem Punkte des Raumes x, y, z ein Büschel von Richtungen dx, dy, dz zu. Diese ∞^1 Richtungen bilden eine einfach ausgedehnte ebene Mannigfaltigkeit, welche in der zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit *aller* Richtungen dz, dx, dy durch den betreffenden Punkt enthalten ist.

Eine Gruppe von Berührungstransformationen der zx-Ebene lässt sich ohne weiteres als eine Gruppe von Punkttransformationen des Raumes x, y, z deuten. Greift man nun unter den Transformationen dieser letzten Gruppe diejenigen heraus, welche einen gewissen Punkt x_0, y_0, z_0 allgemeiner Lage invariant

Digitized by Google

lassen, so erhält man eine Untergruppe, deren Transformationen alle ∞^2 Richtungen dx, dy, dz des Punktes x_0, y_0, z_0 durch eine *projective* Gruppe transformiren. Es leuchtet andererseits ein, dass die ∞^1 Richtungen dx, dy, dz des dem Punkte x_0, y_0, z_0 zugeordneten invarianten Büschels $dz - y_0 dx = 0$ durch eine *projective* Gruppe γ transformirt werden. Hat diese letzte projective Gruppe drei wesentliche Parameter, so enthält das Büschel $dz - y_0 dx = 0$ keine invariante Richtung, und also ist die ursprüngliche Berührungstransformationsgruppe der zx-Ebene *irreducibel*. Enthält dagegen die projective Gruppe γ des Büschels $dz - y_0 dx = 0$ weniger als drei wesentliche Parameter, so bleibt mindestens eine Richtung des Büschels in Ruhe; alsdann ist die gegebene Berührungstransformationsgruppe der zx-Ebene *reducibel*.

Ausgehend von diesen Betrachtungen gelang es mir schon 1874 alle irreducibeln Berührungstransformationsgruppen der zx-Ebene zu bestimmen [1]). Eine derartige Gruppe enthält sechs, sieben oder zehn wesentliche Parameter. Im ersten Falle können die Veränderlichen derart gewählt werden, dass die charakteristischen Functionen W der Gruppe die Form:

(A.) $$\boxed{1,\ x,\ y,\ x^2,\ xy,\ y^2}$$

erhalten; die zugehörigen infinitesimalen Transformationen:

$$p,\ q + xr,\ r,\ xq + \tfrac{1}{2}x^2 r,\ xp - yq,\ yp + \tfrac{1}{2}y^2 r$$

$$\left(p = \frac{\partial f}{\partial x},\quad q = \frac{\partial f}{\partial y},\quad r = \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

erzeugen eine *zusammengesetzte* Gruppe mit den beiden invarianten Untergruppen: r und: $p,\ q + xr,\ r$.

Alle *siebengliedrigen* irreducibeln Berührungstransformationsgruppen der zx-Ebene sind unter einander ähnlich; nach passender Coordinatenwahl erhalten die charakteristischen Functionen einer solchen Gruppe die Form:

(B.) $$\boxed{1,\ x,\ y,\ x^2,\ xy,\ y^2,\ z - \tfrac{1}{2}xy}\ .$$

Die entsprechenden infinitesimalen Transformationen:

---

1) Göttinger Nachrichten, December 1874; Archiv for Mathematik, Christiania 1878 und 1879.

$$p,\ q+xr,\ r,\ xq+\tfrac{1}{2}x^2r,\ xp-yq\ ,$$
$$yp+\tfrac{1}{2}y^2r,\quad xp+yq+2zr$$

erzeugen eine zusammengesetzte Gruppe, welche die Gruppe (B.) als invariante Untergruppe enthält.

Die zehngliedrigen irreducibeln Berührungstransformationsgruppen der zx-Ebene sind ebenfalls unter einander ähnlich; ihre charakteristischen Functionen können die Form

(C.)
$$\boxed{\begin{array}{c} 1,\ x,\ y,\ x^2,\ xy,\ y^2,\ z-\tfrac{1}{2}xy\ , \\ x(z-\tfrac{1}{2}xy),\ \ y(z-\tfrac{1}{2}xy),\ \ (z-\tfrac{1}{2}xy)^2 \end{array}}$$

erhalten.

Die infinitesimalen Transformationen dieser Berührungstransformationsgruppe besitzen die Form:

$$p,\ q+xr,r,xq+\tfrac{1}{2}x^2r,\ xp-yq,\ yp+\tfrac{1}{2}y^2r,\ xp+yq+2zr,$$
$$(z-xy)p-\tfrac{1}{2}y^2q-\tfrac{1}{2}xy^2r,\quad \tfrac{1}{2}x^2p+zq+xzr\ ,$$
$$(xz-\tfrac{1}{2}x^2y)\,p+(yz-\tfrac{1}{2}xy^2)\,q+(z^2-\tfrac{1}{4}x^2y^2)r\ .$$

Wünscht man alle invarianten Untergruppen dieser Gruppe zu finden, so combinirt man die allgemeine infinitesimale Transformation der zehngliedrigen Gruppe (C.) der Reihe nach mit den infinitesimalen Transformationen:

$$p,\ r,\ q+xr$$

und erkennt hierdurch, dass jede invariante Untergruppe eine infinitesimale Transformation von der Form (B.), ja sogar eine infinitesimale Transformation von der Form:

$$\alpha r+\beta p+\gamma(q+xr)$$

enthalten muss. Hieraus ergiebt sich sogleich, dass die betreffende invariante Untergruppe alle zehn infinitesimalen Transformationen (C.) enthält, dass also *die Gruppe* (C.) *einfach ist.*

In den neuen Veränderlichen

$$\mathfrak{z}=z-\tfrac{1}{2}xy,\quad \mathfrak{x}=x,\quad \mathfrak{y}=\tfrac{1}{2}y$$

erhalten die infinitesimalen Transformationen der Gruppe (C.) die Form:

$$\mathfrak{p}-\mathfrak{y}\mathfrak{r},\ \mathfrak{q}+\mathfrak{x}\mathfrak{r},\ \mathfrak{r},\ \mathfrak{x}\mathfrak{q},\ \mathfrak{x}\mathfrak{p}-\mathfrak{y}\mathfrak{q},\ \mathfrak{y}\mathfrak{p},\ \mathfrak{x}\mathfrak{p}+\mathfrak{y}\mathfrak{q}+2\mathfrak{z}\mathfrak{r}\ ,$$
$$\mathfrak{z}\mathfrak{p}-\mathfrak{y}(\mathfrak{x}\mathfrak{p}+\mathfrak{y}\mathfrak{q}+\mathfrak{z}\mathfrak{r}),\ \mathfrak{z}\mathfrak{q}+\mathfrak{x}(\mathfrak{x}\mathfrak{p}+\mathfrak{y}\mathfrak{q}+\mathfrak{z}\mathfrak{r}),\ \mathfrak{z}(\mathfrak{x}\mathfrak{p}+\mathfrak{y}\mathfrak{q}+\mathfrak{z}\mathfrak{r});$$

Digitized by Google

andererseits ist

$$dz - ydx = d\zeta + \xi d\eta - \eta d\xi .$$

Die Gruppe (C.) ist also gleichzusammengesetzt mit der allgemeinen projectiven Gruppe eines linearen Liniencomplexes des dreifachen Raumes ζ, ξ, η.[1]) Dass diese zehngliedrige projective Gruppe einfach ist, habe ich schon bei verschiedenen Gelegenheiten hervorgehoben.

2.

Die im Vorangehenden resumirten Untersuchungen dehnen sich ohne Schwierigkeit auf n Dimensionen aus[2]).

Eine infinitesimale Berührungstransformation des Raumes $zx_1 \dots x_n$ besitzt, wenn

$$dz - y_1 dx_1 - \cdots - y_n dx_n = 0 ,$$

gesetzt wird, die Form

$$\delta x_\varkappa = -\frac{\partial W}{\partial y_\varkappa}\delta t , \quad \delta z = \left(W - y_1 \frac{\partial W}{\partial y_1} - \cdots - y_n \frac{\partial W}{\partial y_n}\right)\delta t ,$$

$$\delta y_\varkappa = \left(\frac{\partial W}{\partial x_\varkappa} + y_\varkappa \frac{\partial W}{\partial z}\right)\delta t ,$$

so dass

$$[Wf] - W\frac{\partial f}{\partial z}$$

ihr allgemeines Symbol, W ihre charakteristische Function ist.

Die Grössen $zx_1 \dots x_n\, y_1 \dots y_n$ sind Coordinaten eines Elements des Raumes $zx_1 \dots x_n$; sie können aber auch als Punktcoordinaten eines $(2n+1)$-fach ausgedehnten Raumes gedeutet werden. Bei dieser letzten Auffassung ordnet die Pfaff'sche Gleichung: $dz - y_1 dx_1 - \dots y_n dx = 0$ jedem Punkte z, x, y ein Bündel von ∞^{2n-1} Richtungen: dz, dx, dy zu. Diese ∞^{2n-1} Richtungen bilden eine $(2n-1)$-fach ausgedehnte ebene Mannigfaltigkeit, welche in der $2n$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit aller Richtungen dz, dx, dy durch den betreffenden Punkt enthalten ist.

Betrachten wir nun eine beliebige Transformation

$$[Wf] - W\frac{\partial f}{\partial z}$$

---

1) Göttinger Nachrichten December 1874.

2) Archiv for Mathematik, Christiania 1879, S. 232.

Digitized by Google

des Raumes $z, x_\varkappa, y_\varkappa$, welche einen bestimmten Punkt $z^0, x_\varkappa^0, y_\varkappa^0$ in Ruhe lässt, so leuchtet ein, dass dieselbe die $2n$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit aller Richtungen $dz, dx_\varkappa, dy_\varkappa$ durch den Punkt $z^0, x_\varkappa^0, y_\varkappa^0$ durch eine *projective* Gruppe transformirt, bei welcher die $(2n-1)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit:

$$dz - y_1^0 dx_1 - \cdots - y_n^0 dx_n = 0$$

in Ruhe bleibt. Es werden andererseits die ∞^{2n-1} Richtungen dieser letzten Mannigfaltigkeit durch eine projective Gruppe g transformirt, deren allgemeine Form sich leicht angeben lässt; hier genügt es hervorzuheben, dass g keineswegs die allgemeine projective Gruppe einer $(2n-1)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit ist.

Betrachten wir andererseits eine beliebige endliche oder unendliche continuirliche Berührungstransformationsgruppe des Raumes $z, x_\varkappa$, so erhalten wir ohne weiteres eine entsprechende Gruppe von Punkttransformationen des Raumes $z, x_\varkappa, y_\varkappa$. Diejenigen Transformationen dieser letzten Gruppe, welche einen beliebigen Punkt $z^0, x_\varkappa^0, y_\varkappa^0$ allgemeiner Lage in Ruhe lassen, transformiren die Richtungen des invarianten Büschels: $dz - y_1^0 dx_1 - \cdots y_n^0 dx_n = 0$ durch eine gewisse projective Gruppe γ, welche natürlich entweder mit g identisch ist oder in g als Untergruppe enthalten ist.

Besonders wichtig ist der Fall, dass γ mit g identisch ist. Die entsprechenden Gruppen lasssen sich leicht auf einfache çanonische Formen bringen.

Alle *endlichen* Berührungstransformationsgruppen des Raumes $z x_1 \ldots x_n$, für welche die beiden Gruppen γ und g übereinstimmen, können durch passende Coordinatenwahl auf drei canonische Formen gebracht werden.

Als charakteristische Functionen der ersten canonischen Form lassen sich die Grössen:

(A'.)
$$\boxed{\begin{array}{c} 1,\ x_i,\ y_\varkappa,\ x_i x_\varkappa,\ x_i y_\varkappa,\ y_i y_\varkappa \\ i = 1 \cdots n,\ \varkappa = 1 \cdots n \end{array}}$$

wählen. Die zugehörigen infinitesimalen Transformationen haben die Form:

$$p_i \quad q_i + x_i r \quad r$$
$$x_i q_\varkappa + x_\varkappa q_i + x_i x_\varkappa r,\ x_i p_\varkappa - y_\varkappa q_i,\ y_i p_\varkappa + y_\varkappa p_i + y_i y_\varkappa r\ ,$$

Digitized by Google

wo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = p_i\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y_i} = q_i\,, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = r$$

gesetzt ist. Diese Gruppe ist irreducibel und zusammengesetzt.

Als charakteristische Functionen der zweiten canonischen Form lassen sich die Grössen

$$\boxed{1\,,\ x_i\,,\ y_\varkappa\,,\ x_i x_\varkappa\,,\ x_i y_\varkappa\,,\ y_i y_\varkappa\,,\ z - \tfrac{1}{2}(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)}$$

wählen; unter den zugehörigen infinitesimalen Transformationen genügt es die letzte, nämlich:

$$x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n + y_1 q_1 + \cdots + y_n q_n + 2 z r$$

hinzuschreiben. Diese Gruppe ist zusammengesetzt und irreducibel. Ihre invarianten Untergruppen lassen sich leicht angeben.

Endlich können als charakterististische Functionen der dritten canonischen Form die Grössen

$$(C'.)\quad \boxed{\begin{array}{c} 1\,,\ x_i\,,\ y_\varkappa\,,\ x_i x_\varkappa\,,\ x_i y_\varkappa\,,\ y_i y_\varkappa\,,\ z - \tfrac{1}{2}\Sigma x_\varkappa y_\varkappa \\ x_i(z - \tfrac{1}{2}\Sigma x_\varkappa y_\varkappa)\,,\ y_i(z - \tfrac{1}{2}\Sigma x_\varkappa y_\varkappa)\,,\ (z - \tfrac{1}{2}\Sigma x_\varkappa y_\varkappa)^2 \end{array}}$$

gewählt werden. Diese Gruppe ist *einfach* und *irreducibel*.

Für $n = 1$ ist diese Gruppe isomorph mit der projectiven Gruppe einer Fläche zweiten Grades eines vierfach ausgedehnten Raumes.

Hiermit kennen wir *drei* wesentlich *verschiedene* Kategorien von einfachen Gruppen, unter denen jede Kategorie unendlich viele Zusammensetzungen liefert.

1) Die allgemeine projective Gruppe eines einfach ausgedehnten Raumes.

2) Die allgemeine continuirliche projective Gruppe einer Fläche zweiten Grades mit nichtverschwindender Determinante.

3) Die allgemeine projective Gruppe des Ausdruckes

$$0 = dz + x_1 dy_1 - y_1 dx_1 + \cdots + x_n dy_n - y_n dx_n\,.$$

Digitized by Google

Diese letzte Gruppe geht aus der früher betrachteten *einfachen* Berührungstransformationsgruppe (C'.) durch die Substitution

$$\zeta = z - \tfrac{1}{2}\Sigma x_\varkappa y_\varkappa, \quad \xi_\varkappa = x_\varkappa, \quad \eta_\varkappa = \tfrac{1}{2} y_\varkappa$$

hervor.

Bei den Berührungstransformationsgruppen (A'.), (B'.), (C'.) bleibt die Flächenschaar:

$$z = a + \Sigma b_i x_i + \Sigma c_{i\varkappa} x_i x_\varkappa$$

invariant. Dieselbe ist die kleinste invariante Schaar von Element — M_n. Die $\frac{n^2 + 3n + 2}{2}$ Parameter dieser Schaar werden durch eine isomorphe Gruppe transformirt, welche für $n = 4$ mit der conformen Gruppe des dreifachen Raumes ähnlich ist.

3.

Herr POINCARÉ bemerkte 1884 in den Comptes rendus, dass das Problem, alle Systeme von complexen Zahlen zu finden, darauf hinauskommt, alle (transitiven) linearen homogenen Transformationsgruppen

$$x_\varkappa' = a_{\varkappa 1} x_1 + \cdots + a_{\varkappa n} x_n$$

zu bestimmen, deren Coefficienten $a_{\varkappa i}$ lineare homogene Functionen von n Parametern sind.

Unter den infinitesimalen Transformationen einer solchen Gruppe findet sich immer

$$x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n ;$$

dazu kommen $n - 1$ weitere, welche der speciellen linearen homogenen Gruppe angehören und eine $(n-1)$-gliedrige Untergruppe G_{n-1} erzeugen. Ich wünsche die Aufmerksamkeit auf *alle Systeme von complexen Zahlen zu richten, für welche die Gruppe G_{n-1} einfach ist*; unter ihnen findet sich das HAMILTONsche Quaternionensystem. Für $n = 5, 6, 7, 8$ giebt es nach meinen älteren Untersuchungen kein derartiges Zahlensystem.

Indem man POINCARÉ's oben citirten Satz mit meiner Theorie der Transformationsgruppen verbindet, erkennt man leicht, dass das Problem, alle complexen Zahlensysteme zu finden, darauf

Digitized by Google

hinauskommt, alle lineare homogene Gruppen in n Veränderlichen $x_1 \dots x_n$ und mit n Parametern zu finden, deren *infinitesimale* Transformationen

$$\xi_{\varkappa 1} p_1 + \cdots + \xi_{\varkappa n} p_n \quad (\varkappa = 1 \cdots n)$$

und *endliche* Transformationen

$$x_i' = e_1 \xi_{1i} + \cdots + e_n \xi_{ni}$$

dieselbe Form besitzen. Diese *praktisch wichtige* wenn auch theoretisch einfache Bemerkung gehört, wenn ich nicht irre, mir.

Digitized by Google

SITZUNG VOM 5. AUGUST 1889.

Paul Flechsig, *Ueber eine neue Färbungsmethode des centralen Nervensystems und deren Ergebnisse bezüglich des Zusammenhanges von Ganglienzellen und Nervenfasern.* **Mit 1 Tafel.**

So vollkommen durch die von GOLGI eingeführten Färbungsmethoden die centralen Ganglienzellen mit ihren Ausläufern dargestellt werden, so bleiben doch hierbei die Beziehungen der letzteren zu dem in der grauen Substanz vorhandenen Faserfilz, insbesondere zu den markhaltigen Elementen desselben noch vielfach dunkel, insbesondere deshalb, weil sowohl bei der Sublimat- als Silberfärbung der grösste Theil der Nervenfasern des Filzes ungefärbt erscheint. Diesem Mangel wird in bisher unerreichter Weise abgeholfen durch eine Combination der GOLGI'schen Sublimatfärbung mit einer den nervösen Faserfilz in höchst vollständiger Weise darstellenden Tinctionsmethode, welche im Laboratorium der psychiatrischen und Nervenklinik hier ausgebildet worden ist und in Folgendem besteht.

Die in 2% wässriger Lösung von chromsaurem Kali erhärteten Stücke werden in feine nicht über $^5/_{100}$ mm starke Schnitte zerlegt und kommen zunächst in Alkohol von 96%, hiernach 3—8 Tage in eine Lösung von Rothholz-Extract bei einer Temperatur von ca. 35° Celsius. Die dunkelrothbraun gewordenen Schnitte werden kurz in Aqua destillata abgespült und dann entfärbt, so wie es PAL für die Hämatoxylinfärbung angegeben hat. Die Entfärbung muss eine sehr sorgfältige und vollkommene sein, was am besten auf folgende Weise gelingt. Jeder Schnitt wird einzeln in 3 cbcm einer $^1/_4$—$^1/_5$% Lösung von Kalium hypermanganicum gelegt und bleibt darin so lange, bis die Lösung den bläulichen Farbeton verloren hat; er kommt dann in die Entfärbungsflüssigkeit (Aq. dest. 200,0; Acid. oxal.

Digitized by Google

1,0; Kal. sulfurosi 1,0) und, wenn die Entfärbung (welche sich weniger leicht vollzieht als bei der Weigert'schen Hämatoxylinfärbung) nicht vollkommen geworden, wieder in Kalium hypermanganicum zurück u. s. w., bis jeder gelbliche Farbenton aus dem Schnitt geschwunden ist.

Die Rothholzlösung wird nach der Angabe von Wilhelm Freiherr von Branca folgendermassen hergestellt. 1 Gramm des Extractum purum von *japanischem* Rothholz wird in 10 Gramm absoluten Alkohols gelöst, mit 900 Gramm Aquae destillatae verdünnt und aufgelöst unter Zusatz von je 5 Gramm einer gesättigten Lösung von Glaubersalz und Weinsteinsäure.

Soll die von Branca'sche Rothholzfärbung mit Golgi's Sublimatfärbung combinirt werden (zuerst von Cand. med. H. Held an einem in chromsaurem Kali erhärteten Gehirn vom Menschen angewandt, welches ca. 1 Jahr lang in 1% Sublimatlösung gelegen hatte), so kommen die auf die oben beschriebene Weise gefärbten Schnitte in eine Mischung von 20 cbcm absoluten Alkohols mit 5 Tropfen einer 1% Lösung von Goldchlorid-Kalium, bis die Sublimatniederschläge, die im Schnitt bei auffallendem Licht weisslich aussehen, tief schwarz geworden sind, und die rothen Nervenfaserbündel einen bläulichen Ton angenommen haben; dann ganz kurzes Auswaschen (der Schnitt muss auf der Lösung schwimmen) in 10 Gramm Aquae destillatae, dem 1 Tropfen einer 5% Cyankalilösung zugesetzt ist; Entwässern in absolutem Alkohol, Aufhellen in reinem Lavendelöl und Einschliessen in Canadabalsam. Die Nervenfasern sind jetzt von den groben markhaltigen bis zu den feinsten herab carminroth, die Ganglienzellen mit ihren Ausläufern tief schwarz gefärbt, sodass beide sich auf das Schärfste gegen einander abheben.

Die mit Hilfe dieser von Branca-Held'schen bez. Golgi'schen Doppelfärbung gewonnenen Resultate betreffen vorläufig die Ganglienzellen in der Rinde der Centralwindungen und der Umgebung der Fissura calcarina und bestehen im Wesentlichen in Folgendem:

1) Ein Zusammenhang der Protoplasmafortsätze mit dem nervösen Faserfilz konnte nirgends mit Sicherheit nachgewiesen werden; *ausschliesslich die Axencylinderfortsätze zeigen diesen Zusammenhang.*
2) Meist theilt sich der Axencylinderfortsatz wie an den Zellen der Spinalganglien T-förmig (Fig. 1—4), indem er sich

Digitized by Google

vom Zellursprung aus continuirlich verschmächtigt und an der dünnsten Stelle (»*Hals*« Fig. 4 *p*) in zwei feine marklose, weiterhin sich mit Mark umhüllende Fasern spaltet, *oder* indem sich zwischen Hals und Theilungsstelle eine cylindrische bezw. spindelförmige Anschwellung (»*Schaltstück*«) einfügt (Figg. 1, 2, 3 *a'*). An Präparaten aus dem Occipitallappen (nur in dieser Region?) hängt der Axencylinder am Hals mit *drei* feinen Fäserchen bezw. Schaltstücken zusammen (Fig. 5 *x*); indem *dieselben ihrerseits sich wieder* T- oder büschelförmig (Fig. 5 *y*) *theilen*, tritt ein Axencylinderfortsatz mit 8 und vielleicht noch mehr markhaltigen Fasern in Verbindung. — Im Gegensatz hierzu bleiben in den Centralwindungen die Axencylinderfortsätze öfters scheinbar ungetheilt; es muss vorläufig unentschieden bleiben, ob hier die Theilung erst in grösserer Entfernung von der Zelle sich vollzieht (vgl. die Figg. 6 und 7). Jedenfalls zeigen die grossen Pyramidenzellen der Centralwindungen *einen anderen Verzweigungsmodus* der Axencylinderfortsätze als die grossen Zellen der Occipitalrinde (vergl. Figg. 1—5 mit Figg. 6 und 7)!

3) Die von Golgi, Nansen u. A. beschriebene Auflösung in feinste marklose Fäserchen wurde nicht mit Sicherheit beobachtet. Die meisten feinen Verzweigungen des Axencylinderfortsatzes umhüllen sich mit Mark und verknüpfen somit Ganglienzellen und markhaltigen Faserfilz.

4) Auch die markhaltigen Fasern des mittleren wie des oberflächlichen Horizontalplexus der Hirnrinde gehen aus Axencylinderfortsätzen hervor, indem sie rechtwinklig von den senkrecht zur Oberfläche verlaufenden Gebilden dieser Art entspringen (Fig. 7 *p'*).

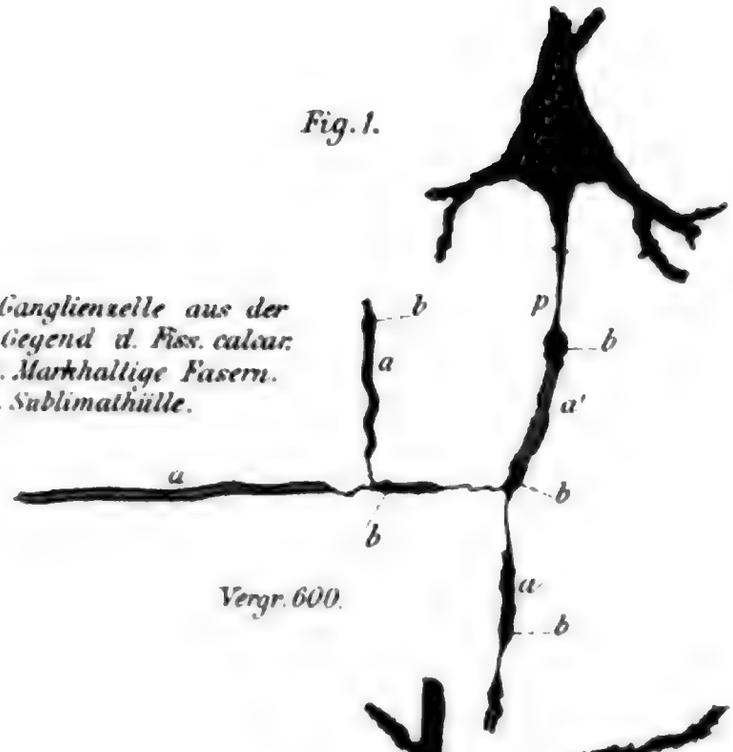
Tafelerklärung.

Sämmtliche Figuren der Tafel sind (von Herrn Held angefertigten) Schnittpräparaten entnommen: Fig. 1—5 aus den Hinterhauptslappen, Fig. 6 und 7 aus den Centralwindungen eines Mannes.

p Hals des Axencylinder-Fortsatzes,
a' Schaltstücke, zum Theil markhaltig.

Digitized by Google

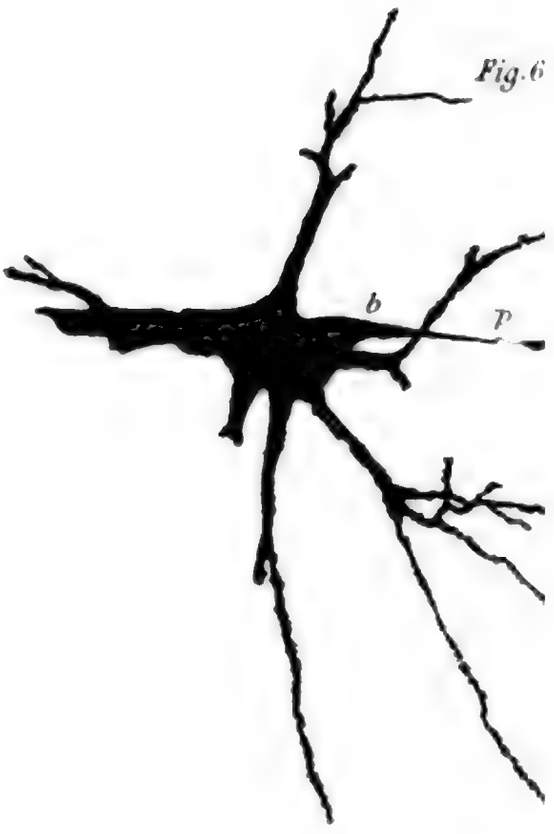
Fig. 1.



Ganglienzelle aus der Gegend d. Fiss. calcar.
a. Markhaltige Fasern.
b. Sublimathülle.

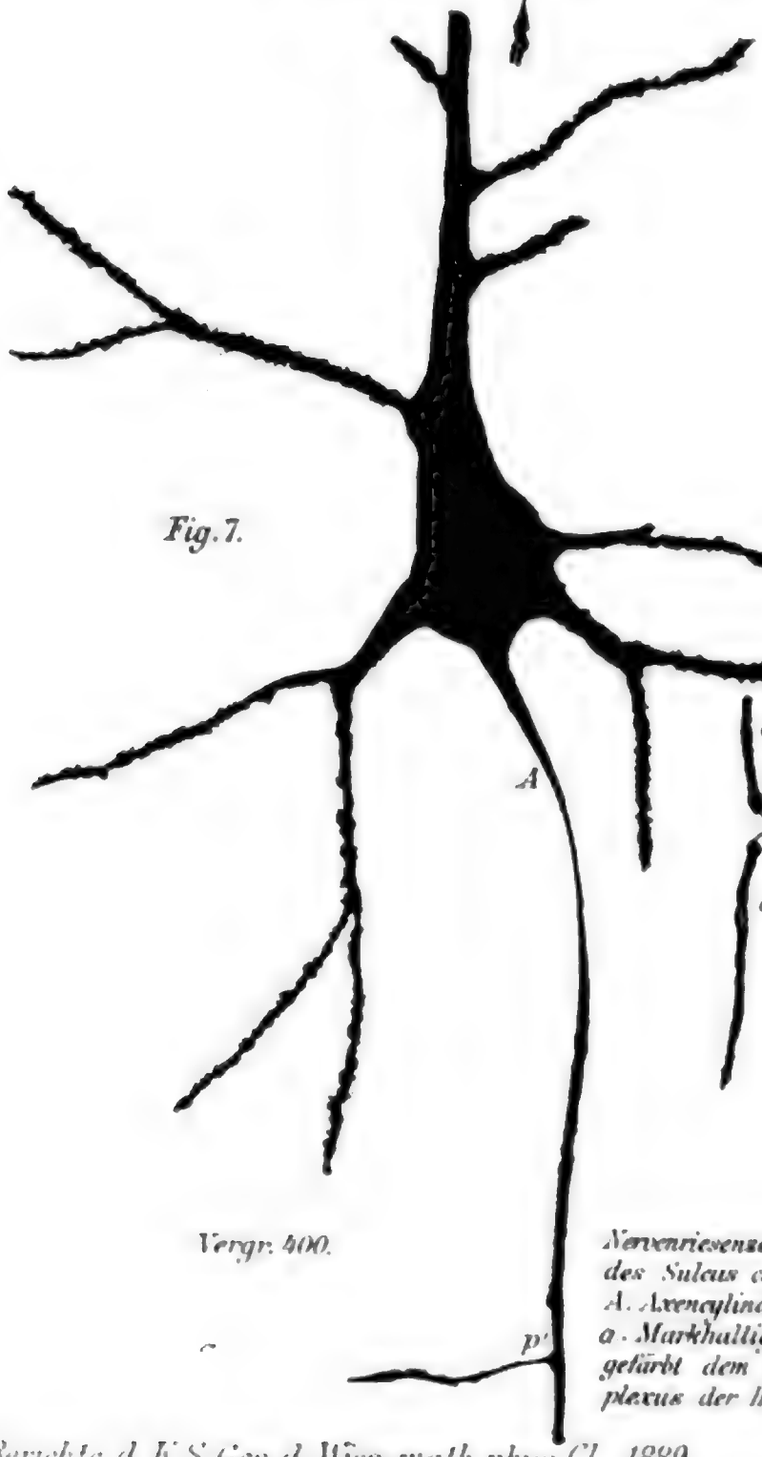
Vergr. 600.

Fig. 6



Zelle aus der Umgebung
centralis.
b Axencylinder, der ohne Seit
abzugeben in die Markfaser

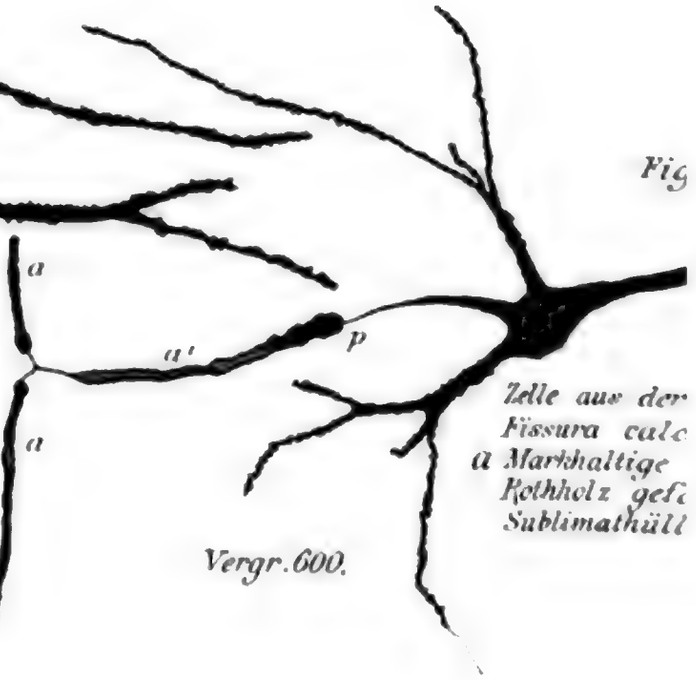
Fig. 7.



Vergr. 400.

Nervenriesenzelle aus der Umgebung des Sulcus centralis.
A. Axencylinderfortsatz.
a. Markhaltige Faser mit Rothholz gefärbt dem mittleren Horizontal. plexus der Hirnrinde angehörend.

Fig



Zelle aus der
Fissura calc
a Markhaltige
Rothholz gefä
Sublimathüll

Vergr. 600.

Digitized by Google

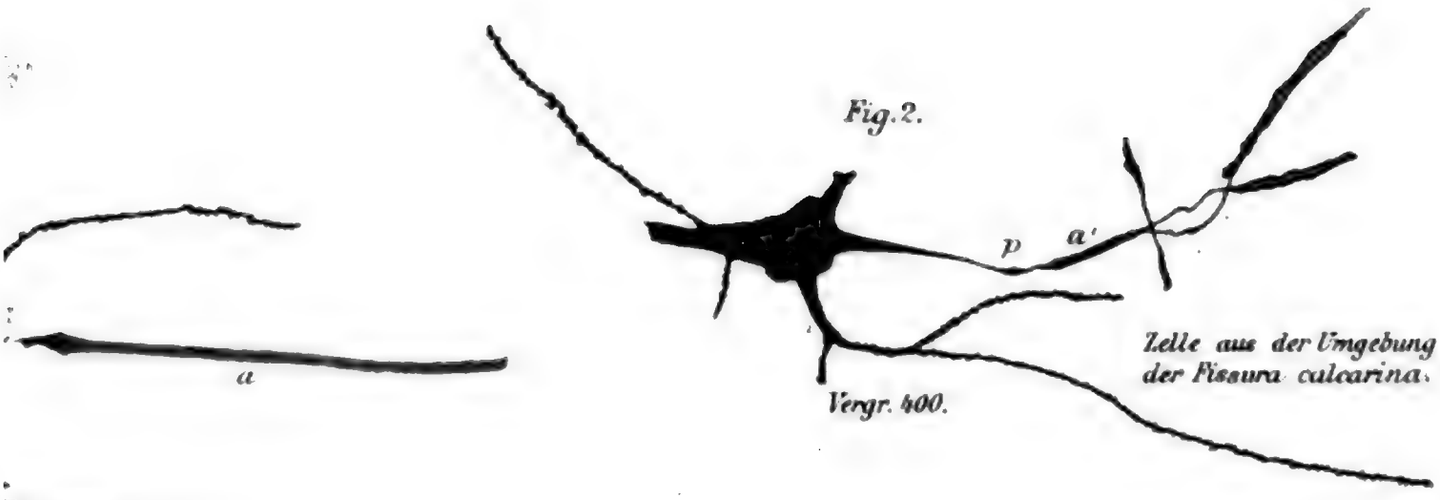


Fig. 2.

Zelle aus der Umgebung der Fissura calcarina.

Vergr. 400.

Vergr. 400.

des Sulcus

zweige
a übergeht

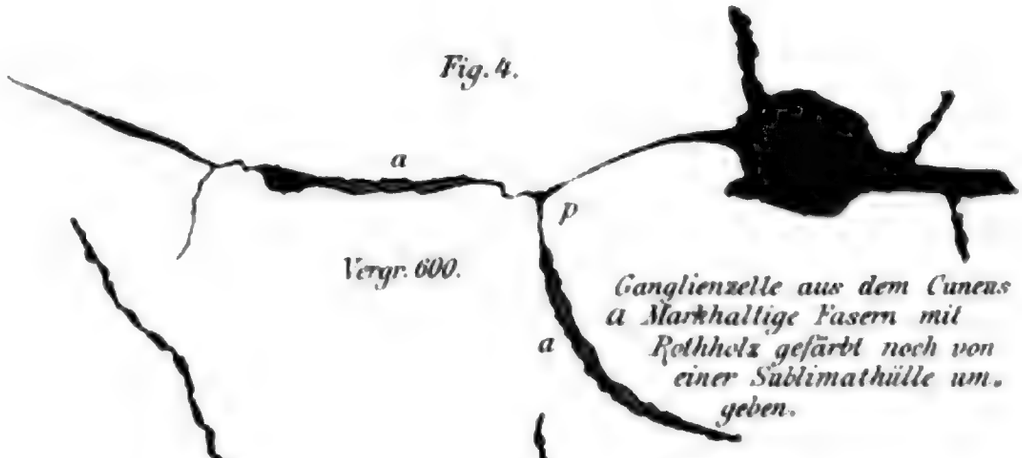


Fig. 4.

Vergr. 600.

Ganglienzelle aus dem Cuneus
a Markhaltige Fasern mit Rothholz gefärbt noch von einer Sublimathülle umgeben.

Fig. 3.

der Gegend der
calcarina.
Fasern mit
gefärbt, noch mit
Hülle umgeben.

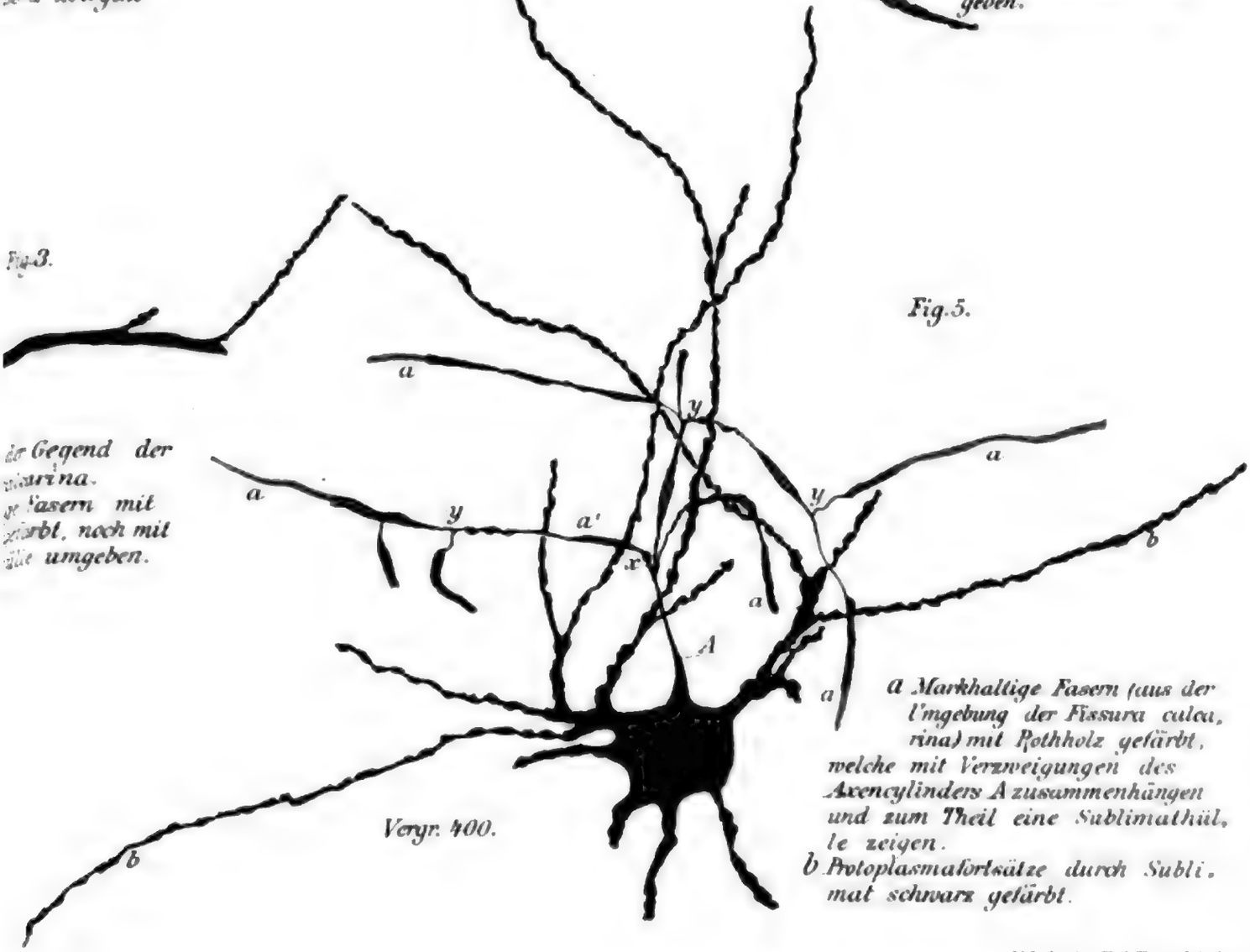


Fig. 5.

Vergr. 400.

a Markhaltige Fasern (aus der Umgebung der Fissura calcarina) mit Rothholz gefärbt, welche mit Verzweigungen des Axencylinders A zusammenhängen und zum Theil eine Sublimathülle zeigen.
b Protoplasmafortsätze durch Sublimat schwarz gefärbt.

Hild del.

Lith. Anst. v. E. A. Funke, Leipzig

Digitized by Google

SITZUNG VOM 21. OCTOBER 1889.

W. Scheibner, *Ueber die Differentialgleichungen der elliptischen Modulfunctionen und Invarianten.*

1.

Im Jahrgang 1862 dieser Berichte habe ich die Eigenschaften der vier Modulfunctionen

$$\chi(q) = \prod_{p=0}^{\infty} (1-q^{2p+1}) \ , \qquad \chi_1(q) = \prod_{p=0}^{\infty} (1+q^{2p+2}) \ ,$$

$$\chi_2(q) = \prod (1+q^{2p+2}) \ , \qquad \chi_3(q) = \prod (1+q^{2p+1})$$

untersucht und neben den Transformationsformeln die Differentialgleichungen aufgestellt, denen dieselben genügen. Es sollen jetzt die Werthe der Invarianten (S. 93 dieses Bandes)

$$g_2 = \tfrac{1}{3}(\vartheta_3^8 - \vartheta^4\vartheta_2^4) = \tfrac{2}{3}(\vartheta^8 + \vartheta_2^8 + \vartheta_3^8) \ ,$$

$$g_3 = \tfrac{1}{27}(\vartheta^4 - \vartheta_3^4)(2\vartheta_3^8 + \vartheta^4\vartheta_2^4) = \tfrac{1}{27}(\vartheta^4 - \vartheta_2^4)(\vartheta^4 + \vartheta_3^4)(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)$$

mittelst der Relationen

$$\vartheta = \chi_1\chi^2 \ , \qquad \vartheta_1' = 2q^{\frac{1}{4}}\chi_1^3 \ , \qquad \vartheta_2 = 2q^{\frac{1}{4}}\chi_1\chi_2^2 \ , \qquad \vartheta_3 = \chi_1\chi_3^2$$

umgeformt werden.

Eine leichte Rechnung liefert die Ausdrücke

$$g_2 = \tfrac{2}{3}\chi_1^8(\chi^{16} + 256q^2\chi_2^{16} + \chi_3^{16}) = \tfrac{1}{3}\chi_1^8(\chi_3^{16} - 16q\chi^8\chi_2^8)$$

$$= \tfrac{1}{3}\chi_1^8(256q^2\chi_2^{16} + \chi^8\chi_3^8) = \tfrac{1}{3}\chi_1^8(\chi^{16} + 16q\chi_2^8\chi_3^8) \ ,$$

$$g_3 = \tfrac{1}{27}\chi_1^{12}(\chi^8 - 16q\chi_2^8)(\chi^8 + \chi_3^8)(\chi_3^8 + 16q\chi_2^8) \ ,$$

Digitized by Google

nebst der Discriminante

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2 = 16\vartheta^8\vartheta_2^8\vartheta_3^8 = 16\vartheta_1'^4 = 16^3 q^2 \chi_1^{24} .$$

Führt man hier die Bezeichnungen ein

$$\gamma = -\frac{\chi^8}{4q^{\frac{1}{3}}} = -\left(\frac{\varkappa'\varkappa'}{2\varkappa}\right)^{\frac{2}{3}} , \quad \gamma_1 = 16q^{\frac{2}{3}}\chi_1^8 = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^4 (2\varkappa\varkappa')^{\frac{1}{3}} .$$

$$\gamma_2 = -4q^{\frac{2}{3}}\chi_2^8 = -\left(\frac{\varkappa\varkappa}{2\varkappa'}\right)^{\frac{2}{3}} , \quad \gamma_3 = \frac{\chi_3^8}{4q^{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{1}{2\varkappa\varkappa'}\right)^{\frac{2}{3}} ,$$

so wird

$$g_2 = -\tfrac{1}{3}\gamma_1\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{1}{\gamma_3}\right) = \frac{\gamma_1}{3\gamma_3}(4\gamma_3^3 - 1)$$

$$= \frac{\gamma_1}{3\gamma_2}(4\gamma_2^3 - 1) = \frac{\gamma_1}{3\gamma}(4\gamma^3 - 1) ,$$

$$g_3 = \tfrac{1}{27}\gamma_1^3(\gamma_2 - \gamma_3)(\gamma_3 - \gamma)(\gamma - \gamma_2) ,$$

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2 = \gamma_1^3 .$$

Setzt man folglich die absolute Invariante

$$j = \frac{g_2}{\Delta^{\frac{1}{3}}} = -\tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{1}{\gamma_3}\right) , \quad \frac{g_3}{\Delta^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\tfrac{1}{27}(j^3 - 1)} ,$$

$$= \tfrac{2}{3}(\gamma^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) = -\tfrac{1}{3}(\gamma_2\gamma_3 + \gamma_3\gamma + \gamma\gamma_2) ,$$

so ergeben sich die Modulfunctionen $\gamma\,\gamma_2\,\gamma_3$ als die drei Wurzeln der cubischen Gleichung

$$4\gamma'^3 = 3j\gamma' + 1 ,$$

während die Werthe

$$\gamma_1^{\frac{1}{3}}\gamma = -\vartheta^4 , \quad \gamma_1^{\frac{1}{3}}\gamma_2 = -\vartheta_2^4 , \quad \gamma_1^{\frac{1}{3}}\gamma_3 = \vartheta_3^4$$

als Wurzeln der cubischen Gleichung

$$4\gamma''^3 = 3g_2\gamma'' + \Delta^{\frac{1}{2}}$$

Digitized by Google

erscheinen und sich von den Wurzeln der Gleichung für γ' nur durch den Factor $\gamma_1^{\frac{1}{2}}$ unterscheiden.

Da die Gleichung $4\gamma'^3 = 3j\gamma' + 1$ für $\Delta > 0$ eine positive (γ_3) und zwei negative Wurzeln (γ, γ_2) besitzt, so hat sich die Vertheilung der beiden letzteren nach dem Vorzeichen von g_3 zu richten, welches mit dem von $\gamma_2 - \gamma$ übereinstimmen muss.

2.

Eine ähnliche Behandlung der übrigen S. 93 entwickelten Invariantenwerthe liefert

1) $$g_2 = \tfrac{1}{12}(\vartheta^8 + 16\vartheta_2^4\vartheta_3^4) = \tfrac{1}{12}\gamma_1(\gamma^2 - 16\gamma_2\gamma_3) \ ,$$

$$g_3 = \tfrac{1}{216}(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)(\vartheta^8 - 32\vartheta_2^4\vartheta_3^4) = \tfrac{1}{216}\gamma_1^{\frac{3}{2}}(\gamma_3 - \gamma_2)(\gamma^2 + 32\gamma_2\gamma_3),$$

$$\Delta = \tfrac{1}{16}\vartheta^{16}\vartheta_2^4\vartheta_3^4 = \{\tfrac{1}{2}\vartheta_1'(q^{\frac{1}{2}})\}^8 = (-\tfrac{1}{4}\gamma_1\gamma_2)^3 \ ,$$

$$j = \frac{g_2}{\Delta^{\frac{1}{3}}} = \tfrac{1}{3}\left(\frac{4}{\gamma^2} - \gamma\right) \ ,$$

oder

$$\frac{4}{\gamma^3} = \frac{3j}{\gamma} + 1 \ .$$

2) $$g_2 = \tfrac{1}{12}(\vartheta_2^8 + 16\vartheta^4\vartheta_3^4) = \tfrac{1}{12}\gamma_1(\gamma_2^2 - 16\gamma\gamma_3) \ ,$$

$$g_3 = \tfrac{1}{216}(\vartheta^4 + \vartheta_3^4)(32\vartheta^4\vartheta_3^4 - \vartheta_2^8) = \tfrac{1}{216}\gamma_1^{\frac{3}{2}}(\gamma - \gamma_3)(\gamma_2^2 + 32\gamma\gamma_3),$$

$$\Delta = \tfrac{1}{16}\vartheta^4\vartheta_2^{16}\vartheta_3^4 = 16\{\vartheta_1'(q^2)\}^8 = (-\tfrac{1}{4}\gamma_1\gamma_2)^3 \ ,$$

$$j = \frac{g_2}{\Delta^{\frac{1}{3}}} = \tfrac{1}{3}\left(\frac{4}{\gamma_2^2} - \gamma_2\right) \ ,$$

oder

$$\frac{4}{\gamma_2^3} = \frac{3j}{\gamma_2} + 1 \ .$$

Digitized by Google

3) $g_2 = \frac{1}{12}(\vartheta_3^8 - 16\vartheta^4\vartheta_2^4) = \frac{1}{12}\gamma_1(\gamma_3^2 - 16\gamma\gamma_2)$,

$g_3 = -\frac{1}{216}(\vartheta^4 - \vartheta_2^4)(\vartheta_3^8 + 32\vartheta^4\vartheta_2^4) = \frac{1}{216}\gamma_1^3(\gamma_2 - \gamma)(\gamma_3^2 + 32\gamma\gamma_2)$.

$\Delta = -\frac{1}{16}\vartheta^4\vartheta_2^4\vartheta_3^{16} = \{\frac{1}{2}\vartheta_1'(iq^{\frac{1}{2}})\}^8 = (-\frac{1}{4}\gamma_1\gamma_2)^3$,

$j = \frac{g_2}{\Delta^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{\gamma_3^2} - \gamma_3\right)$,

oder

$$\frac{4}{\gamma_3^3} = \frac{3j}{\gamma_3} + 1 .$$

In allen drei Fällen gelten die gemeinschaftlichen Ausdrücke

$$g_2 = \frac{1}{3}\Delta^{\frac{1}{3}}\left(\frac{4}{\gamma_1} + \frac{\gamma_1^2}{4\Delta}\right) ,$$

$$g_3 = \pm\frac{1}{27}\left(\frac{4\Delta}{\gamma_1} - \frac{\gamma_1^2}{2}\right)\sqrt{\frac{4}{\gamma_1} + \frac{\gamma_1^3}{16\Delta}} .$$

Aus dem Vorstehenden erhellt, dass jetzt die reciproken Werthe $\frac{1}{\gamma}$, $\frac{1}{\gamma_2}$ und $\frac{1}{\gamma_3}$ einzeln Wurzeln der cubischen Gleichung

$$4\gamma'^3 = 3j\gamma' + 1$$

geworden sind, während die Ausdrücke der Discriminante Δ zeigen, dass in den betrachteten Fällen q resp. in $\frac{1}{2}q$, q^2 und $\sqrt{-q}$ übergegangen ist. In der That verificirt man leicht die Gleichungen

$$\gamma(q) = \frac{1}{\gamma_2(\frac{1}{2}q)} , \quad \gamma_2(q) = \frac{1}{\gamma(q^2)} , \quad \gamma_3(q) = \gamma(-q) = -\frac{1}{\gamma_2(1-q)} .$$

In den Fällen 1 und 2 hat man für $\frac{1}{\gamma}$ resp. $\frac{1}{\gamma_2}$ einen der beiden negativen Wurzelwerthe γ' zu nehmen, während im dritten Falle, wo $\Delta < 0$, $\frac{1}{\gamma_3}$ der einzigen reellen positiven Wurzel γ' gleich zu setzen ist. Man erhält dann weiter

Digitized by Google

$$\gamma_1 = -4\,\lambda^{\frac{1}{3}}\gamma' > 0\ ,$$

und die beiden restirenden Modulfunctionen bestimmen sich durch den Ausdruck

$$-\frac{1}{2\gamma'}(1 \pm \sqrt{1-\gamma'^3})\ .$$

3.

Zur Ableitung der für die Modulfunctionen geltenden Differentialgleichungen gehen wir aus von der Formel (D^*) S. 95 dieses Bandes

$$\Theta^4 u \left(\frac{d}{du}\right)^3 \lg \Theta u = \delta\varepsilon\,\vartheta_1'^3\,\vartheta_1(2u)\ ,$$

und erhalten durch Differentiation:

$$2\,\delta\varepsilon\,\vartheta_1'^3\,\vartheta_1'(2u) = \Theta^4 u \left(\frac{d}{du}\right)^4 \lg \Theta u + 4\,\Theta^3 u\,\Theta' u \left(\frac{d}{du}\right)^3 \lg \Theta u$$

$$= \Theta^4 u \left(\frac{\Theta^{IV} u}{\Theta u} - 3\left(\frac{\Theta'' u}{\Theta u}\right)^2 + 2\left(\frac{\Theta' u}{\Theta u}\right)^4\right)\ ,$$

wofür man auch schreiben kann

$$\delta\varepsilon\,\vartheta_1'^3\,\frac{\vartheta_1'(2u)}{\Theta^4 u} = 2\,\frac{\partial}{\partial h}\,\frac{\Theta'' u}{\Theta u} - \left(\frac{\Theta'' u}{\Theta u}\right)^2 + \left(\frac{\Theta' u}{\Theta u}\right)^4$$

$$= 2\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^2 \lg \Theta^4 u - \left(\frac{\partial}{\partial h} \lg \Theta^4 u\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial u} \lg \Theta u\right)^4 .$$

Für $u = 0$ folgt sogleich

$$2\,\frac{\partial}{\partial h}\,\frac{\vartheta''}{\vartheta} = \left(\frac{\vartheta''}{\vartheta}\right)^2 - \left(\frac{\vartheta_1'}{\vartheta}\right)^4\ ,$$

$$2\,\frac{\partial}{\partial h}\,\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} = \left(\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)^2 - \left(\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_2}\right)^4\ ,$$

$$2\,\frac{\partial}{\partial h}\,\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} = \left(\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right)^2 + \left(\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_3}\right)^4\ .$$

Die Addition ergibt

Digitized by Google

$$2\frac{\partial}{\partial h}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} = \Sigma'\left(\frac{\vartheta''}{\vartheta}\right)^2 - \tfrac{3}{4}g_2 = \Sigma'\frac{\vartheta''\vartheta_2''}{\vartheta\vartheta_2}$$

$$= \tfrac{1}{3}\left(\frac{\vartheta_1''}{\vartheta_1'}\right)^2 - \tfrac{1}{4}g_2 \ ,$$

weil

$$\tfrac{1}{3}\left(\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}\right)^2 = \Sigma'\left(\frac{\vartheta''}{\vartheta}\right)^2 - \tfrac{1}{2}g_2 = \Sigma'\frac{\vartheta''\vartheta_2''}{\vartheta\vartheta_2} + \tfrac{1}{4}g_2 \ ,$$

neben

$$\left(\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}\right)^2 = \left(\Sigma'\frac{\vartheta''}{\vartheta}\right)^2 = \Sigma'\frac{\vartheta^{IV}}{\vartheta} \ .$$

Selbstverständlich kann man auch schreiben:

$$\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^2 \lg\vartheta^4 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \lg\vartheta^4}{\partial h}\right)^2 + \frac{\gamma_4}{8\gamma} \ ,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^2 \lg\vartheta_2^4 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \lg\vartheta_2^4}{\partial h}\right)^2 + \frac{\gamma_4}{8\gamma_2} \ ,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^2 \lg\vartheta_3^4 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \lg\vartheta_3^4}{\partial h}\right)^2 + \frac{\gamma_4}{8\gamma_3} \ ,$$

nebst

$$\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^2 \lg\vartheta_1'^4 = \tfrac{1}{6}\left(\frac{\partial \lg\vartheta_1'^4}{\partial h}\right)^2 - \tfrac{1}{8}g_2 \ ,$$

oder

$$\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^2 \lg\gamma_4 = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial \lg\gamma_4}{\partial h}\right)^2 - \tfrac{1}{12}g_2 \ .^1)$$

1) Man kann auch ohne Benutzung der Formel (D^4) die obige Differentialgleichung aus der Relation $\left(\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}\right)^2 = \Sigma'\frac{\vartheta^{IV}}{\vartheta}$ wie folgt herleiten.

Durch Quadrirung der Formel

$$\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} = \frac{\vartheta''}{\vartheta} + \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} + \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} = \Sigma'\frac{\vartheta''}{\vartheta}$$

erhält man

$$\left(\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}\right)^2 = \Sigma'\left(\frac{\vartheta''}{\vartheta}\right)^2 + 2\Sigma'\frac{\vartheta''\vartheta_2''}{\vartheta\vartheta_2} \ .$$

Andererseits ist

$$\left(\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}\right)^2 = \Sigma'\frac{\vartheta^{IV}}{\vartheta} \ ,$$

Digitized by Google

Diese letztere Gleichung stimmt mit der S. 115 dieser Berichte, Jahrgang 1862, gegebenen und dort aus der Eigenschaft des arithmetisch-geometrischen Mittels abgeleiteten Differentialgleichung für χ_1 überein, während die entsprechenden Differentialgleichungen für $\chi_2\ \chi_3\ \chi_4$ die Form annehmen:

$$\frac{\partial \lg \gamma}{\partial h} = \tfrac{1}{3}\gamma_1^{\frac{1}{2}}(\gamma_3 - \gamma_2) = \tfrac{1}{3}\sqrt{\frac{\gamma_4}{\gamma}(\gamma^3 - 1)}\ ,$$

$$\frac{\partial \lg \gamma_2}{\partial h} = \tfrac{1}{3}\gamma_1^{\frac{1}{2}}(\gamma - \gamma_3) = -\tfrac{1}{3}\sqrt{\frac{\gamma_4}{\gamma_2}(\gamma_2^3 - 1)}\ ,$$

$$\frac{\partial \lg \gamma_3}{\partial h} = \tfrac{1}{3}\gamma_1^{\frac{1}{2}}(\gamma_2 - \gamma) = +\tfrac{1}{3}\sqrt{\frac{\gamma_4}{\gamma_3}(\gamma_3^3 - 1)}\ .$$

4.

Damit findet man für $j = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{1}{\gamma_3}\right)$

$$\frac{\partial \lg j}{\partial h} = 3\frac{g_3}{g_2} \text{ oder } \frac{\partial j}{\partial h} = 3\frac{g_3}{\Delta^{\frac{1}{3}}}\ ,$$

und mittelst der Relationen

mithin

$$\left(\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}\right)^2 - \Sigma'\left(\frac{\vartheta''}{\vartheta}\right)^2 = \Sigma'\frac{\vartheta^{\mathrm{v}}}{\vartheta} - \Sigma'\left(\frac{\vartheta''}{\vartheta}\right)^2 = 4\frac{\partial}{\partial h}\Sigma'\frac{\vartheta''}{\vartheta}$$

$$= 4\frac{\partial}{\partial h}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} = 2\Sigma'\frac{\vartheta''\vartheta_2''}{\vartheta\vartheta_2}\ .$$

Da nun

$$\Sigma'\frac{\vartheta''\vartheta_2''}{\vartheta\vartheta_2} = \tfrac{1}{3}\left(\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}\right)^2 - \tfrac{1}{3}g_2\ ,$$

so ergibt sich die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial h}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} = \tfrac{1}{6}\left(\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}\right)^2 - \tfrac{1}{8}g_2\ .$$

Da ferner

$$\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} = \frac{\partial}{\partial h}\lg \vartheta_1'^4\ , \quad \gamma_1^3 = 16\,\vartheta_1'^8\ ,$$

so folgt

$$\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} = \tfrac{3}{2}\frac{\partial}{\partial h}\lg \gamma_1\ ,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^2 \lg \gamma_1 = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial \lg \gamma_1}{\partial h}\right)^2 - 1\tfrac{1}{2}g_2\ .$$

In abgekürzter Form kann man dafür schreiben:

$$\gamma_1^{\frac{1}{4}}\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^2 \gamma_1^{-\frac{1}{4}} = 1\tfrac{1}{2}g_2 \text{ oder } \left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^2 \frac{1}{q^{\frac{1}{2}}\chi_1^2} = \tfrac{1}{3}q^{\frac{1}{2}}\chi_1^6 j\ .$$

Digitized by Google

$$g_2 = j\Delta^{\frac{1}{3}} , \quad g_2^3 - 27 g_3^2 = \Delta = \gamma_1^3 :$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^2 \lg g_2 = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial \lg g_2}{\partial h}\right)^2 + \tfrac{5}{12}\frac{\Delta}{g_2^2} ,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^2 \lg g_3 = \tfrac{1}{6}\left(\frac{\partial \lg g_3}{\partial h}\right)^2 - \tfrac{7}{216}\frac{\Delta g_2}{g_3^2} ,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^2 \lg \Delta = \tfrac{1}{12}\left(\frac{\partial \lg \Delta}{\partial h}\right)^2 - \tfrac{1}{4} g_2 .$$

In den Fällen des Art. 2 erleiden die Differentialgleichungen, welche von den Invarianten abhängen, eine Modification. So wird

$$\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^2 \lg \gamma_1 = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial \lg \gamma_1}{\partial h}\right)^2 - \tfrac{1}{9}\Delta^{\frac{2}{3}}\left(\frac{16}{\gamma_1} + \frac{\gamma_1^2}{16\Delta}\right) ,$$

$$\frac{\partial \lg j}{\partial h} = 6\frac{g_3}{g_2} \text{ oder } \frac{\partial j}{\partial h} = 6\frac{g_3}{\Delta^{\frac{1}{3}}} ,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^2 \lg \Delta = \tfrac{1}{12}\left(\frac{\partial \lg \Delta}{\partial h}\right)^2 - g_2 ,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^2 \lg g_2 = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial \lg g_2}{\partial h}\right)^2 + \tfrac{5}{3}\frac{\Delta}{g_2^2} ,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^2 \lg g_3 = \tfrac{1}{6}\left(\frac{\partial \lg g_3}{\partial h}\right)^2 - \tfrac{7}{54}\frac{\Delta g_2}{g_3^2} .$$

Es versteht sich von selbst, dass die Gleichung für γ_1 in der Form

$$\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^2 \lg \gamma_1 = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial \lg \gamma_1}{\partial h}\right)^2 + \tfrac{1}{36}\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{1}{\gamma_3}\right)\gamma_1$$

in allen Fällen ohne Ausnahme Gültigkeit hat.

Sei ferner

$$G = \mu^4 g_2 , \quad H = \mu^6 g_3 , \quad D = \mu^{12}\Delta ,$$

$$I = \mu^4 \gamma_1 , \quad \lg \frac{1}{q} = h = \pi \frac{\mu}{\mu'} [1] ,$$

[1]) Die Berechnung der GAUSS'schen arithmetisch-geometrischen Mittel μ und μ' für die verschiedenen hier betrachteten Fälle findet sich in den Artt. 19 und 20 (S. 257 flg. dieses Bandes) erörtert.

Digitized by Google

so folgt

$$\frac{\partial \lg G}{\partial \mu} = \frac{4}{\mu} + \frac{\pi}{\mu'} \frac{\partial \lg g_2}{\partial h} ,$$

$$\frac{\partial \lg G}{\partial \mu'} = -\frac{\pi \mu}{\mu' \mu'} \frac{\partial \lg g_2}{\partial h} = -\frac{h}{\mu'} \frac{\partial \lg g_2}{\partial h} ,$$

u. s. w. Die Transformationsformeln aber werden, wenn

$$\lg \frac{1}{q'} = h' = \pi \frac{\mu'}{\mu} , \quad \text{also } hh' = \pi^2 :$$

$$h^2 \gamma_1(q) = h'^2 \gamma_1(q') \text{ oder } \mu^4 \gamma_1(q) = \mu'^4 \gamma_1(q') ,$$

d. h.

$$\Gamma(q) = \Gamma(q') , \quad \text{ferner } j(q) = j(q') ,$$

sowie

$$G(q) = G(q') , \quad H(q) = -H(q') , \quad D(q) = D(q') ,$$

und weiter

$$\gamma(q) = \gamma_2(q') , \quad \gamma_2(q) = \gamma(q') , \quad \gamma_3(q) = \gamma_3(q') .$$

Folglich ist $H = 0$ die Bedingung der lemniscatischen Functionen, für welche $q = q' = e^{-\pi}$.

5.

Um die Differentialgleichungen des vorigen Art. vollständig zu integriren, wollen wir die Invariante j an Stelle von h als unabhängige Variable einführen. Mit Berücksichtigung der Gleichungen

$$\Delta = \frac{g_2^3}{j^3} = \frac{27 g_3^2}{j^3 - 1} ,$$

$$g_2 = j \Delta^{\frac{1}{3}} = 3j \sqrt[3]{\frac{g_3^2}{j^3 - 1}} ,$$

$$g_3 = \sqrt{\tfrac{1}{27}(j^3 - 1)\Delta} = \sqrt{\frac{j^3 - 1}{27 j^3}} g_2^3 ,$$

$$\frac{\partial j}{\partial h} = \sqrt{\tfrac{1}{3}(j^3 - 1)\Delta^{\frac{1}{3}}} = \sqrt{(j^3 - 1)\frac{g_2}{3j}} = \sqrt[3]{(j^3 - 1) g_3}$$

ergibt sich

Digitized by Google

$$\frac{\partial^2 \lg \Delta}{\partial j^2} + \tfrac{1}{12}\left(\frac{\partial \log \Delta}{\partial j}\right)^2 + \tfrac{3}{2}\frac{j^2}{j^3-1}\frac{\partial \lg \Delta}{\partial j} + \tfrac{3}{4}\frac{j}{j^3-1} = 0 \ ,$$

$$\frac{\partial^2 \lg g_2}{\partial j^2} + \tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial \lg g_2}{\partial j}\right)^2 + \frac{2j^3+1}{2j(j^3-1)}\frac{\partial \lg g_2}{\partial j} - \tfrac{3}{4}\frac{1}{j^2(j^3-1)} = 0 \ ,$$

$$\frac{\partial^2 \lg g_3}{\partial j^2} + \tfrac{1}{6}\left(\frac{\partial \lg g_3}{\partial j}\right)^2 + \frac{j^2}{j^3-1}\frac{\partial \lg g_3}{\partial j} + \tfrac{11}{8}\frac{j}{(j^3-1)^2} = 0 \ ,$$

und zwar gelten diese drei Gleichungen, wie man sich leicht überzeugt, ausnahmslos für *alle* Fälle.

Die Differentialgleichungen werden linear, wenn man

$$\Delta = \pm \delta^{12} \ , \quad g_2 = \pm \alpha^4 \ , \quad g_3 = \pm \beta^6 \ ,$$

also

$$\alpha = (\pm j)^{\frac{1}{4}}\delta \ , \quad \beta = \left(\pm\frac{1-j^3}{27}\right)^{\frac{1}{12}}\delta$$

substituirt. Man erhält

$$(j^3-1)\frac{\partial^2\delta}{\partial j^2} + \tfrac{3}{2}j^2\frac{\partial\delta}{\partial j} + \tfrac{1}{16}j\delta = 0 \ ,$$

$$(j^3-1)\frac{\partial^2\alpha}{\partial j^2} + \frac{2j^3+1}{2j}\frac{\partial\alpha}{\partial j} - \tfrac{5}{16}\frac{1}{j^2}\alpha = 0 \ ,$$

$$(j^3-1)\frac{\partial^2\beta}{\partial j^2} + j^2\frac{\partial\beta}{\partial j} + \tfrac{7}{16}\frac{j}{j^3-1}\beta = 0 \ .$$

Diese Gleichungen haben die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass ihre vollständigen Integrale in doppelter Form dargestellt werden können. Zunächst erkennt man mit Hülfe der Relationen

$$\frac{\partial^2 h}{\partial j^2} = -\left(2\frac{\partial \lg \delta}{\partial j} + \tfrac{3}{2}\frac{j^2}{j^3-1}\right)\frac{\partial h}{\partial j}$$

$$= -\left(2\frac{\partial \lg \alpha}{\partial j} + \frac{2j^3+1}{2j(j^3-1)}\right)\frac{\partial h}{\partial j}$$

$$= -\left(2\frac{\partial \lg \beta}{\partial j} + \frac{j^2}{j^3-1}\right)\frac{\partial h}{\partial j} \ ,$$

Digitized by Google

dass die obigen Differentialgleichungen erfüllt bleiben, wenn man $\delta\,\alpha\,\beta$ mit h multiplicirt. Damit folgen als vollständige Integrale die Ausdrücke

$$(a+bh)\delta\ , \qquad (a+bh)\alpha\ , \qquad (a+bh)\beta\ .$$

Weiter aber gehen die Differentialgleichungen für $\delta\,\alpha\,\beta$ in die Form der für die GAUSS'sche hypergeometrische Function $F(a, b, c, x)$ geltenden Differentialgleichung

$$x(1-x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+[c-(a+b+1)x]\frac{\partial y}{\partial x}-aby=0$$

über, wenn man resp. setzt:

$$a=\tfrac{1}{12}\ , \quad b=\tfrac{1}{12}\ , \quad c=\tfrac{2}{3}\ , \quad x=j^3\ , \qquad y=\delta \text{ oder } \delta h\ ,$$

$$a=\tfrac{1}{12}\ , \quad b=\tfrac{5}{12}\ , \quad c=1\ , \quad x=\frac{1}{j^3}\ , \qquad y=\alpha \text{ oder } \alpha h\ ,$$

$$a=\tfrac{1}{12}\ , \quad b=\tfrac{7}{12}\ , \quad c=1\ , \quad x=\frac{1}{1-j^3}\ , \quad y=\beta \text{ oder } \beta h\ .$$

6.

Auf diesem Wege erhält man folglich Ausdrücke von der Form AF_1+BF_2 nicht bloss für δ, α, β, sondern auch für die Producte δh, αh und βh, wenn F_1 und F_2 hypergeometrische Reihen bezeichnen, welche den betreffenden Differentialgleichungen als particuläre Integrale genügen [1]). Endlich ergeben sich zugleich die Werthe der GAUSS'schen arithmetisch-geometrischen Mittel:

$$\mu=(\pm D)^{\frac{1}{12}}\frac{1}{\delta}=(\pm G)^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\alpha}=(\pm H)^{\frac{1}{6}}\frac{1}{\beta}\ ,$$

$$\mu'=(\pm D)^{\frac{1}{12}}\frac{\pi}{\delta h}=(\pm G)^{\frac{1}{4}}\frac{\pi}{\alpha h}=(\pm H)^{\frac{1}{6}}\frac{\pi}{\beta h}\ .$$

---

1) Siehe F. KLEIN in den Mathem. Annalen, Bd. 14, S. 124, wo auch die Abhandlung von H. A. SCHWARZ im BORCHARDT'schen Journal, Bd. 75, und die Dorpater Festschrift von H. BRUNS (1875) angeführt werden.

Digitized by Google

Obschon die Anzahl der aus dem Vorigen entspringenden hypergeometrischen Entwickelungen eine sehr grosse ist [1], so lassen sich doch noch weitere solche Reihen durch Einführung der Modulfunctionen $\gamma\gamma_2\gamma_3$ ableiten.

Mittelst der cubischen Gleichung

$$4\gamma'^3 = 3j\gamma' + 1$$

findet man

$$\frac{\partial\gamma'}{\partial j} = \frac{\gamma'\gamma'}{2j\gamma'+1}\,, \qquad \frac{\partial^2\gamma'}{\partial j^2} = -\frac{2j}{2j\gamma'+1}\left(\frac{\partial\gamma'}{\partial j}\right)^2\,,$$

und damit

$$\gamma'^2\,\frac{\gamma'^3-1}{4\gamma'^3-1}\,\frac{\partial^2\delta}{\partial\gamma'^2} + \tfrac{1}{2}\gamma'\,\frac{\partial\delta}{\partial\gamma'} + \tfrac{1}{16}\delta = 0\,.$$

Particuläre Integrale dieser Gleichung werden die hypergeometrischen Functionen

$$F_1 = \gamma'^{\frac{1}{4}} F(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, 1, \gamma'^3)\,, \qquad F_2 = \gamma'^{-\frac{1}{4}} F\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, 1, \frac{1}{\gamma'^3}\right)$$

$$F_3 = \gamma'^{\frac{1}{4}} F(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, 1-\gamma'^3), \quad F_4 = \gamma'^{\frac{1}{4}}(1-\gamma'^3)^{\frac{1}{2}} F(\tfrac{3}{4}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{3}{2}, 1-\gamma'^3).$$

Für $\gamma' = \gamma_3$ ist hierin z. B. die bekannte Entwicklung enthalten

$$\vartheta_3^2 = \frac{2K}{\pi} = F(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, 1, 4\varkappa^2\varkappa'^2)\,.$$ [2]

---

1) Als particuläre Integrale für δ erhält man z. B.

$$F_1 = F(\tfrac{1}{12}, \tfrac{1}{12}, \tfrac{2}{3}, j^3)\,, \qquad F_2 = jF(\tfrac{5}{12}, \tfrac{5}{12}, \tfrac{4}{3}, j^3)\,,$$

$$F_3 = F(\tfrac{1}{12}, \tfrac{1}{12}, \tfrac{1}{2}, 1-j^3)\,, \qquad F_4 = (1-j^3)\,F(\tfrac{7}{12}, \tfrac{7}{12}, \tfrac{3}{2}, 1-j^3)\,,$$

$$F_5 = j^{-\frac{1}{3}} F\left(\tfrac{1}{12}, \tfrac{5}{12}, 1, \frac{1}{j^3}\right)\,,$$

nebst den zahlreichen durch die EULER'schen und KUMMER'schen Transformationen daraus hervorgehenden Formen.

2) KUMMER in CRELLE's Journal Bd. 15, S. 145.

Digitized by Google

Prof. Pfeffer *machte Mittheilungen über die im botanischen Institut angestellten Untersuchungen des Herrn P. Eschenhagen betreffend den Einfluss der Concentration des Nährmediums auf das Wachsthum der Schimmelpilze.*

Das Wachsthum von Schimmelpilzen auf concentrirten Lösungen ist wohl durch beiläufige Beobachtungen bekannt, doch fehlt es an einer näheren Untersuchung über die zulässigen Concentrationen, und ein Versuch, die Accommodation an hoch concentrirte Lösungen zu erklären, wurde bisher überhaupt noch nicht gemacht.

Die Versuche wurden namentlich mit Aspergillus niger und Penicillium glaucum, nebenbei auch mit Botrytis cinerea und zwar für alle mit wesentlich gleichem Resultat durchgeführt. Diese Pilze wurden auf verschieden concentrirten Lösungen von Glycose, Glycerin, Natriumnitrat, Kaliumnitrat, Chlornatrium u. s. w. erzogen. Bei Verwendung von Glycose genügte die Zugabe einer kleinen Menge — insgesammt von 0,6 Proc. — der nöthigen anorganischen Salze, bei Culturen auf den Salzlösungen wurde ausserdem $^1/_2$ Proc. Glycose als organische Nahrung zugefügt.

Allgemein ergab sich, dass mit steigender Concentration das Wachsthum verlangsamt und endlich ganz sistirt wird. Als höchste Concentration, bei der noch merkliche Pilzentwicklung aus Conidien eintrat, wurden für Aspergillus niger, auf welchen sich alle Angaben beziehen, folgende Grenzwerthe gefunden, welche die Concentration in Gewichtsprocenten angeben. Zur besseren Vergleichung miteinander ist in Klammern daneben jedesmal die den bezüglichen Stoffen isotonische Lösung von Natriumnitrat angeführt. Als Grenzwerthe ergaben sich so für Traubenzucker 55 % (18 %); Glycerin 43 % (23,5 %);

Digitized by Google

Natriumnitrat 21 % (21 %); Chlornatrium 17 % (27 %); Chlorcalcium 18 % (18 %).

Die obigen Grenzwerthe fallen also nicht genau mit der relativen osmotischen Leistung der angewandten Stoffe zusammen. Doch soll an dieser Stelle weder auf diesen Punkt, noch auf die Grössendifferenz der unter verschiedenen Bedingungen erwachsenen Zellen eingegangen werden.

Ein hervorragendes Interesse hat aber die osmotische Leistungsfähigkeit des Zellinhalts. Denn bekanntlich wachsen allein turgescente Zellen und da bei dem auf ganz verdünnten Lösungen erzogenen Aspergillus schon durch eine 7 proc. Lösung von Natriumnitrat Plasmolyse erzielt wird, muss in den auf concentrirten Lösungen gedeihenden Pilzen die Summe der osmotisch wirksamen Stoffe in den Zellen gesteigert sein. Dieses wurde in der That in allen Versuchen bestätigt gefunden, von denen ich hier nur einige der mit Glycose erhaltenen Resultate mittheile. In der Columne I ist der gewichtsprocentige Gehalt an Glycose verzeichnet. Die Columne II giebt diejenige Menge von Natriumnitrat an, welche der Nährlösung isotonisch ist, die, neben Glycose (1 % isotonisch mit 0,31 % Natriumnitrat) in allen Fällen eine mit 0,5 % Natriumnitrat isotonische Menge anorganischer Salze enthielt. In Columne III ist die zu beginnender Plasmolyse nöthige Menge von Natriumnitrat in Gewichtsprocenten angeführt. Die Columne IV $(p - c)$ gibt an, um wie viel, ausgedrückt in Natriumnitrat, die Nährflüssigkeit durch die osmotische Befähigung des Zellinhalts übertroffen wird. In Columne V $\left(\frac{p}{c}\right)$ ist das osmotische Verhältniss zwischen der zur Cultur verwandten und der plasmolysirenden Lösung zum Ausdruck gekommen.

I Glycose Gew.proc.	II c Isotonischer Werth in Natriumnitrat	III p Plasmolyse durch Natriumnitrat erzielt durch:	IV $p - c$	V $\frac{p}{c}$
1 %	0,8 %	8,5 Gew.proc.	7,7	16,6
10	3,6	15	11,4	4,1
20	6,7	23	16,3	3,4
30	9,8	30	20,2	3,0
40	12,9	36	23,1	2,7
50	16,0	38	22	2,3

Digitized by Google

Aus dieser Tabelle ist sofort ersichtlich (in Columne III), dass die absolute osmotische Leistung (die Zelle in reinem Wasser gedacht) mit der Concentration der Nährlösung sehr ansehnlich steigt. Und zwar steigt der Turgor, d. h. die in der Zelle zur Geltung kommende osmotische Leistung, wie Columne IV lehrt, in sehr erheblicher Weise mit der Concentration des Nährmediums. Im Verhältniss zu diesem nehmen freilich die wirkliche osmotische Leistung (ausgedrückt in Columne IV) und die absolute osmotische Leistungsfähigkeit (Columne III) viel langsamer zu, wie für letzteres Verhältniss in Columne V zu ersehen ist.

Entsprechend der entwickelten hohen osmotischen Spannung werden die Zellen zersprengt, wenn man die auf hoch concentrirter Lösung erwachsenen Pilze plötzlich in reines Wasser bringt. Führt man hingegen eine sehr allmähliche Verdünnung der Nährflüssigkeit herbei, so accommodiren sich die Pilze und nach 1 bis 2 Tagen ist die Turgorkraft, auch in den bei Beginn des Versuchs schon ausgewachsenen Zellen, ungefähr auf die Werthe gesunken, welche bei directer Cultur auf Lösungen entsprechender Concentration erhalten werden. Umgekehrt nimmt die Turgorkraft in den Zellen zu, wenn eine verdünntere Nährlösung allmählich in eine concentrirtere übergeführt wird.

Schon die letzterwähnten Erfahrungen beweisen, dass nicht etwa geringere Volumzunahme der Segmente die höhere osmotische Fähigkeit in den auf concentrirten Lösungen erwachsenden Pilzen bedingen kann. Uebrigens ergeben sich auch für die Scheitelzelle und für die ausgewachsenen Zellen des Myceliums annähernd gleiche plasmolytische Werthe.

Eine einfache diosmotische Aufnahme der in der Nährflüssigkeit gelösten Körper kann nicht die mit der Concentration sich einstellende absolute Steigerung der wirklichen osmotischen Leistungsfähigkeit ($p - c$ der Tabelle) erklären. Und thatsächlich lässt sich auch für concrete Fälle zeigen, dass in Folge gesteigerter Concentration im Stoffwechsel der Zelle osmotisch wirkende Körper in entsprechender Weise erzeugt werden, dass also Abnahme und Zunahme der Concentration als ein Reiz wirken, welcher den Stoffwechsel der Zelle regulirt.

Das Gesagte geht schlagend daraus hervor, dass in Aspergillus, der auf concentrirter Glycoselösung erwachsen war, weder mikrochemisch, noch makrochemisch Glycose nachzu-

Digitized by Google

weisen war, auch wenn zu letzterem Zwecke eine Pilzernte im Gewicht von einigen Gramm nach Abwaschen in isotonischer Salpeterlösung Verwendung fand. Ferner wurde Aspergillus auf einer Lösung mit 43 % krystallisirtem Natriumsulfat cultivirt und die 3 g Frischgewicht ergebende Ernte auf Schwefelsäure geprüft. Von dieser fanden sich aber nur ganz geringe Mengen in dem Pilze, obgleich die Ernte ungefähr 0,5 g hätte enthalten müssen, wenn einfache Aufnahme von Natriumsulfat die Zunahme osmotisch wirkender Stoffe in der Zelle bewirkt hätten.

Wenn freilich diosmirende Körper in der Nährflüssigkeit geboten sind, müssen diese unvermeidlich in die Zelle eindringen und dieser Umstand wird z. B. bei dem in Zellen relativ leicht eindringenden Glycerin voraussichtlich im Spiele sein. Mit Rücksicht auf die absolute Zunahme des osmotischen Ueberschusses, den auch die Glycerinculturen geben, muss daneben auch noch die durch Reiz veranlasste Stoffwechselthätigkeit der Zellen in dem besagten Sinne wirksam sein.

In dieser von der Concentration des Aussenmediums abhängigen Reizwirkung besitzen aber unsere Pflanzen eine ausgezeichnete Einrichtung, um die osmotische Leistung der Zellen selbstthätig zu reguliren. In gleicher Weise werden sicherlich auch die Zellen höherer Pflanzen in mehr oder weniger hohem Grade befähigt sein. Eine analoge Selbstregulation spricht sich übrigens auch darin aus, dass schnell wachsende Zellen, auch die höherer Pflanzen, trotz sehr ansehnlicher Volumzunahme ungefähr gleichen Turgor bewahren, also mit der Verdünnung des Zellinhaltes in erhöhtem Grade osmotisch wirksame Stoffe produciren.

Digitized by Google

Martin Krause, *Zur Theorie der doppelt periodischen Functionen zweiter und dritter Art.*

Die doppelt periodischen Functionen dritter Art sind bisher im Wesentlichen nur in einer Hinsicht untersucht worden und zwar in Beziehung auf ihre Entwicklung in trigonometrische Reihen. Im Folgenden sollen die genannten Functionen nach zwei anderen Gesichtspunkten hin untersucht werden und zwar in Bezug auf ihre Entwickelung in Potenzreihen und in Bezug auf ihre Differentialquotienten. Wie in früheren Arbeiten soll dabei die Theorie der Functionen dritter Art zusammen mit der Theorie der Functionen zweiter Art entwickelt werden, da die letzteren als specieller Fall der ersteren angesehen werden können. In Betreff der Functionen zweiter Art möge vor Allem auf das kürzlich erschienene Werk von HALPHEN über elliptische Transcendenten verwiesen werden, in dem sich das Wesentlichste vorfindet, was über diese Functionen veröffentlicht ist. Die im Verlauf der folgenden Arbeit behandelten Probleme finden sich in dem genannten Werke nur in aller Kürze skizzirt vor, so dass sich auch hier einiges Neue ergiebt.

§ 1.

Die Entwickelung der doppelt periodischen Functionen zweiter Art in Potenzreihen.

Als Grundfunctionen aller doppelt periodischen Functionen zweiter Art können bekanntlich Functionen von der Form angenommen werden:

$$f(v) = \frac{\vartheta_1(v+a)}{\vartheta_0(v)\cdot\vartheta_0(a)}\cdot e^{-\frac{\vartheta_0'(a)}{\vartheta_0(a)}v}. \tag{1}$$

Digitized by Google

Wir wollen zunächst die Function ins Auge fassen:

$$(2) \qquad \varphi(v) = \frac{\vartheta_1(v+a)}{\vartheta_0(a)} e^{-\frac{\vartheta_0'(a)}{\vartheta_0(a)} v} .$$

Dieselbe leistet den Gleichungen Genüge:

$$\frac{\partial \log \varphi(v)}{\partial v} = \frac{\partial \log \vartheta_1(v+a)}{\partial v} - \frac{d \log \vartheta_0(a)}{da} ,$$

$$\frac{\partial \log \varphi(v)}{\partial a} = \frac{\partial \log \vartheta_1(v+a)}{\partial a} - \frac{d \log \vartheta_0(a)}{da} - \frac{d^2 \log \vartheta_0(a)}{da^2} v .$$

Mithin erhalten wir die Relation:

$$(3) \qquad \frac{\partial \varphi(v)}{\partial v} - \frac{\partial \varphi(v)}{\partial a} = v \cdot \varphi(v) \cdot \frac{d^2 \log \vartheta_0(a)}{da^2} .$$

Wir können nun die Entwickelung ansetzen:

$$(4) \qquad \varphi(v) = c_0 + c_1 v + c_2 v^2 + \cdots c_n v^n + \cdots$$

und erhalten vermöge der letzten Differentialgleichung die Beziehung:

$$(5) \qquad (n+1) c_{n+1} - \frac{d c_n}{da} - c_{n-1} \cdot \frac{d^2 \log \vartheta_0(a)}{da^2} = 0 .$$

Es genügt also, die Werthe der beiden ersten Coefficienten zu fixiren, um sie alle zu kennen.

Es ist aber:

$$(6) \qquad \begin{aligned} c_0 &= \frac{\vartheta_1(a)}{\vartheta_0(a)} = \sqrt{\varkappa}\, \mathrm{sn}\alpha , \\ c_1 &= \frac{d \frac{\vartheta_1(a)}{\vartheta_0(a)}}{da} = \sqrt{\varkappa} \frac{d\, \mathrm{sn}\alpha}{da} , \end{aligned}$$

wenn gesetzt ist:

$$\sqrt{\varkappa} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3} , \quad a = \pi \vartheta_3^2 \cdot \alpha .$$

Aus dem Bemerkten folgt, dass das Problem die Coefficienten c_n zu bestimmen im Wesentlichen darauf hinauskommt die beiden Functionen:

Digitized by Google

$$\operatorname{sn}\alpha \text{ und } \frac{d^2 \log \vartheta_0(a)}{da^2}$$

zu differenziren.

Die einfachsten hierhin gehörenden Formeln lauten:

$$\frac{d \operatorname{sn}\alpha}{da} = \pi \vartheta_3^2 \cdot \operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha \ ,$$

$$\frac{d^2 \operatorname{sn}\alpha}{da^2} = -(\pi\vartheta_3^2)^2 \operatorname{sn}\alpha(1+\varkappa^2-2\varkappa^2\operatorname{sn}^2\alpha) \ ,$$

$$\frac{d^3 \operatorname{sn}\alpha}{da^3} = -(\pi\vartheta_3^2)^3 \operatorname{cn}\alpha\cdot\operatorname{dn}\alpha(1+\varkappa^2-6\varkappa^2\operatorname{sn}^2\alpha) \ ,$$

$$\frac{d^4 \operatorname{sn}\alpha}{da^4} = (\pi\vartheta_3^2)^4 \operatorname{sn}\alpha(1+14\varkappa^2+k^4-20\varkappa^2(1+\varkappa^2)\operatorname{sn}^2\alpha+24\varkappa^4\operatorname{sn}^4\alpha) \ ,$$

$$\frac{d^5 \operatorname{sn}\alpha}{da^5} =$$

$$(\pi\vartheta_3^2)^5 \operatorname{cn}\alpha\cdot\operatorname{dn}\alpha(1+14\varkappa^2+\varkappa^4-60\varkappa^2(1+\varkappa^2)\operatorname{sn}^2\alpha+120\varkappa^4\operatorname{sn}^4\alpha),$$

. . . .

$$\frac{d^2 \log \vartheta_0(a)}{da^2} = \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} - \left(\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_0}\right)^2 \varkappa \operatorname{sn}^2\alpha \ ,$$

$$\frac{d^3 \log \vartheta_0(a)}{da^3} = -2\pi\vartheta_1'^2 \frac{\varkappa}{i} \operatorname{sn}\alpha\cdot\operatorname{cn}\alpha\cdot\operatorname{dn}\alpha \ ,$$

$$\frac{d^4 \log \vartheta_0(a)}{da^4} = -2\left(\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_0}\right)^4\left(1-2\left(\varkappa+\frac{1}{\varkappa}\right)\varkappa\operatorname{sn}^2\alpha+3\varkappa^2\operatorname{sn}^4\alpha\right) \ ,$$

$$\frac{d^5 \log \vartheta_0(a)}{da^5} = 8\pi\left(\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_0}\right)^4 \vartheta_2^2 \cdot \operatorname{sn}\alpha\cdot\operatorname{cn}\alpha\cdot\operatorname{dn}\alpha\left(\varkappa+\frac{1}{\varkappa}-3\varkappa\operatorname{sn}^2\alpha\right) \ ,$$

$$\frac{d^6 \log \vartheta_0(a)}{da^6} =$$

$$8\left(\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_0}\right)^6\left[\left(\varkappa+\frac{1}{\varkappa}\right)-\left(2\left(\varkappa+\frac{1}{\varkappa}\right)^2+9\right)\varkappa\operatorname{sn}^2\alpha+15\left(\varkappa+\frac{1}{\varkappa}\right)\varkappa^2\operatorname{sn}^4\alpha-15\varkappa^3\operatorname{sn}^6\alpha\right].$$

. . . .

Mit Hülfe dieser Formeln ergiebt sich:

Digitized by Google

$$\vartheta'_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{z}\,\mathrm{sn}\,\alpha\left(\frac{\vartheta''_0}{\vartheta_0} - \pi\vartheta_3^2\,\tfrac{1}{2}(1-x^2) - \pi\vartheta_3^2\,\tfrac{1}{2}x^2\,\mathrm{sn}^2\,\alpha\right).$$

$$\vartheta'_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{z}\cdot\pi\cdot\vartheta_3^2\,\mathrm{cn}\,\alpha\cdot\mathrm{dn}\,\alpha\left(\tfrac{1}{2}\frac{\vartheta''_0}{\vartheta_0} - \tfrac{1}{2}\pi\vartheta_3^2\,\tfrac{1}{2}(1-x^2) - \frac{\pi\vartheta_3^2\,\tfrac{1}{2}x^2\mathrm{sn}^2\alpha}{2}\right).$$

$$\vartheta'_4 = \tfrac{1}{2}\sqrt{z}\,\mathrm{sn}\,\alpha\left(\tfrac{1}{2}\left(\frac{\vartheta''_0}{\vartheta_0}\right)^2 - \pi\vartheta_3^2\,\tfrac{1}{2}(1-x^2)\frac{\vartheta''_0}{\vartheta_0} + \frac{\pi\vartheta_3^2}{6}(1-\tfrac{1}{2}x^2-x^4)\right)$$

$$-\tfrac{1}{2}\sqrt{z}\,\mathrm{sn}^3\alpha\cdot\pi\vartheta_3^2\,\tfrac{1}{2}x^2\left(\frac{\vartheta''_0}{\vartheta_0} - \pi\vartheta_3^2\,\tfrac{1}{2}x^2\frac{1-x^2}{3}\right) - \tfrac{1}{2}\sqrt{z}\,\mathrm{sn}^5\alpha\cdot\pi\vartheta_3^2\,\frac{x^4}{6}.$$

. . . .

Ganz allgemein ergiebt sich der

Lehrsatz:

Die sämmtlichen Coefficienten in der Entwickelung der Functionen q_ν nach Potenzen von v lassen sich ganz und rational aus $\mathrm{sn}\,\alpha$ und $\mathrm{cn}\,\alpha\cdot\mathrm{dn}\,\alpha$ darstellen. Als Constanten treten die Grössen ϑ_α und ϑ''_0 rational auf.

Die Constanten können in eine einfachere Form gebracht werden, wenn wir an Stelle der ursprünglichen Function die Function betrachten:

$$\psi(v) = \frac{1}{\sqrt{z}}\,\frac{\vartheta_1(v+a)}{\vartheta_0 a}\,e^{-\frac{\vartheta'_0 a}{\vartheta_0 a}v - \frac{\vartheta''_0}{\vartheta_0}\frac{v^2}{2}}. \tag{8}$$

Für diese Function wird nämlich:

$$\frac{\partial \log \psi(v)}{\partial v} = \frac{\partial \log \vartheta_1(v+a)}{\partial v} - \frac{d\log\vartheta_0(a)}{da} - \frac{\vartheta''_0}{\vartheta_0}v, \tag{9}$$

so dass die Differentialgleichung die Form annimmt:

$$\frac{\partial \log\psi(v)}{\partial v} - \frac{\partial\log\psi(v)}{\partial a} = v\left(\frac{d^2\log\vartheta_0(a)}{da^2} - \frac{\vartheta''_0}{\vartheta_0}\right). \tag{10}$$

Es hebt sich also die Constante $\frac{\vartheta''_0}{\vartheta_0}$ fort und wir finden, dass in der Entwickelung der Function $\psi(v)$ als Constanten lediglich die Grössen ϑ_α auftreten.

Digitized by Google

Noch übersichtlicher gestalten sich die Resultate, wenn wir als Argument die Grösse w einführen, die mit v durch die Gleichung verbunden ist:

$$w = \pi \cdot \vartheta_3^2 v \ . \tag{11}$$

Wir erhalten dann den

Lehrsatz:

Die sämmtlichen Coefficienten in der Entwickelung der Function $\psi(v)$ nach Potenzen von w lassen sich ganz und rational aus $sn\,\alpha$ und $cn\,\alpha \cdot dn\,\alpha$ darstellen. Als Constante tritt die Grösse $\varkappa^2$ ganz und rational auf.

Auf Grund dieser Sätze kann nun unmittelbar die Entwickelung der Function $f(v)$ gefunden werden.

In der That, die Function:

$$\frac{\vartheta_0}{\vartheta_0(v)} e^{\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\frac{v^2}{2}}$$

lässt sich nach Potenzen von w entwickeln, so zwar, dass die Coefficienten sich ganz und rational aus der Constanten $\varkappa^2$ zusammensetzen lassen.

Es folgt:

$$\frac{\vartheta_0}{\vartheta_0(v)} e^{\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\frac{v^2}{2}} = 1 + a_2 w^2 + a_4 w^4 + a_6 w^6 + \cdots \ , \tag{12}$$

wobei ist:

$$a_2 = 0 \ , \quad a_4 = \frac{2\varkappa^2}{4!} \ , \quad a_6 = -\frac{8(\varkappa^2 + \varkappa^4)}{6!} \ ,$$

$$a_8 = \frac{32(\varkappa^2+\varkappa^6)+348\varkappa^4}{8!} \ , \quad a_{10} = -\frac{128(\varkappa^2+\varkappa^8)+690(\varkappa^4+\varkappa^6)}{10!} \ , \ \ldots$$

Multipliciren wir diese Entwicklung mit der der früher betrachteten Function, so folgt der

Lehrsatz:

Die Function:

Digitized by Google

$$\frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \frac{\vartheta_0 \cdot \vartheta_1(v+a)}{\vartheta_0(v) \cdot \vartheta_0(a)} e^{-\frac{\vartheta_0'(a)}{\vartheta_0(a)} v}$$

lässt sich nach steigenden Potenzen von w entwickeln. Die Coefficienten sind ganze rationale Functionen von $\operatorname{sn}\alpha$ und $\operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha$, die als Constante die Grösse $\varkappa^2$ ganz und rational enthalten.

Setzen wir die Reihe gleich:

$$b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + \cdots$$

so wird:

$$b_0 = \operatorname{sn}\alpha\,, \quad b_1 = \operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha\,, \quad b_2 = \frac{\operatorname{sn}\alpha\,(-1-\varkappa^2+\varkappa^2\operatorname{sn}^2\alpha)}{2}\,,$$

$$b_3 = \frac{\operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha\,(-1-\varkappa^2+\varkappa^2\operatorname{sn}^2\alpha)}{3!}\,,$$

(13)
$$b_4 = \frac{\operatorname{sn}\alpha\,[1\varkappa^2+(1+\varkappa^2-\varkappa^2\operatorname{sn}^2\alpha)^2]}{4!}\,,$$

$$b_5 = \frac{\operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha\,[12\varkappa^2+(1+\varkappa^2-\varkappa^2\operatorname{sn}^2\alpha)^2]}{5!}$$

. . . . .

So haben wir eine Methode angegeben, mit deren Hülfe eine ganz bestimmte Function in Potenzreihen entwickelt werden kann. Aus dieser Entwickelung ergeben sich nun mit Hülfe der Substitution halber Perioden und der linearen Transformation sofort die Entwickelungen einer Reihe weiterer Primfunctionen. In der That, wir sind berechtigt links und rechts a um halbe Perioden zu vermehren. Wir erhalten auf diese Weise die Entwickelung dreier anderen Quotienten in Potenzreihen von w.

Ferner zeigt sich aber auch die lineare Transformation von Bedeutung.

In der That, setzen wir links und rechts an Stelle v und τ die Grössen v', τ', die durch die Gleichungen definirt sind:

(14)
$$\tau' = \frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\,, \quad v' = (a_0 + a_1\tau')v = \frac{v}{b_1 - a_1\tau}\,,$$

wobei $a_0\, b_0\, a_1\, b_1$ ganze Zahlen sind, die der Gleichung Genüge leisten:

Digitized by Google

$$a_0 b_1 - a_1 b_0 = 1 \quad , \tag{15}$$

so erhalten wir die bekannten Beziehungen der linearen Transformation.

Es mögen die Uebergänge stattfinden:

$$\begin{aligned}
e^{i\pi(a_0 + a_1\tau')a_1 v^2} \cdot \vartheta_1(v', \tau') &= c \cdot \varepsilon_1 \cdot \vartheta_1(v, \tau) \quad , \\
e^{i\pi(a_0 + a_1\tau')a_1 v^2} \cdot \vartheta_0(v', \tau') &= c \cdot \varepsilon_0 \cdot \vartheta_\alpha(v, \tau) \quad , \\
e^{i\pi(a_0 + a_1\tau')a_1 v^2} \cdot \vartheta_2(v', \tau') &= c \cdot \varepsilon_2 \cdot \vartheta_\beta(v, \tau) \quad , \\
e^{i\pi(a_0 + a_1\tau')a_1 v^2} \cdot \vartheta_3(v', \tau') &= c \cdot \varepsilon_3 \cdot \vartheta_\gamma(v, \tau) \quad ,
\end{aligned} \tag{16}$$

wobei $\varepsilon_0\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3$ achte Einheitswurzeln bedeuten und c eine allen Thetafunctionen gemeinsame Constante ist, dann geht der ursprüngliche Quotient:

$$\frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \frac{\vartheta_0 \cdot \vartheta_1(v+a)}{\vartheta_0(v) \cdot \vartheta_0(a)} e^{-\frac{\vartheta_0'(a)}{\vartheta_0(a)} \cdot v}$$

über in den Quotienten:

$$\frac{\vartheta_\alpha \cdot \vartheta_\gamma}{\vartheta_\beta} \cdot \frac{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_3}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_2} \cdot \frac{\vartheta_1(v+a)}{\vartheta_\alpha(v) \cdot \vartheta_\alpha(a)} e^{-\frac{\vartheta_\alpha'(a)}{\vartheta_\alpha(a)} \cdot v} \quad ,$$

während die Potenzreihe für den ersten Ausdruck in eine Potenzreihe für den zweiten übergeht.

Auf diesem Wege können wir aus der ursprünglichen Reihe fünf andere herleiten, die mit derselben zusammen zu je zweien zu der nämlichen Function gehören und in Folge dessen Bedingungsgleichungen ergeben, denen die Entwickelungscoefficienten Genüge leisten.

Setzen wir z. B.

$$a_0 = 1 \quad , \quad a_1 = 1 \quad , \quad b_0 = 0 \quad , \quad b_1 = 1 \quad ,$$

so folgt: Die Entwickelung von

$$\frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \frac{\vartheta_0 \cdot \vartheta_1(v+a)}{\vartheta_0(v) \cdot \vartheta_0(a)} \cdot e^{-\frac{\vartheta_0'(a)}{\vartheta_0(a)} v}$$

Digitized by Google

nach Potenzen von w bleibt ungeändert, wenn an Stelle von:

$$w,\ \mathrm{sn}\ a,\ \mathrm{cn}\ a,\ \mathrm{dn}\ a,\ \sqrt{\varkappa}$$

der Reihe nach gesetzt wird:

$$kw,\ \varkappa\ \mathrm{sn}\ a,\ \mathrm{dn}\ a,\ \mathrm{cn}\ a,\ \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\ .$$

Die Functionen, die sich auf diese Weise ergeben, haben die Eigenthümlichkeit, dass im Nenner niemals die Function $\vartheta_1(v)$ zu stehen kommt. In der That modificiren sich auch in einem solchen Falle die Resultate, wenn auch die Methode dieselbe bleibt. Die Entwickelung der reciproken ϑ_1-Function hat die Form:

$$\frac{\sqrt{\varkappa}\vartheta_0 \cdot e^{\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\frac{v^2}{2}}}{\vartheta_1(v)} = \frac{1}{w} + c_1 w + c_2 w^3 + \cdots ,$$

so dass wir das Resultat erhalten:

Die Function

$$\frac{\vartheta_0 \cdot \vartheta_1(v+a)}{\vartheta_0(a) \cdot \vartheta_1(v)}\, e^{-\frac{\vartheta_0'(a)}{\vartheta_0(a)}v} - \frac{\mathrm{sn}\ a}{w}$$

lässt sich in der früheren Weise nach Potenzen von w entwickeln.

Wir haben im vorangegangenen die Primfunctionen als Product zweier Functionen dargestellt. Es ist das geschehen, um sofort die Analogien zu den Functionen dritter Art zu haben.

Für die Entwickelung der Functionen zweiter Art allein würde sich eine andere Methode mehr empfehlen, die im dritten Paragraphen entwickelt werden soll.

§ 2.

Die Entwickelung der doppelt periodischen Functionen dritter Art in Potenzreihen.

Nach früheren Untersuchungen ist klar, dass wir uns bei der Entwicklung der allgemeinen doppelt periodischen Func-

Digitized by Google

tionen dritter Art auf die Entwickelung gewisser Primfunctionen beschränken können. — Wir wollen hierbei von vorneherein annehmen, dass die charakteristische Zahl n eine ungerade Zahl sei, indem wir bemerken, dass der entgegengesetzte Fall durchaus analog behandelt werden kann. Wenn dann die Zahl der Nullstellen grösser ist als die Zahl der Unendlichkeitsstellen, so können wir als Primfunction die Function zu Grunde legen:

$$\frac{\vartheta_1(nv + na, n\tau)}{\vartheta_0(v,\tau) \cdot \vartheta_0(na, n\tau)} .$$

Die Entwickelung derselben kann in doppelter Weise gegeben werden.

In der That, seien zunächst $a_1 \cdots a_n$ ganz beliebige Grössen, so können wir vermöge der Untersuchungen des ersten Paragraphen die Function entwickeln:

$$\prod_1^n \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \frac{\vartheta_1(v + a_r)}{\vartheta_0(a_r)} e^{-\frac{\vartheta_0'(a_r)}{\vartheta_0(a_r)} v - \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} \frac{v^2}{2}} .$$

Die Coefficienten setzen sich ganz und rational aus den elliptischen Functionen mit den Argumenten a_r und der Constanten $\varkappa^2$ zusammen.

Wir setzen nun an Stelle der Grössen $a_1 \ldots a_n$ der Reihe nach $a, a + \frac{1}{n}, \ldots a + \frac{n-1}{n}$ und nehmen die bekannten Beziehungen hinzu:

$$\prod_0^{n-1} \vartheta_1\left(v + a + \frac{r}{n}\right) = c \cdot \vartheta_1(nv + na, n\tau) ,$$

$$\prod_0^{n-1} \vartheta_0\left(v + a + \frac{r}{n}\right) = c \cdot \vartheta_0(nv + na, n\tau) ,$$

wobei c eine Constante bedeutet, die in beiden Fällen den nämlichen Werth hat, dann erhalten wir den

Lehrsatz:

Die Function:

Digitized by Google

$$(\varkappa)^{-\frac{n}{2}} \cdot \frac{\vartheta_1(nv+na, n\tau)}{\vartheta_0(na, n\tau)} \cdot e^{-\frac{\vartheta_0'(na, n\tau)}{\vartheta_0(na, n\tau)} nv - \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} n \frac{v^2}{2}}$$

lässt sich nach Potenzen von w entwickeln. Die Coefficienten setzen sich ganz und rational aus den elliptischen Functionen mit den Argumenten $\alpha + \frac{2rK}{n}$ und der Constanten $\varkappa^2$ zusammen oder auch rational aus den elliptischen Functionen mit dem Argumente α und den Constanten $sn\left(\frac{2rK}{n}\right)$, $cn\left(\frac{2rK}{n}\right)$, $dn\left(\frac{2rK}{n}\right)$ und $\varkappa^2$.

Für die wirkliche Berechnung der Coefficienten können dann ganz ähnliche Recursionsformeln wie im ersten Paragraphen aufgestellt werden. Es kann von der Entwicklung derselben füglich abgesehen werden. Zweitens aber können wir in den Formeln der ersten Paragraphen von vorneherein an Stelle von:

$$v,\ a,\ \tau,\ w,\ \alpha,\ \varkappa$$

gesetzt denken:

$$nv,\ na,\ n\tau,\ w_1,\ \alpha_1,\ c\ ,$$

wobei:

$$w_1 = n\pi\vartheta_3^2(0, n\tau)\, v = \pi \cdot n \cdot \Theta_3^2 \cdot v\ ,$$

$$\alpha_1 = n\pi\vartheta_3^2(0, n\tau)\, a = \pi \cdot n \cdot \Theta_3^2 \cdot \alpha$$

ist und c den transformirten Modul bedeutet.

Dann erhalten wir das Resultat:

Die Function:

$$\frac{1}{\sqrt{c}} \frac{\vartheta_1(nv+na, n\tau)}{\vartheta_0(na, n\tau)} \cdot e^{-\frac{\vartheta_0'(na, n\tau)}{\vartheta_0(na, n\tau)} nv - \frac{\Theta_0''}{\Theta_0} \frac{n^2v^2}{2}}$$

lässt sich nach Potenzen von w_1 entwickeln. Die Coefficienten sind ganze rationale Functionen der elliptischen Functionen mit dem Argumente α_1 und der Constanten c^2.

Multipliciren wir die beiden Reihen mit

$$\frac{\vartheta_0}{\vartheta_0(v, \tau)} e^{\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} \frac{v^2}{2}}\ ,$$

Digitized by Google

so ergiebt sich für unsere Primfunction eine doppelte Darstellung, die durch die folgenden Lehrsätze charakterisirt wird.

Erstens.

Die Function:

$$(x)^{-\frac{n}{2}} \frac{\vartheta_0 \cdot \vartheta_1(nv+na, n\tau)}{\vartheta_0(v,\tau)\cdot\vartheta_0(na,n\tau)} \cdot e^{-\frac{\vartheta_0'(na,n\tau)}{\vartheta_0(na,n\tau)} nv - \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}(n-1)\frac{v^2}{2}}$$

lässt sich nach Potenzen von w entwickeln. Die Coefficienten setzen sich ganz und rational aus den elliptischen Functionen mit den Argumenten $\alpha + \frac{2rK}{n}$ *und der Constanten* $\varkappa^2$ *zusammen oder auch rational aus den elliptischen Functionen mit dem Argumente* α *und den Constanten* $sn\left(\frac{2rK}{n}\right)$, $cn\left(\frac{2rK}{n}\right)$, $dn\left(\frac{2rK}{n}\right)$ und $\varkappa^2$.

Zweitens.

Die Function:

$$\frac{\vartheta_0}{\sqrt{c}} \frac{\vartheta_1(nv+na, n\tau)}{\vartheta_0(v,\tau)\cdot\vartheta_0(na,n\tau)} \cdot e^{-\frac{\vartheta_0'(na,n\tau)}{\vartheta_0(na,n\tau)} nv - \left(\frac{n^2\Theta_0''}{\Theta_0} - \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right)\frac{v^2}{2}}$$

lässt sich nach Potenzen von w entwickeln. Die Coefficienten setzen sich ganz und rational aus den elliptischen Functionen mit dem Argumente α_1 *und den Constanten* $\varkappa^2, c^2, \frac{\Theta_3^2}{\vartheta_3^2}$ *zusammen, wobei dann zwischen den letzteren Grössen die bekannten Beziehungen der Transformationstheorie bestehen.*

Auch hier ist die Substitution halber Perioden und die lineare Transformation von Bedeutung. Vermehren wir a um halbe Perioden, so erhalten wir die Entwickelung dreier neuer Functionen, ebenso lässt sich ohne weiteres die lineare Transformation anwenden. In der That, gebrauchen wir die früheren Bezeichnungen, so erhalten wir aus der Entwickelung der zuletzt hingeschriebenen Function mit Hülfe der allgemeinen linearen Transformation unmittelbar die Entwickelung der Function:

$$\frac{\vartheta_\alpha\cdot\Theta_\gamma}{\Theta_\beta}\cdot\frac{\varepsilon_1\cdot\varepsilon_3}{\varepsilon_0\cdot\varepsilon_2}\frac{\vartheta_1(nv+na,n\tau)}{\vartheta_\alpha(v,\tau)\,\vartheta_\alpha(na,n\tau)}\cdot e^{-\frac{\vartheta_\alpha'(na,n\tau)}{\vartheta_\alpha(na,n\tau)}nv-\left(\frac{n^2\Theta_\alpha''}{\Theta_\alpha}-\frac{\vartheta_\alpha''}{\vartheta_\alpha}\right)\frac{v^2}{2}}.$$

Digitized by Google

In ähnlicher Weise können die Functionen behandelt werden, bei denen die Zahl der Nullstellen kleiner ist, als die Zahl der Unendlichkeitsstellen. Dieselben setzen sich aus den Primfunctionen zusammen:

$$\frac{\vartheta_1(v-b,\tau)}{\vartheta_0(v-a,\tau)} \cdot \frac{1}{\vartheta_\alpha(nv,n\tau)} .$$

Die Entwickelung derselben erhalten wir, indem wir die Entwickelungen der beiden Functionen:

$$\frac{\vartheta_1(v-b,\tau)}{\vartheta_0(v-a,\tau)} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\vartheta_\alpha(nv,n\tau)}$$

mit einander multipliciren. Es kann füglich davon abgesehen werden, den hierauf bezüglichen Satz aufzustellen.

§ 3.

Die Differentialquotienten der doppelt periodischen Functionen zweiter Art mit einfachen Unendlichkeitspunkten.

Es sollen jetzt die allgemeinen Differentialquotienten der Function:

$$(1) \qquad f(v) = \frac{\vartheta_1(v+a)}{\vartheta_0(v)} \cdot e^{-\frac{\vartheta_0'(a)}{\vartheta_0(a)} v} ,$$

die die Primfunction der doppelt periodischen Function zweiter Art ist, gebildet werden.

Zunächst folge durch Differenziren:

$$\frac{df(v)}{dw} = \pi \cdot \vartheta_3^2 \cdot f(v) \left[\frac{\vartheta_1'(v+a)}{\vartheta_1(v+a)} - \frac{\vartheta_0'(v)}{\vartheta_0(v)} - \frac{\vartheta_0'(a)}{\vartheta_0(a)}\right]$$

$$= f(v) \left[\frac{\mathrm{cn}(w+\alpha) \cdot \mathrm{dn}(w+\alpha)}{\mathrm{sn}(w+\alpha)} - \varkappa^2 \,\mathrm{sn}\,\alpha \cdot \mathrm{sn}\, w \cdot \mathrm{sn}(w+\alpha)\right]$$

$$= f(v) \left[\frac{\mathrm{cn}w \cdot \mathrm{cn}\alpha \cdot \mathrm{dn}w \cdot \mathrm{dn}\alpha - \mathrm{sn}\, w \cdot \mathrm{sn}\,\alpha (1+\varkappa^2 - \varkappa^2(\mathrm{sn}^2 w + \mathrm{sn}^2\alpha)}{(1 - \varkappa^2 \,\mathrm{sn}^2\, w \cdot \mathrm{sn}^2\, \alpha \cdot) \,\mathrm{sn}(w+\alpha)}\right].$$

Andrerseits muss aber, wie aus dem HERMITESCHEN Transformationsprincip sofort folgt, eine Beziehung von der Form bestehen:

Digitized by Google

$$(\mathrm{sn}^2 w - \mathrm{sn}^2 \alpha)\frac{df(v)}{dw} = f(v)(c_1 + c_2 \cdot \mathrm{sn}^2 w + c_3 \,\mathrm{sn}\, w \cdot \mathrm{cn}\, w \cdot \mathrm{dn}\, w).$$

Die Constanten sind sofort nach bekannten Methoden bestimmt. Wir erhalten:

$$(2) \qquad \frac{df(v)}{dw} = f(v)\frac{\mathrm{sn}\, w \cdot \mathrm{cn}\, w \cdot \mathrm{dn}\, w - \mathrm{sn}\, \alpha \cdot \mathrm{cn}\, \alpha \cdot \mathrm{dn}\, \alpha}{\mathrm{sn}^2 w - \mathrm{sn}^2 \alpha} .$$

Aehnlich ergiebt sich für den zweiten Differentialquotienten die bekannte Formel:

$$(3) \qquad \frac{d^2 f(v)}{dw^2} = f(v) \cdot (2\varkappa^2 \mathrm{sn}^2 w - 1 - \varkappa^2 + \varkappa^2 \mathrm{sn}^2 \alpha) .$$

Diese Differentialgleichung hätte der Theorie der Entwickelung der Function $f(v)$ in eine Potenzreihe zu Grunde gelegt werden können. Mit ihrer Hülfe ergeben sich ohne weiteres Recursionsformeln, denen die Coefficienten Genüge leisten müssen.

Aus den beiden soeben entwickelten Differentialquotienten oder auch unmittelbar aus dem HERMITESCHEN Transformationsprincip folgt dann der

Lehrsatz:

Die sämmtlichen Differentialquotienten der Function $f(v)$ nach w lassen sich als Product von $f(v)$ und einer rationalen Function von $\mathrm{sn}\, w$ und $\mathrm{cn}\, w$ $\mathrm{dn}\, w$ darstellen. Die Coefficienten setzen sich rational aus $\mathrm{sn}\, \alpha$ und $\mathrm{cn}\, \alpha$ $\mathrm{dn}\, \alpha$ und der Constanten $\varkappa^2$ zusammen. Als Nenner tritt die Grösse $\mathrm{sn}^2 w - \mathrm{sn}^2 \alpha$ auf.

Die hierbei auftretenden Gesetze können noch näher specialisirt werden.

Setzen wir:

$$y = f(v) ,$$

so findet jedenfalls eine Relation von der Form statt:

$$(4) \qquad \frac{d^{2n-2} y}{dw^{2n-2}} + f_{n-1,1}(w)\frac{dy}{dw} + f_{n-1,2}(w)\, y = 0 ,$$

wobei gesetzt ist:

$$(5) \qquad f_{n-1,1}(w) = \mathrm{sn}\, w \cdot \mathrm{cn}\, w \cdot \mathrm{dn}\, w \sum_{0}^{n-3} {}_r\, c_{r,n-1}\, \mathrm{sn}^{2r} w ,$$

Digitized by Google

$$(6)\qquad f_{n-1,2}(w) = \sum_0^{n-1} d_{r,n-1}\,\mathrm{sn}^{2r} w \ .$$

Es ist nicht schwer Recursionsformeln aufzustellen, denen die Grössen c und d Genüge leisten müssen. In der That, differenziren wir zweimal nach w, so folgt:

$$(7)\qquad \frac{d^{2n}y}{dw^{2n}} + f_{n,1}(w)\frac{dy}{dx} + f_{n,2}(w)\,y = 0 \ ,$$

$$(8)\quad f_{n,1}(w) = f''_{n-1,1}(w) + (2\varkappa^2\mathrm{sn}^2 w - 1 - \varkappa^2 + \varkappa^2\mathrm{sn}^2\alpha) f_{n-1,1}(w) + 2f'_{n-1,2}(w) \ ,$$

$$(9)\quad f_{n,2}(w) = f''_{n-1,2}(w) + 4\varkappa^2\,\mathrm{sn}\,w\cdot\mathrm{cn}\,w\cdot\mathrm{dn}\,w\, f_{n-1,1}(w) + (2\varkappa^2\mathrm{sn}^2 w - 1 - \varkappa^2 + \varkappa^2\mathrm{sn}^2\alpha)[2f'_{n-1,1}(w) + f_{n-1,2}(w)] .$$

Nun ist:

$$f'_{n-1,1}(w) = \sum_0^{n-1} [(2r+1)c_{r,n-1} - (1+\varkappa^2)2rc_{r-1,n-1} + (2r-1)\varkappa^2 c_{r-2,n-1}]\mathrm{sn}^{2r} w,$$

$$f''_{n-1,1}(w) = \mathrm{sn}\,w\cdot\mathrm{cn}\,w\cdot\mathrm{dn}\,w\cdot\sum_1^{n-1} 2r\,a_r\,\mathrm{sn}^{2r-2}(w)$$

$$a_r = [(2r+1)c_{r,n-1} - (1+\varkappa^2)2rc_{r-1,n-1} + (2r-1)\varkappa^2 c_{r-2,n-1}]$$

$$f'_{n-1,1}(w) = \mathrm{sn}\,w\cdot\mathrm{cn}\,w\cdot\mathrm{dn}\,w\sum_0^{n-2}(2r+2)d_{r+1,n-1}\,\mathrm{sn}^{2r}(w) \ ,$$

$$f''_{n-1,2}(w) = \sum_0^{n} b_r\,\mathrm{sn}^{2r} w$$

$$b_r = [(2r+1)(2r+2)d_{r+1,n-1} - (1+\varkappa^2)4r^2 d_{r,n-1} + (2r-1)(2r-2)\varkappa^2 d_{r-1,n-1}]\mathrm{sn}^{2r} w$$

Hieraus folgt:

$$(10)\quad c_{r,n} = (2r+2)(2r+3)c_{r+1,n-1} - [(1+\varkappa^2)(2r+2)^2 + 1 + \varkappa^2 - \varkappa^2\mathrm{sn}^2\alpha]c_{r,n-1} + \varkappa^2[(2r+1)(2r+2)+2]c_{r-1,n-1} + 2(2r+2)d_{r+1,n-1} \ ,$$

$$(11)\quad \begin{aligned} d_{r,n} &= (2r+1)(2r+2)d_{r+1,n-1} - [(1+\varkappa^2)4r^2 + 1 + \varkappa^2 - \varkappa^2\mathrm{sn}^2\alpha]d_{r,n-1} \\ &+ \varkappa^2[(2r-1)(2r-2)+2]d_{r-1,n-1} - 2(2r+1)(1+\varkappa^2-\varkappa^2\mathrm{sn}^2\alpha)c_{r,n-1} \\ &+ 4r[2\varkappa^2 + (1+\varkappa^2)(1+\varkappa^2-\varkappa^2\mathrm{sn}^2\alpha)]c_{r-1,n-1} \\ &- 2\varkappa^2(2r-1)c_{r-2}[3(1+\varkappa^2) - \varkappa^2\mathrm{sn}^2\alpha] + 4\varkappa^4(2r-2)c_{r-3} \ . \end{aligned}$$

Digitized by Google

Durchaus analog sind die ungeraden Differentialquotienten zu behandeln.

§ 4.

Die Differentialquotienten der übrigen doppelt periodischen Functionen zweiter Art und der Functionen dritter Art.

Wir legen jetzt die Function zu Grunde:

$$F(v) = \prod_1^n \frac{\vartheta_1(v+a_r)}{\vartheta_0(v)}\, e^{-\sum^r \frac{\vartheta_0'(a_r)}{\vartheta_0(a_r)}\, v} \quad . \tag{1}$$

Für dieselbe folgt durch unmittelbare Anwendung der im vorigen Paragraphen gefundenen Resultate, dass ihre Differentialquotienten sich als Product von $F(v)$ und einer rationalen Function von $\operatorname{sn} w$ und $\operatorname{cn} w \cdot \operatorname{dn} w$ darstellen lassen, deren Coefficienten sich rational aus den analogen elliptischen Functionen mit den Argumenten a_r und der Constanten $\varkappa^2$ zusammensetzen lassen. Dabei ist der gemeinsame Nenner die Grösse:

$$\prod_1^n (\operatorname{sn}^2 w - \operatorname{sn}^2 a_r) \quad .$$

Eine zweite Darstellung würde man mit Hülfe der Zerlegung unserer Function in eine Summe von Differentialquotienten einer und derselben Function:

$$\frac{\vartheta_1(v+a_1+\cdots a_n)}{\vartheta_0(v)}\, e^{-\sum_1^n{}^r \frac{\vartheta_0'(a_r)}{\vartheta_0(a_r)}\, v}$$

nach bekannten Regeln finden können. Es möge in Bezug hierauf auf die Arbeiten von Herrn HERMITE und das Werk von Herrn HALPHEN verwiesen werden, ohne dass an dieser Stelle hierauf

Digitized by Google

näher eingegangen werde. Die Form der Differentialquotienten wird bei dieser Darstellung eine ähnliche, es tritt aber an Stelle des früheren gemeinsamen Factors die Grösse:

$$\frac{\vartheta_1(v + a_1 + \cdots a_n)}{\vartheta_0(v)} e^{-\sum \frac{\vartheta_0'(a_r)}{\vartheta_0(a_r)} v},$$

während der gemeinsame Nenner wird:

$$\mathrm{sn}^2 v - \mathrm{sn}^2 (\alpha_1 + \cdots \alpha_n) .$$

Bleiben wir bei der ersten Darstellung stehen und setzen in ihr an Stelle von $a_1 \cdots a_n$ der Reihe nach

$$a, a + \frac{1}{n}, \quad \cdots a + \frac{n-1}{n},$$

so ergiebt sich der:

Lehrsatz:

Die sämmtlichen Differentialquotienten der Function:

$$\frac{\vartheta_1(nv + na, n\tau)}{\vartheta_0(v)^n} e^{-\frac{\vartheta_0'(na, n\tau)}{\vartheta_0(na, n\tau)} v}$$

lassen sich als Product derselben und einer rationalen Function von sn w und cn w · dn v darstellen. Die Coefficienten setzen sich rational aus denselben elliptischen Functionen mit den Argumenten $\alpha + \frac{2rK}{n}$ *und der Constanten* $\varkappa^2$ *zusammen. Der gemeinsame Nenner ist die Grösse:*

$$\prod_1^n \left(sn^2 w - sn^2 \left(\alpha + \frac{2rK}{n} \right) \right) .$$

Wir können aber auch hier eine zweite völlig verschiedene Darstellung geben.

In der That, vermöge der Transformationstheorie erhalten wir die Gleichungen:

Digitized by Google

$$\frac{\vartheta_0^{\,n}\cdot\vartheta_0(nv,n\tau)}{\Theta_0\cdot\vartheta_0(v)^n}=$$

$$c_1+c_2\frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_2^2}\operatorname{sn}^2(w,\varkappa)+\cdots\; c_{\frac{n+1}{2}}\frac{\vartheta_2^{\,n-1}}{\vartheta_3^{\,n-1}}\operatorname{sn}^{n-1}(w,\varkappa)\;,$$

$$\frac{\Theta_2}{\Theta_0}\cdot\operatorname{cn}(w_1,c)\cdot\frac{\vartheta_0^{\,n}\cdot\vartheta_0(nv,n\tau)}{\Theta_0\cdot\vartheta_0(v)^n}=$$

$$c_1\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\right)^n\operatorname{cn}^n(w,\varkappa)+\cdots c_{\frac{n+1}{2}}\frac{\vartheta_3^{\,n-1}}{\vartheta_0^{\,n-1}}\operatorname{cn}(w,\varkappa)\cdot\operatorname{dn}^{n-1}(w,\varkappa),$$

(2)

$$\frac{\Theta_3}{\Theta_0}\cdot\operatorname{dn}(w_1,c)\cdot\frac{\vartheta_0^{\,n}\cdot\vartheta_0(nv,n\tau)}{\Theta_0\cdot\vartheta_0(v)^n}=$$

$$c_1\left(\frac{\vartheta_3}{\vartheta_0}\right)^n\operatorname{dn}^n(w,\varkappa)+\cdots c_{\frac{n+1}{2}}\frac{\vartheta_2^{\,n-1}}{\vartheta_0^{\,n-1}}\operatorname{dn}(w,\varkappa)\cdot\operatorname{cn}^{n-1}(w,\varkappa),$$

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{\Theta_2}{\Theta_0}\cdot\operatorname{sn}(w_1,c)\cdot\frac{\vartheta_0^{\,n}\cdot\vartheta_0(nv,n\tau)}{\Theta_0\cdot\vartheta_0(v)^n}=$$

$$c_1\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\right)^n\operatorname{sn}^n(w,\varkappa)+\cdots\; c_{\frac{n+1}{2}}\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\cdot\operatorname{sn}(w,\varkappa)\;.$$

Die Coefficienten $c_1\cdots c_{\frac{n+1}{2}}$ ergeben sich durch Reihenentwickelungen und zwar als rationale Functionen der ursprünglichen und der transformirten Thetaquotienten für die Nullwerthe der Argumente.

Hieraus folgt unmittelbar die Reduction des Problems, die Differentialquotienten der Function:

$$\frac{\vartheta_1(nv+na,n\tau)}{\vartheta_0(v,\tau)^n}\cdot\frac{\vartheta_0^{\,n}}{\Theta_0}$$

zu berechnen auf das entsprechende Problem für die Functionen:

$$\frac{\vartheta_1(v+a)^r\cdot\vartheta_0(v+a)^{n-r}}{\vartheta_0(v)^n}\;.$$

Hieraus folgt der Lehrsatz:

Die Differentialquotienten der Function:

Digitized by Google

$$\frac{\vartheta_1(nv+na, n\tau)}{\vartheta_0(v,\tau)^n} \cdot \frac{\vartheta_0{}^n}{\Theta_0} \cdot e^{-\frac{\vartheta_0'(a)}{\vartheta_0(a)} nv}$$

lassen sich als Product von

$$\frac{\vartheta_1(v+a)^n}{\vartheta_0(v)^n} \cdot e^{-\frac{\vartheta_0'(a)}{\vartheta_0(a)} nv}$$

und einer rationalen Function der elliptischen Functionen mit den Argumenten w und α herstellen. Als Constanten treten die Quotienten $\frac{\vartheta_\alpha}{\vartheta_\beta}$ *und* $\frac{\Theta_\alpha}{\Theta_\beta}$ *auf.*

Durch Multiplication mit $\vartheta_0(v)^{-n+1}$ ergiebt sich die Primfunction für die Functionen dritter Art, die mehr Null- als Unendlichkeitsstellen besitzen. Es erscheint als unnöthig, die hierauf bezüglichen Sätze hinzuschreiben.

In ähnlicher Weise sind die Functionen zu behandeln, die mehr Unendlichkeitsstellen als Nullstellen besitzen.

Digitized by Google

SITZUNG VOM 14. NOVEMBER 1889.

J. Thomae, *Ueber Curven, deren Punkten mehrere Parameterwerthe entsprechen.*

Sind die Coordinaten xy einer ebenen Curve durch einen Parameter analytisch dargestellt, so trifft es sich zuweilen, dass zwar einem Werthe des Parameters, oder wenn eine algebraische Grösse adjungirt ist, einer Stelle des zugehörigen algebraischen Bereiches ein Punkt x, y der Curve eindeutig zugeordnet ist, dass aber umgekehrt jedem Punkte der Curve mehrere Parameterwerthe, oder Stellen des Bereiches entsprechen. Ist der Bereich vom Geschlecht Null, der natürliche Rationalitätsbereich, so hat Herr Lüroth gezeigt, wie man stets einen neuen Parameter der Art einführen kann, dass zwischen Curve und Bereich eine ein-eindeutige Beziehung stattfindet. Auch hat Herr Lüroth in einem eben erschienenen Programm begonnen, seine Betrachtungen auf Flächen auszudehnen, deren Parameterdarstellung dem natürlichen Rationalitätsbereiche angehört.

Herr Schlesinger hat bemerkt, dass auch die Punkte einer Curve vom Geschlecht Eins den Stellen eines algebraischen Bereiches vom Geschlecht Eins mehrfach zugeordnet sein können.

Dass dasselbe für Curven von höherem Geschlechte nicht mehr statt hat, soll hier nachgewiesen werden. Ich meine, wenn eine Curve dem Geschlechte $p > 1$ angehört, so können ihre Punkte einem algebraischen Bereiche von *demselben* Geschlechte p nur ein-eindeutig zugeordnet werden. — Dies schliesst natürlich nicht aus, dass es möglich sei, die Punkte einer Curve vom Geschlecht p einem algebraischen Bereiche von *höherem* Geschlecht so zuzuordnen, dass je einer Stelle des Bereiches je ein Punkt der Curve, einem Punkte der Curve aber mehrere Stellen des Bereiches entsprechen. Den Fall, dass je

Digitized by Google

einer Stelle des algebraischen Bereiches mehrere Punkte der Curve entsprechen, schliesse ich hier aus.

§ 1. Der Nachweis für die Richtigkeit der ausgesprochenen Behauptung hängt mit dem bekannten Satze zusammen, dass für ABEL'sche Functionen, deren Geschecht höher als Eins ist, eine Transformation in andere desselben Geschlechtes nicht möglich ist, bei der die ursprünglichen Functionen *ein*deutige Functionen der transformirten, die letzteren aber *mehr*deutige Functionen der ursprünglichen sind, für welchen Satz ich in SCHLÖMILCH's Zeitschrift XVIII (1873) S. 401 einen Beweis gegeben habe. Einen Theil des dortigen Gedankenganges wiederhole ich, weil eine kleine Ergänzung nöthig, und die Verweisung auf jenen Aufsatz unbequem ist.

Es sei Z eine RIEMANN'sche über der z-Ebene n-fach ausgebreitete Fläche vom Geschlecht p, der zugehörige algebraische Bereich sei s, z, wo s mit z durch die Gleichung

$$F(s, z) = 0$$

vom $n$ten Grade in s, vom $m$ten in z verbunden ist. Bedeutet w die Anzahl der in Z vorhandenen einfachen Verzweigungspunkte, wenn ein doppelter als zwei einfache, ein dreifacher als drei einfache u. s. w. gezählt wird, so ist

$$w = 2(p + n - 1) \ , \quad p = \tfrac{1}{2} w - n + 1 \ .$$

Ist weiter ϑ eine in Z h-werthige Function, die ohne wesentlich singuläre Stelle, also algebraisch ist, so kann man über jedem Punkte der Fläche Z h Punkte auftragen, und jedem Werthe von ϑ einen derselben entsprechen lassen. Wenn man, stetig fortschreitend, zu jedem Punkte in Z die entsprechenden h Punkte aufträgt, so erhält man eine über der Fläche Z überall h-fach ausgebreitete Fläche $\mathfrak{Z}$, von der Beschaffenheit, dass jedem Punkte in Z h Punkte in $\mathfrak{Z}$ entsprechen. Die Fläche $\mathfrak{Z}$ besteht aus h unter sich und Z congruenten Theilflächen $Z_1, Z_2, \cdots, Z_h$, die mit einander verbunden sein, sich ineinander verzweigen müssen, wenn anders die Werthe von ϑ durch stetige (analytische) Fortsetzung von einem aus sämmtlich erhalten werden können, und wenn die Werthe von ϑ für dasselbe Werthepaar s, z, oder für dieselbe Stelle in z nicht in Gruppen unter einander gleicher zerfallen. Wenn wir nun zwar den Fall aus-

Digitized by Google

schliessen, dass die Werthe von ϑ für dasselbe Werthepaar s, z in Gruppen unter einander gleicher zerfallen, so muss doch ausdrücklich bemerkt werden, dass damit die Möglichkeit nicht ausgeschlossen ist, dass die Werthe von ϑ für dasselbe z in Gruppen gleicher zerfallen.

Die Verbindung der Theilsysteme $Z_1, Z_2, \cdots, Z_h$ kann abweichend von der Möglichkeit der Verbindung einzelner ebener Blätter zu einer gewöhnlichen RIEMANN'schen Fläche von zweierlei Art sein. Einmal kann die Verbindung durch Verzweigungspunkte vermittelt werden wie bei einer gewöhnlichen RIEMANN'schen Fläche. In diesem Falle ist leicht zu erkennen, dass die Verzweigung aus einem bestimmten Blatte eines Theilsystems in ein *entsprechendes* Blatt eines andern Theilsystems führen muss. Genauer: Bezeichnet man die verschiedenen Blätter von Z mit $1, 2, 3, \cdots n$, so entsprechen congruenten Blättern von $Z_1, Z_2, \cdots Z_h$ durch Vermittelung eben der Congruenz bestimmte Blätter, denen man dieselben Zahlen $1, 2, \cdots n$ zuordnen kann. Blätter die dieselbe Zahl tragen sind dann entsprechende. Zwischen solchen entsprechenden Blättern allein darf die Verzweigung stattfinden, soll die Function ϑ h-werthig und nur h-werthig in Z sein. Nur wenn ein solcher Verzweigungspunkt auf einen in Z fällt, tritt eine leichte Modification ein, die wir nachher kennen lernen werden.

Da aber Z nicht wie die Ebene *ein*fach zusammenhängend ist, und deshalb nicht alle geschlossenen Wege in Z durch stetige Deformation sich zu einem Punkte zusammenziehen lassen, so kann der Zusammenhang der Systeme $Z_1, Z_2, \cdots Z_h$ auch noch auf andere Weise als durch Verzweigung bewirkt werden. Zerschneidet man Z und die Theilsysteme $Z_1, Z_2, \ldots, Z_h$ durch je $2p$ Querschnitte, in den verschiedenen Systemen in congruenter Weise, in einfach zusammenhängende $Z', Z_1', Z_2', \cdots, Z_h'$, so können alle geschlossenen Wege in Z' durch stetige Deformation in einen Punkt zusammengezogen werden, und die Werthe von ϑ, die man auf solchem Wege erhält, können nur dann verschiedene sein, wenn im Innern eines solchen geschlossenen Weges sich ein Verzweigungspunkt vorfindet, der nur $\mathfrak{Z}$, nicht bloss Z angehört. Es kann aber auch ϑ auf den beiden Seiten eines Querschnittes *verschiedene* Werthe besitzen, wofür die ABEL'schen Functionen von s, z (im engern Sinne), deren Quadrate in Z einwerthig sind, das einfachste Beispiel bilden. Tritt dieser Fall

Digitized by Google

an einem der Querschnitte in zwei Theilsystemen Z_μ, Z_ν ein, so muss man diese Theilsysteme längs dieser Querschnitte aufschneiden und das auf dem einen Ufer U_μ desselben befindliche Flächenstück des Theilsystems Z_μ mit dem andern Ufer U_ν' des congruenten Querschnittes in Z_ν zusammenwachsen lassen, um die Ein-Eindeutigkeit zwischen den Punkten von $\mathfrak{Z}$ mit dem algebraischen Gebilde $\mathfrak{s}$ herzustellen. Führt man s, z in Z_ν auf das andere Ufer U_ν desselben Querschnittes zurück, so kann es geschehen, dass man den Werth von $\mathfrak{s}$ erhält, den diese Grösse bei U_μ' in Z_μ besitzt. Dann wird man das Ufer U_ν mit dem Ufer U_μ' zusammenwachsen lassen. Erhält man aber einen neuen Werth, so wird U_ν erst mit einem Ufer U_ϱ' im Theilsystem Z_ϱ' zu verbinden sein, u. s. w., bis man zu dem Werthe von $\mathfrak{s}$ zurück gelangt, den $\mathfrak{s}$ bei U_μ' besass. So wie die Fortsetzung durch Verzweigung, wenn der Windungspunkt kein einfacher ist, erst nach Durchgang durch mehrere Theilflächen in die ursprüngliche zurückführen kann, so kann auch die Fortsetzung durch Zusammenheften verschiedener Querschnittufer, welche wir »Fortsetzung durch Naht« nennen wollen, erst durch mehrere Theilflächen hindurch zur ursprünglichen zurückführen. Es mag nebenbei bemerkt werden, dass die Fortsetzung durch Naht auf Fortsetzung durch Verzweigung zurückgeführt werden kann, wenn Verzweigungspunkte zwischen Theilflächen auf solche zwischen den Blättern der Theilflächen selbst gelegt werden.

§ 2. Wir erweisen nun, dass die Fläche $\mathfrak{Z}$ im Allgemeinen von höherem Geschlechte ist, als die Fläche Z, sofern nicht die Fläche $\mathfrak{Z}$, über der z-Ebene ausgebreitet gedacht, in untereinander nicht zusammenhängende Theilflächen zerfällt, was wir augenblicklich ausschliessen. Dieser Fall tritt ein, wenn die Werthe von $\mathfrak{s}$ zwar nicht für dasselbe Werthepaar s, z, wohl aber für dasselbe z in Gruppen untereinander gleicher zerfallen, so dass nicht jede in $\mathfrak{Z}$ einwerthige Function, insbesondere nicht die Function s, rational durch $\mathfrak{s}$ und z ausgedrückt werden kann. Im Grunde genommen betrifft dies nicht die Fläche $\mathfrak{Z}$, welche ihrer Construction nach zusammenhängend ist, sondern eben nur die Theilfläche von $\mathfrak{Z}$, in der $\mathfrak{s}$ einwerthig ist, sofern eine solche Theilfläche existirt.

Die Anzahl $\mathfrak{w}$ der Verzweigungspunkte in $\mathfrak{Z}$ setzt sich zusammen aus denen der h Theilflächen $Z_1, Z_2, \cdots, Z_h$ und aus w'

Digitized by Google

Windungspunkten, die die Theilflächen unter sich verbinden. Die letzte Zahl kann bei bloser Verzweigung durch Naht auch Null sein. Es ist also

$$\mathfrak{w} = h w + w',$$

wenn in Z w einfache Verzweigungspunkte liegen. Fällt ein einzelner Verzweigungspunkt von der Gattung der w' auf einen in Z, so wird aus zwei Verzweigungspunkten der Theilflächen Z und jenem dritten ein dreifacher Verzweigungspunkt, der als drei einfache zu zählen ist, und die Zahl $\mathfrak{w}$ ändert sich dadurch nicht.

Legt man aber einen Verzweigungspunkt $\varkappa$ in das λte Blatt von Z_μ, der dies mit dem λten Blatte von Z_ν verbindet, und einen Verzweigungspunkt $\varkappa'$ in das λ'te Blatt von Z_μ, der dies mit dem λ'ten Blatte von Z_ν verbindet, und liegt in Z_μ ein Verzweigungspunkt k, der dort das λte und λ'te Blatt verbindet, und ist k' der entsprechende in Z_ν, und führt man dann $\varkappa$ und $\varkappa'$ näher und näher an k also auch an k' heran, um schliesslich diese Punkte zusammenfallen zu lassen, *so vereinigen sich die vier Verzweigungspunkte* $\varkappa\ \varkappa'\ k\ k'$ *zu zwei und nur zwei neuen*. Führt man nämlich die Variabele z in einer geschlossenen Curve um ein Gebiet herum, welches die Punkte $\varkappa\ \varkappa'\ k$ im Innern enthält, und nimmt als Ausgangspunkt von z einen Punkt im λten Blatte von Z_μ, so kann man sich vorstellen, man sei zuerst einmal um k herum gegangen, und dadurch ins λ'te Blatt von Z_μ gelangt, dann um $\varkappa'$ herum, und sei dadurch ins λ'te Blatt von Z_ν gelangt. Man ist also durch einen Umgang um das $k\,\varkappa\,\varkappa$, (k') enthaltende Gebiet ins λ'te Blatt von Z_ν gelangt. Umkreist man dasselbe Gebiet noch einmal, so gelangt man um k' ins λte Blatt von Z_ν, um $\varkappa$ ins λte Blatt von Z_μ. Es befindet sich also zwischen den λten und λ'ten Blatte von Z_μ und Z_ν ein *ein*facher Verzweigungspunkt. In gleicher Weise findet zwischen dem λ'ten Blatte von Z_μ und dem λten von Z_ν einfache Verzweigung statt. Es haben sich also zwei in k und k' hineinrückende, Theilsysteme verbindende Verzweigungspunkte $\varkappa$, $\varkappa'$ zu zwei andern neuen vereinigt. Wenn man auf diese Weise ein Paar der Verzweigungspunkte von der Gattung der w' mit einem Paare der übrigen $h\,w$ zu einem Paare vereinigt, so vermindert sich zwar die Gesammtzahl $\mathfrak{w}$, diese kann aber offenbar niemals kleiner als $h\,w$ werden. Andere Arten aber Verzweigungspunkte durch

Digitized by Google

besondere Wahl der Lage der Theilsysteme verbindenden Windungspunkte in Wegfall zu bringen, giebt es nicht und ist deshalb immer

$$w \geqq h w \ .$$

Daraus ergiebt sich für das Geschlecht $\mathfrak{p}$ der Fläche $\mathfrak{Z}$ die Ungleichung oder Gleichung

$$\mathfrak{p} \geqq \tfrac{1}{2}(hw + 2 - 2hn) \ , \quad \mathfrak{p} \geqq h(p-1) + 1 \ ,$$
$$\mathfrak{p} - p \geqq (p-1)(h-1) \ .$$

Da h seiner Natur nach mindestens gleich zwei ist, so ist $(p-1)(h-1)$ stets grösser als Null, und $\mathfrak{p} > p$, wenn $p > 1$ ist, w. z. b. w. Auf dem Umstande, dass für $p = 1$ auch $\mathfrak{p} = 1$ sein kann, beruht die Möglichkeit der ein-mehrdeutigen Transformation der elliptischen Functionen als Functionen vom Geschlecht Eins in eben solche.

§ 3. In Bezug auf die hier anzustellenden Betrachtungen sind die Curven vom Geschlecht Null, die sogenannten Unicursalcurven, die einfachsten. Ihre Coordinaten werden durch einen Parameter dargestellt, dem eine algebraische Grösse vom Geschlecht Null zugeordnet sein darf. Häufig gelangt man zu einer Parameterdarstellung durch Vermittelung von Polarcoordinaten, und es kommt dann, wenn eine trigonometrische Function als Parameter betrachtet wird, meist wirklich eine Irrationalität in dem Ausdrucke für die Coordinaten vor, wie z. B. bei der Ellipse

$$x = a \cos \varphi = at \ , \quad y = b \sin \varphi = b\sqrt{1 - t^2} \ .$$

Gleichwohl wird in diesem Falle in der Regel angenommen, dass die Coordinaten rationale Functionen eines Parameters seien, und es ist auch nicht schwer, durch Einführung einer neuen Veränderlichen die Rationalität der Darstellung zu erwirken. Der Vortheil der Methode der Parameterdarstellung einer unicursalen Curve beruht ja, von speciellen Fällen abgesehen, hauptsächlich eben darin, dass die Coordinaten *rational* durch eine unabhängige Veränderliche dargestellt sind. Daher wird es genügen, für den Fall des Geschlechtes Null die Beschränkung zu machen, dass in den die Curve definirenden Gleichungen

$$x = \varphi(t) \ , \quad y = \psi(t)$$

φ und ψ rationale Functionen des Parameters t sind.

Digitized by Google

Wird nun φ m-mal, ψ n-mal unendlich gross erster Ordnung, so ist die Curve von der $n+m$ten Ordnung, befinden sich aber unter den Stellen Unendlich q gemeinsame, so ist die Ordnung nur die $n+m-q$te, weil die Gerade $Ax+By+C=0$, wie die Gleichung $A\varphi(t)+B\psi(t)+C=0$ ergiebt, $n+m-q$ Schnittpunkte mit der Curve hat. Ist $\varphi(t)=\chi(t):\omega(t)$, wo χ und ω ganze Functionen von t sind, die keinen gemeinsamen Theiler haben, so bestimmt $\omega(t)x-\chi(t)=0$ t als algebraische Grösse der Variabeln x vom Geschlecht Null. Die Gleichung ist nothwendig irreductibel, weil sie linear in x ist, und ein gemeinsamer Factor in χ und ω ausgeschlossen wurde. Die wie t verzweigte Riemann'sche, über der x-Ebene m-fach ausgebreitete Fläche T besitzt $2(m-1)$ einfache Verzweigungspunkte (wenn mehrfache richtig gezählt werden), weil sie einfach zusammenhängend ist. In dieser Fläche ist y eine einwerthige Function, es ist also y wie T verzweigt. Umgekehrt aber ist T nur dann wie y verzweigt, wenn die Werthe von y für dasselbe x *nicht in Gruppen unter einander gleicher zerfallen*. Zwischen y und x besteht eine algebraische Gleichung vom $m$ten Grade in y, vom $n$ten in x; die Glieder höchster Dimension, weil die Curve von der $n+m-q$ten Ordnung ist, haben $n+m-q$ zum Exponenten, und diese Gleichung ist entweder irreductibel, oder, wenn die Werthe von y für dasselbe x in λ Gruppen unter einander gleicher zerfallen, sie ist die λte Potenz einer irreductibelen Gleichung. Im letzteren Falle, welcher eintritt, wenn von den m Werthen von t die zu demselben x gehören, je λ dasselbe y liefern, muss offenbar y in einem Theilsysteme der Fläche T von $\mu=m:\lambda$ Blättern, etwa T_λ, einwerthig sein, es muss m durch λ theilbar sein. T_λ ist vom Geschlecht Null, wie die Zählung der Windungspunkte ergiebt, und es ist der Bereich x, y, oder die Curve xy vom Geschlecht Null. Da die Curvengleichung eine λte Potenz einer ganzen Function von xy ist, so ist es selbstverständlich, dass auch n und q durch λ theilbar sein müssen. Ist die gegebene Unicursalcurve von der dritten Ordnung, so können zu einem Punkte entweder nur ein Parameterwerth gehören, oder drei. Im letzteren Falle ist sie eine dreifach gezählte Gerade. Ist die Unicursalcurve von der vierten Ordnung, so können zu einem Punkte der Curve vier, zwei oder ein Parameterwerth gehören. Im ersten Falle ist sie

Digitized by Google

eine vierfach gezählte Gerade, im zweiten ein doppelt gezählter Kegelschnitt.

Eine symmetrische Function τ der Werthe von t, zu denen derselbe Punkt $x\,y$ gehört, die in T über einander liegenden Punkten entsprechen und die etwa gleich t_1, t_2, .. t_λ sind, ist in T_λ eine einwerthige Function. Zwischen x und τ besteht eine Gleichung vom $\mu = (m : \lambda)$ten Grade in τ. Der Grad von x in dieser Gleichung ist gleich der Zahl, welche angiebt, wie oft τ in T_λ unendlich gross wird. Wird x in T_λ herumgeführt, so wird τ im Allgemeinen an einer, sicher aber nur an einer Stelle unendlich gross, wenn τ eine *ganze* symmetrische Function ist, die t_1, t_2, .. t_λ nur in der *ersten* Potenz enthält, oder auch wenn sie der Quotient zweier solchen Functionen ist. In dem Falle, dass τ wirklich unendlich gross wird, und demnach nicht constant ist, was jedenfalls für die Function $\tau = t_1 + t_2 + \cdots + t_\lambda$ statt hat, wird die Gleichung zwischen x und τ in x linear, und x ist eine rationale Function von x und τ. Die Grösse y ist in T_λ einwerthig, also eine rationale Function von x und τ, also auch eine rationale Function von τ allein. Es sind x und y als rationale Functionen einer Variabeln τ dargestellt, so dass jedem x, y nur ein Parameter τ entspricht.

Ist eine Curve vom Geschlecht Null, so kann man nach den Methoden RIEMANN's stets $x\,y$ durch einen Parameter rational so darstellen, dass die Beziehung zwischen den Punkten der Curve und den Parameterwerthen ein-eindeutig wird, und es ist daher selbstverständlich, dass eine solche Darstellung möglich sei, wenn auch zunächst nur eine rationale Darstellung gegeben ist, in der einem Punkte mehrere Parameterwerthe entsprechen, sobald erwiesen ist, dass das Geschlecht der Curve Null sei. Allein die Methoden RIEMANN's erfordern die Kenntniss der Doppelpunkte der Curve, die nicht immer auf rationalem Wege gefunden werden können. Es ist deshalb von Bedeutung, dass Herr LÜROTH gezeigt hat, wie man eine symmetrische Grundfunction τ, durch die $x\,y$ ausdrückbar sind, auf völlig rationalem Wege finden kann. Ist $x = \chi(t) : \omega(t)$, $y = \xi(t) : \eta(t)$, wo χ, ω, ξ, η ganze Functionen sind, und χ und ω, und ebenso ξ und η keinen gemeinsamen Theiler besitzen, so ist der grösste gemeinsame Theiler der Ausdrücke

$$\omega(t)\,\chi(t_1) - \omega(t_1)\,\chi(t)\,, \qquad \eta(t)\,\xi(t_1) - \eta(t_1)\,\xi(t)$$

Digitized by Google

eine ganze Function von t und t_1 von λten Grade, die für $t = t_1, t_2, .., t_\lambda$ einfach verschwindet, und deren Coefficientenverhältnisse demnach die symmetrischen Grundfunctionen sind. Diese symmetrischen Grundfunctionen sind lineare Functionen einer nicht constanten unter ihnen.

§ 4. Ist $x = \varphi(\Theta_1, t)$, $y = \psi(\Theta_2, t$ worin Θ_1, Θ_2 algebraische Functionen von t, φ und ψ rationale Functionen von Θ_1, t bez. Θ_2, t sind, so giebt es eine solche algebraische Grösse Θ von t, dass sich Θ_1 und Θ_2 rational durch Θ und t ausdrücken lassen, so dass demnach x und y in der Form

$$x = \varphi(\Theta, t) , \qquad y = \psi(\Theta, t)$$

vorausgesetzt werden dürfen. Construirt man nämlich in der t-Ebene eine RIEMANN'sche Fläche T_1, die den Bereich Θ_1, t repräsentirt, so ist darin Θ_2 eine mehrwerthige Function, und es lässt sich über T_1 ein Flächensystem T nach der Vorschrift von § 1 aufbauen, welches aus einer Anzahl T_1 congruenten Theilflächen besteht, und in welchem sowohl Θ_1 als auch Θ_2 einwerthig ist. Durch eine wie T verzweigte algebraische Grösse Θ und t lassen sich sowohl Θ_1 als auch Θ_2 rational ausdrücken, und es lässt sich dadurch die verlangte Form herstellen. Ist z. B. $\Theta_1 = \sqrt{(1-t):(1-kt)}$, $\Theta_2 = \sqrt{(1+t):(1+kt)}$, so kann $\Theta = \Theta_1 + \Theta_2$ gesetzt werden und es ist Θ in einer vierblättrigen Fläche vom Geschlecht Eins einwerthig, eine Fläche, die auf zweierlei Weise in congruente zweiblättrige Flächen zerfällt. In den Theilsystemen der einen Art ist Θ_1, in denen der andern Art Θ_2 einwerthig. Durch Quadrirung des Ausdruckes $\Theta_2 = \Theta - \Theta_1$ ergiebt sich

$$\Theta_2^2 = \Theta^2 - 2\Theta\Theta_1 + \Theta_1^2 , \quad \Theta_1^2 - \Theta_2^2 + \Theta^2 = 2\Theta\Theta_1 ,$$

$$\Theta_1 = \frac{\Theta_1^2 - \Theta_2^2 + \Theta^2}{2\Theta} = \left(\frac{1-t}{1-kt} - \frac{1+t}{1+kt} + \Theta^2\right) : 2\Theta ,$$

$$\Theta_1 = \frac{2(k-1)t + \Theta^2(1-k^2t)}{2(1-k^2t^2)\Theta} , \quad \Theta_2 = \frac{2(1-k)t + \Theta^2(1-k^2t)}{2(1-k^2t^2)\Theta} ,$$

so dass in der That Θ_1 und Θ_2 durch Θ ausgedrückt sind. Uebrigens ist auch Θ eine zweiwerthige Function in der wie $H = \sqrt{(1-k^2t^2):(1-t^2)}$ verzweigten Fläche, und zwar eine Function von H allein, denn es ist

Digitized by Google

$$\Theta^2 = \frac{1-t}{1-kt} + \frac{1+t}{1+kt} + \frac{2}{H} = \frac{2(1-kt^2)}{1-k^2t} + \frac{2}{H} ,$$

$$\Theta^2 = \frac{2}{1+k} + \frac{2k}{(1+k)H^2} + \frac{2}{H} .$$

Zerfallen die Werthe von xy in gleichzeitige Gruppen unter einander gleicher für dasselbe t, so dass das Werthepaar xy dasselbe ist für die Stellen des Bereiches Θ, t

$$\Theta, t;\ \Theta^{(1)}, t;\ \Theta^{(2)}, t;\ ..;\ \Theta^{(\lambda-1)}, t ,$$

so sind x, y in einer Theilfläche des Systems T einwerthige Functionen, etwa in T_λ. In dieser ist z. B. der Ausdruck

$$\vartheta = \Theta + \Theta^{(1)} + \Theta^{(2)} + .. + \Theta^{(\lambda-1)}$$

eine einwerthige Function, und es lassen sich x und y durch ϑ und t rational ausdrücken, und es werden dann die Werthe von xy für dasselbe t nicht mehr in Gruppen gleicher zerfallen. Die Fläche T_λ ist nach § 2, wenn $p > 1$ ist, sicher von niederem Geschlecht als die Fläche T, so dass das Geschlecht des Bereiches Θ, t, welches wir das scheinbare Geschlecht der Curve nennen wollen, wenn $p > 1$ ist, grösser ist als das wahre Geschlecht. Letzteres muss noch näher untersucht werden und braucht nicht mit dem des Bereiches ϑ, t nothwendig übereinzustimmen.

§ 5. Wir nehmen nun an, dass in der Parameterdarstellung

$$x = \varphi(\Theta, t) , \quad y = \psi(\Theta, t)$$

einer Curve die Werthepaare xy nicht für dasselbe t in *gleichzeitige* Gruppen unter einander gleicher zerfallen, was immer gestattet ist. Die Grössen x, y können dann nicht mehr in einem und demselben Theilsystem der wie Θ, t verzweigten Fläche einwerthig sein, aber es können immer noch die Werthe von x für sich, und die von y für sich in Gruppen gleicher zerfallen. Deshalb werde

$$\xi = x + \beta y , \quad \eta = x + \delta y , \quad \delta \gtrless \beta ,$$
$$x = \alpha' \xi + \beta' \eta , \quad y = \gamma' \xi + \delta' \eta$$

gesetzt, und es werden β, δ so bestimmt, dass die Werthe von ξ

Digitized by Google

nicht mehr in Gruppen gleicher zerfallen. Es ist zu zeigen, dass dies möglich ist. — Die Anzahl der Möglichkeiten für das Zerfallen der Fläche T in Theilsysteme ist eine bestimmte endliche. Die Mannigfaltigkeit β, δ zu wählen ist unendlich. Folglich lassen sich die β, δ so wählen, dass, wenn die Werthe von $\xi\eta$ in Gruppen gleicher zerfallen, die Theilsysteme, in denen die $\xi\eta$ einwerthig sind, für beide Grössen dieselben, jedenfalls aber *nicht* die Theilsysteme sind, in denen xy für sich eindeutig verlaufen. In diesem Theilsystem sind aber auch $x = \alpha'\xi + \beta'\eta$, $y = \gamma'\xi + \delta'\eta$ einwerthige Functionen, was gegen unsere Annahme ist. Die Fläche, in der ξ einwerthig ist, ohne dass die Werthe in Gruppen gleicher zerfallen, muss demnach T selbst sein. Es ist ξ wie T und T wie ξ verzweigt. Es besteht demnach zwischen ξ und t eine algebraische Gleichung vom Grade m in ξ, wenn T m Blätter hat, und vom Grade μ in t, wenn ξ μ-mal unendlich gross wird. Es lässt sich aber auch ξ als unabhängige Veränderliche auffassen, und eine μ-blättrige Riemann'sche Fläche Ξ construiren, in der t und Θ einwerthige Functionen sind. In dieser Fläche ist auch η eine einwerthige Function, die ν-mal unendlich gross wird, wenn y in T ν-mal unendlich gross wurde. Zwischen ξ und η besteht eine Gleichung vom μten Grade in ξ, vom νten in η, die entweder irreductibel ist, und dann ist das scheinbare Geschlecht der Curve $\xi\eta$ oder xy, ich meine das Geschlecht des Bereiches Θ, t, dasselbe als das wahre. Oder die Gleichung zwischen ξ und η ist eine Potenz einer irreductibeln Gleichung, nämlich dann, wenn die Werthe von η für dasselbe ξ in Gruppen etwa in Gruppen von λ Termen unter einander gleicher zerfallen. In diesem Falle ist η schon in einer Theilfläche von Ξ etwa in Ξ_λ einwerthig. Der Grad der Curvengleichung ist $\mu : \lambda$ in ξ, $\nu : \lambda$ in η und das wahre Geschlecht der Curve ist niedriger als das scheinbare, mit Ausnahme des Falles $p = 1$, in welchem Gleichheit beider Geschlechter möglich, aber natürlich nicht nothwendig ist. — Zerfallen die Werthe von y für dasselbe x in Gruppen unter einander gleicher, so zerfallen die Werthe von ξ und η ebenso in Gruppen unter einander gleicher. Zu einem Werthe von ξ gehören ebenso viele unter einander gleiche Werthe von η als zu einem x gleiche y gehören, und umgekehrt gehören zu einem ξ λ gleiche η, so gehören auch zu einem x λ gleiche y. Daher gilt von den x, y dasselbe, was von den $\xi\eta$ gilt, nämlich dass

Digitized by Google

das Geschlecht der Curve xy, wenn es grösser als Eins ist, kleiner ist als das scheinbare Geschlecht. Die Einführung der Grössen $\xi\eta$ für xy hat nur die Bedeutung eines Hülfsmomentes für den Beweis. — Ist das scheinbare Geschlecht Eins, so kann das wahre Null oder Eins sein; ist das scheinbare Null, so ist das wahre auch Null.

§ 6. Die Werthe von t, die zu demselben ξ, also zu übereinanderliegenden Punkten der Fläche Ξ gehören, ordnen sich in Gruppen zu je λ Termen, für die η denselben Werth hat. Es wird also etwa zu $t_1, t_2, \ldots t_\lambda$ derselbe Werth von η gehören, und Ξ_λ ist etwa die Theilfläche von Ξ, in der η einwerthig ist. Dann ist $\tau = t_1 + t_2 + \cdots + t_\lambda$ in derselben Fläche Ξ_λ einwerthig. Folglich ist τ eine einändrige Function von ξ und t, zwischen ξ und τ besteht eine Gleichung, die in τ vom μten Grade, wenn Ξ $m = \lambda\mu$ Blätter hat. In Ξ_λ ist aber auch η einändrig und also eine rationale Function von ξ und τ, und zwar eine solche, dass ihre Werthe für dasselbe ξ nicht mehr in Gruppen unter einander gleicher zerfallen. Zur ein-eindeutigen Darstellung von ξ und η, und mithin von x und y durch einen Parameter und eine algebraische Adjuncte kommt es auch hier nur darauf an, eine symmetrische Function der Werthe von t, für welche die Werthepaare $\xi\eta$ oder xy gleich sind, durch t und eine Adjuncte auszudrücken. Für diese Adjuncte ergiebt sich nach der auseinandergesetzten Methode zunächst ξ selbst, diese kann aber auf unendlich viele Arten durch andere ersetzt werden. — Man kann aber natürlich auch die Gleichung zwischen ξ und η bez. x und y durch Elimination aufsuchen, und nun nach RIEMANN's Methoden x und y durch Functionen eines algebraischen Bereiches ein-eindeutig darstellen.

Für den Fall $p = 1$ werde ein Beispiel angeführt.

Ist
$$k^2 + k'^2 = 1 \ ,$$
und

$$x = \frac{\Theta}{2kt} \ , \quad y = \frac{2kt - \Theta}{t^2 - k'^2} \ , \quad \Theta = \sqrt{2(1+k^2)t^2 - k'^4 - t^4} \ ,$$

so ist die Curve xy von der sechsten Ordnung, denn x wird für $t = \infty$, $\Theta = \pm\infty$, und für $t = 0$, $\Theta = \pm k'^2$, also viermal unendlich gross, y aber für $t = \pm k'$, $\Theta = \mp 2kk'$, also zwei-

Digitized by Google

mal unendlich gross. Ihr scheinbares Geschlecht ist Eins. Da aber

$$t = k\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-k^2x^2}$$

ist, so gehören zu einem x vier Werthe von t, es ist t wie eine vierblättrige Riemann'sche Fläche verzweigt mit 8 Windungspunkten. Ueber den Stellen $x = \pm 1$ liegen je zwei. Zwei verbinden Blatt 1 und 2 mit einander, zwei Blatt 3 und 4. Ueber den Stellen $x = \pm 1 : k$ liegen ebenfalls je zwei, die Blätter 1 und 4 und 2 und 3 verbindende Verzweigungspunkte. Für jedes x hat t vier Werthe, $y = \sqrt{(1-x) : (1+x)}$ aber nur zwei, so dass die Werthe von y für dasselbe x in zwei Gruppen unter einander gleicher zerfallen. Das wirkliche Geschlecht ist in diesem Falle Null, die Coordinaten lassen sich also rational darstellen, was dadurch geschieht, dass man

$$(2kt - \Theta) : (t^2 - k'^2) = \tau$$

setzt. Dann ist

$$\frac{1-x}{1+x} = \tau^2 , \quad x = \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2} \quad y = \tau = \frac{\tau(1+\tau^2)}{1+\tau^2} .$$

Die vorgelegte Curve sechster Ordnung ist also eine doppelt gezählte Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte.

Um aber noch ein Beispiel zu haben, in dem das scheinbare Geschlecht mit dem wahren übereinstimmt, setzen wir

$$x = 2(1+k')\frac{1+k'-(1-k')t}{1+k'+(1-k')t}\Theta , \quad y = \frac{4t}{(1+k'+(1-k')t)^2} ,$$

$$\Theta = \sqrt{t(1-t)(1-\mathfrak{k}t)} , \quad \mathfrak{k} = (1-k') : (1+k') .$$

Hier ist das scheinbare Geschlecht Eins, die Ordnung der Curve ist die sechste, weil x für zwei Werthepaare von t, Θ je dreimal, y in denselben Werthepaaren je zweimal unendlich gross wird. Setzt man aber

$$4t : (1+k'+(1-k')t)^2 = \tau ,$$

so folgt

$$x = \sqrt{\tau(1-\tau)(1-k\tau)} , \quad y = \tau .$$

Die Curve ist also in Wirklichkeit eine doppelt gezählte Curve dritter Ordnung vom Geschlecht Eins.

Digitized by Google

SITZUNG VOM 14. NOVEMBER 1889.

W. G. Hankel, *Die galvanische Kette.*

Elektromotorische Kraft.

Die materiellen Moleküle der Körper befinden sich fortdauernd in einem elektrischen Zustande, der durch ihre Constitution bedingt ist und sich sofort wieder herstellt, wenn er durch den Eingriff äusserer Einwirkungen beeinflusst worden war. Betrachten wir die elektrischen Vorgänge als rotirende Bewegung, so liegen auf der Oberfläche der Moleküle rotirende Schwingungen, deren Axen normal zur Oberfläche sind; dieselben können je nach der Gestalt und der Zusammensetzung der Moleküle auf der ganzen Oberfläche gleiche Stärke und gleichen Sinn besitzen, oder auf den verschiedenen Theilen der Oberfläche verschieden sein. Der Einfachheit wegen sollen im Folgenden die Schwingungen überall auf der ganzen Oberfläche als gleich gross und von gleichem Sinne angenommen werden.

Wird durch Zusammenhäufung von Molekülen derselben Art ein Körper von endlichen Dimensionen gebildet, so werden auf jedem im Innern liegenden Molekül die rotirenden Bewegungen durch die umliegenden Moleküle gehemmt, weil an den Berührungsstellen die Rotationen auf den beiden Molekülen entgegengesetzte Richtung und gleiche Grösse besitzen. Es bleiben nur die an der äusseren Grenzfläche des Körpers befindlichen Schwingungen übrig. Sobald aber nun der Körper mit der Erde in leitende Verbindung gebracht wird, überträgt sich auf die Oberfläche eine Schicht entgegengesetzter Elektricität und der Körper erscheint unelektrisch.

Legt man auf einen solchen nicht elektrischen Leiter, z. B. auf eine Kugel aus Zink, eine Scheibe eines vollkommenen Isolators, so wird dadurch der Zustand der Zinkkugel nicht

Digitized by Google

wesentlich verändert, denn die durch die Ableitung zur Erde angehäufte elektrische Schicht verhält sich gegen den Isolator wie zuvor gegen die Luft.

Anders gestaltet sich der Vorgang, wenn eine durch Ableitung unelektrisch gemachte und darauf wieder isolirte Zinkkugel mit einer zweiten ebensolchen berührt wird. Die in den zur Berührung kommenden Punkten befindliche, den unelektrischen Zustand bedingende Schicht wird durch die Berührung der leitenden Massen verdrängt, und es treten die Rotationen der beiden sich berührenden Molekülе einander gegenüber. Diese Rotationen sind aber gleich gross und von entgegengesetzter Richtung, heben sich also auf und der Berührungspunkt verhält sich wie ein innerer Punkt der übrigen Masse. Das System beider Kugeln bleibt also unelektrisch.

Wenn jedoch die beiden zur Berührung kommenden Kugeln aus Substanzen bestehen, deren Molekülе verschieden starke und auch wohl in entgegengesetzter Richtung erfolgende Schwingungen haben, so heben sich an der Berührungsstelle die Rotationen der beiden aneinanderstossenden Molekülе nicht auf; es entsteht vielmehr daselbst in der Berührungsebene eine Rotation, deren Grösse gleich ist der Differenz der Rotationsgeschwindigkeiten beider Molekülе. Die Rotationsrichtung auf jedem Molekülе ist dabei auf die auf seiner Oberfläche nach aussen gerichtete Normale bezogen. Sind die Schwingungen auf dem einen Molekülе positiv, auf dem andern negativ, so haben sie in der Berührungsebene gleiche Drehungsrichtungen und addiren sich. Geschehen auf den beiden Molekülen die Rotationen in derselben Richtung, aber mit verschiedener Geschwindigkeit, so resultirt nur eine dem Ueberschuss der grösseren über die geringere entsprechende Rotation.

Diese in der Berührungsebene auftretenden Rotationen verbreiten sich über die beiden sich berührenden Molekülе und es entsteht auf der einen Seite jener Ebene ein positives und auf der andern ein negatives Molekül.

Wie nun ein elektrisch geladener Körper auf einen in der Nähe befindlichen Leiter [1]) der Art einwirkt, dass im Innern des letzteren die Molekülе in rotirende Bewegungen um die von

1) Die Vorgänge bei der Vertheilung in Leitern werde ich in einer späteren Mittheilung genauer behandeln.

Digitized by Google

dem Körper ausgehenden Strahlen als Axen versetzt werden, ebenso übertragen sich die Rotationsbewegungen der sich berührenden Moleküle der beiden Kugeln auf das Innere der ihnen angehörigen Massen. An der Grenzfläche gegen den Nichtleiter treten sie dann als freie Elektricität auf.

Die durch die Berührung erzeugte elektromotorische Kraft erscheint also als eine Rotationsbewegung von bestimmter Grösse.

Zu einer gleichen Auffassung der elektromotorischen Kraft kommen wir bei Betrachtung der Inductionsvorgänge. Ein in einen Leiterkreis eintretender Strom erregt in dem benachbarten Stücke eines zweiten Leiterkreises einen inducirten Strom. Die Einwirkung des entstehenden Stromes auf den benachbarten Leitertheil besteht in Erregung von Rotationsbewegungen, welche dann für die entfernteren Theile des zweiten Kreises die elektromotorische Kraft darstellen.

Elektrischer Strom.

Werden die Pole eines galvanischen Elementes durch einen Leiter verbunden, so sucht die elektromotorische Kraft e in den Molekülen desselben rotirende Bewegungen zu erzeugen. Diesem Bestreben stellen die einzelnen Moleküle einen von ihrer Beschaffenheit abhängigen Widerstand entgegen, die vorhandene elektromotorische Kraft wird nun zum Theil verbraucht, um diesen Widerstand zu überwinden, und blos der noch übrige Theil bleibt dann als Rotation erhalten, welche in ihren Wirkungen nach aussen den elektrodynamischen Effect hervorbringt. Je grösser der Widerstand ist, welchen die Substanz der Bewegung ihrer Moleküle entgegensetzt, um so mehr wird die elektromotorische Kraft zu seiner Ueberwindung in Anspruch genommen, und um so geringer fällt die Geschwindigkeit der Rotation, d. h. die Stärke des Stromes aus. Die Summe der Rotationsgeschwindigkeiten ist in allen Querschnitten des Drahtes dieselbe, wenn der Strom constant geworden ist.

Die Verhältnisse bei der Strombildung zeigen eine gewisse Analogie mit dem Fliessen des Wassers durch Röhren. Ist in einem Gefässe eine Druckhöhe H gegeben, und fliesst die Flüssigkeit durch eine am Boden desselben befindliche horizontale cylindrische Röhre aus, so wird ein Theil h der Druckhöhe ver-

Digitized by Google

braucht, um den entgegenstehenden Widerstand zu überwinden, und nur der Rest h' erscheint als eine in allen Querschnitten der Röhre gleich grosse Geschwindigkeit.

Stärke des elektrischen Stromes.

Es sei ein einziges [1]) galvanisches Element von der elektromotorischen Kraft e gegeben, die wir uns in einem Querschnitte, z. B. in demjenigen, in welchem die beiden verschiedenen Metalle sich berühren, vereinigt denken wollen. Wird nun diese Kette durch einen Leiter vom Widerstande U geschlossen, so erhält man den in ihr entstehenden Strom $i = e - U$; d. h. es wird von der elektromotorischen Kraft e unter den gegebenen Umständen ein Theil U absorbirt oder zur Ueberwindung des Widerstandes im Schliessungskreise verwendet, so dass nur der Rest $e - U$ als Strom auftritt. e und U müssen dabei mit demselben Maasse gemessen sein; in eben demselben Maasse erhält man dann auch die Stromstärke i ausgedrückt.

Bei den bisherigen Verfahren zur Bestimmung der elektromotorischen Kraft und des sogenannten Widerstandes werden dieselben in verschiedenen Maassen gefunden und es kann daher aus solchen Angaben der Werth von i nach der obigen Formel nicht erhalten werden. Weiterhin werde ich ein Verfahren angeben, und seine Richtigkeit durch das Experiment beweisen, bei welchem e und U in gleichen Einheiten gemessen sind, sodass also $i = e - U$ ist. Aus dieser Gleichung folgt

$$e - i = U \ .$$

Die Erfahrung hat nun gelehrt, dass bei unverändert erhaltenem Leiterkreise die Stromstärke proportional mit der elektromotorischen Kraft wächst. Wird die elektromotorische Kraft e auf E erhöht, so steigt die Stromstärke i auf I, wobei $e : i = E : I$, d. h. bei unverändertem Leiterkreise bleibt das Verhältniss der elektromotorischen Kraft zur Stromstärke $\frac{e}{i} = \frac{E}{I}$ unverändert.

Schreiben wir nun die Gleichung $e - i = U$ in der Form

---

[1]) Die Vorgänge bei mehreren Elementen werden in einem späteren Abschnitte behandelt.

Digitized by Google

$\left(\frac{e}{i} - 1\right) i = U$, so behält der in der Klammer stehende Ausdruck $\frac{e}{i} - 1$ für denselben Leiterkreis unverändert denselben Werth. Daraus folgt, dass der Widerstand oder der durch ihn absorbirte Betrag an Rotationsbewegung für denselben Leiterkreis keine Constante ist, sondern sich proportional mit der Stromstärke ändert.

Bezeichnen wir den durch einen gegebenen Leiterkreis bei der Stromstärke 1 absorbirten Betrag der elektromotorischen Kraft mit u, also $u = \frac{U}{i}$, so wird $U = ui$. Durch Einführung dieses Werthes erhält man $\left(\frac{e}{i} - 1\right) i = ui$, oder

$$\frac{e}{i} = u + 1.$$

In dieser Gleichung bedeutet also $\frac{e}{i}$ den Zahlenwerth der elektromotorischen Kraft, welche nöthig ist, um in dem gegebenen Leiterkreise die Einheit des Stromes zu erzeugen.

Die oben mit u bezeichnete Zahl will ich kurzweg die *Absorptionszahl* des gegebenen Leiters nennen; sie giebt also den Betrag an, welcher bei der Stromstärke 1 von der zur Erzeugung dieses Stromes in dem gegebenen Leiterkreise nöthigen elektromotorischen Kraft absorbirt wird. Diese elektromotorische Kraft selbst ist aber $= u + 1$, also um die Einheit grösser als u. Es dürfte zweckmässig sein, auf einen speciellen Fall einzugehen.

Ist wie z. B. in einer später angeführten Messung für den aus einem grossen Daniell'schen Elemente und einer Quecksilbersäule von 1 m Länge und 1 qmm Querschnitt gebildeten Leiterkreis die Absorptionszahl 6,99, so heisst dies: Von einer elektromotorischen Kraft im Betrage von $6{,}99 + 1 = 7{,}99$ werden durch den genannten Leiterkreis 6,99 Theile absorbirt und nur 1 Theil bleibt als Strom erhalten [1]).

1) Im Vorstehenden ist die Absorptionszahl u so bestimmt, dass sie angiebt, wieviel von einer durch $u + 1$ dargestellten elektromotorischen Kraft absorbirt wird. Sie ist also stets auf die Einheit der Stromstärke bezogen.

Man kann die Absorption aber auch als den Bruchtheil darstellen

Digitized by Google

Aenderungen der Stromstärke infolge von Aenderungen im Leiterkreise.

Es sei gegeben eine galvanische Kette von der elektromotorischen Kraft e und der Absorptionszahl u; dann ist

$$e = ui + i \quad \text{und} \quad i = \frac{e}{u+1} .$$

Schaltet man in diese Kette einen Draht von der bekannten Absorptionszahl a ein, so erhält man, wenn i' die neue Stromstärke bedeutet,

$$e = ui' + ai' + i' \quad \text{und} \quad i' = \frac{e}{u+a+1}$$

oder

$$i' = \frac{e}{(u+1)+a} .$$

Ist die Absorptionszahl u der ursprünglichen Kette, sowie deren elektromotorische Kraft e unbekannt, so lassen sich die beiden unbekannten Grössen e und u aus den beobachteten Werthen von i und i', sowie der bekannten Absorptionszahl a des eingeschalteten Leiters berechnen. Aus den beiden Gleichungen

---

welcher von der elektromotorischen Kraft 1 absorbirt wird. Dividirt man die obige Gleichung durch 7,99, so erhält man

$$1 = \frac{6,99}{7,99} + \frac{1}{7,99} = 0,874 + 0,126 .$$

Nach dieser Bestimmung wird also der *Absorptionscoefficient*

$$v = \frac{u}{u+1} = 0,874 .$$

Ist der Absorptionscoefficient in dieser Weise angegeben, so erhält man, weil die elektromotorische Kraft = 1 ist, die Stromstärke gleich der Differenz zwischen dieser elektromotorischen Kraft und dem Absorptionscoefficienten. Im vorliegenden Falle erhalten wir also die Stromstärke = 0,126. Von der elektromotorischen Kraft 1 ist also 0,874 durch den Widerstand absorbirt worden, und nur 0,126 Theile erscheinen im Strom.

Die eine Angabe für die Absorption lässt sich leicht in die andere verwandeln. Ist dieselbe auf die Einheit der elektromotorischsn Kraft bezogen, also $1 = 0,874 + 0,126$, so hat man nur die Gleichung mit $\frac{1}{0,126}$ zu multipliciren, um die Stromstärke auf 1 zu erhöhen und erhält dann die frühere Absorptionszahl $= \frac{v}{1-v} = \frac{0,874}{0,126} = 6,99$.

$$i = \frac{e}{u+1} \text{ und } i' = \frac{e}{(u+1)+a}$$

folgt

$$e = \frac{ii'a}{i-i'} \text{ und } u+1 = \frac{ai'}{i-i'} ,$$

$$u = \frac{i'a}{i-i'} - 1 .$$

Ist ein Draht von der unbekannten Absorptionszahl u' gegeben, und soll u' nach dem Maasse von a bestimmt werden, so schaltet man den Draht anstatt a in die zuvor benutzte Kette ein und erhält die Stromstärke i''. Es ist dann

$$e = ui'' + u'i'' + i'' .$$

Aus dieser Gleichung und der ersten $e = ui + i$ erhält man analog wie zuvor

$$i'' = \frac{e}{(u+1)+u'} .$$

Aus den drei Gleichungen

$$i = \frac{e}{u+1} , \quad i' = \frac{e}{(u+1)+a} \text{ und } i'' = \frac{e}{(u+1)+u'}$$

ergiebt sich das Verhältniss

$$\frac{u'}{a} = \frac{i'(i-i'')}{i''(i-i')} .$$

Soll die Stärke eines Stromes $i = \frac{e}{u+1}$ durch Hinzufügung eines neuen Widerstandes auf die Hälfte vermindert werden, so genügt es nicht, einen Draht von der Absorptionszahl u hinzuzusetzen. Es würde dann ein Strom von der Stärke y entstehen, welcher grösser wäre als $\frac{i}{2}$, denn man hätte $e = 2uy + y$ oder $y = \frac{e}{2u+1}$; eine Verminderung des Stromes auf die Hälfte kann erst eintreten, wenn der Nenner des Bruches $2u+2 = 2(u+1)$ wird. Um den Strom auf

Digitized by Google

die Hälfte zu reduciren ist also in die ursprüngliche Kette ein Leiter von der Absorptionszahl $u+1$ einzuschalten.

Der Grund, warum die Hinzufügung von u allein nicht genügt, ist leicht zu erkennen. Eine Vermehrung des Leiters u um u würde bei der Stromstärke $\frac{i}{2}$ denselben Betrag von e in Anspruch nehmen, als der Widerstand u bei der Stromstärke i. Nun muss aber auch der im Strome i vorhandene Betrag auf die Hälfte reducirt werden; mithin ist noch ein weiterer Widerstand einzuschalten. Es bedarf also der Hinzufügung eines Leiters von der Absorptionszahl $u+1$, um die Stromstärke auf die Hälfte zu reduciren.

Aehnlich verhält es sich, wenn durch Hinwegnahme von Widerstand die Stärke des Stromes verdoppelt werden soll. Es ist dann nicht blos ein Widerstand $\frac{u}{2}$ wegzunehmen, sondern $\frac{u+1}{2}$. Nähme man nur einen Leiter von der Absorptionszahl $\frac{u}{2}$ hinweg, so hätte man, wenn y' die neue Stromstärke bedeutet,

$$e = \frac{u}{2}\,y' + y' \text{ oder } y' = \frac{e}{\frac{1}{2}u+1}\,.$$

Es wäre also y' noch kleiner als $2i$. Soll $y' = 2i$ werden, so muss ein Leiter $\frac{u+1}{2}$ weggenommen werden. Es muss nämlich mehr als $\frac{u}{2}$ aus dem Widerstande entfernt werden, weil ein Theil des Betrages von e, welcher bisher durch den Widerstand verbraucht war, jetzt zur Erhöhung des Stromes von i auf $2i$ in rotirende Bewegung übergehen soll.

Verzweigte Ströme.

Als Gesetze für die Vertheilung des Stromes in einem verzweigten Leitersystem ergeben sich ohne Weiteres die folgenden.

1) Denken wir uns die Drähte der Verzweigung dicht nebeneinander gelegt, so zeigt jeder Querschnitt nach aussen dieselbe elektrodynamische Wirkung, es muss also die Summe

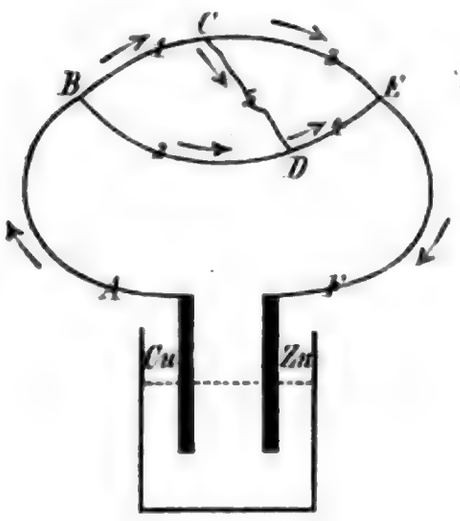
Digitized by Google

der in jedem Durchschnitt vorhandenen rotirenden Bewegungen gleich gross sein. Man erhält dasselbe Resultat, wenn man von dem Satze ausgeht, dass in jedem Verzweigungspunkte ebenso viel Elektricität zu- als abfliesst.

2) An jedem Verzweigungspunkte muss der Widerstand in den von ihm ausgehenden Verzweigungen gleich gross sein; wäre derselbe in einem Augenblicke ungleich, so würde durch die Drähte, in welchen den Widerstand kleiner ist, sofort ein stärkerer Strom fliessen; dadurch würde aber ihr Widerstand vermehrt, während er in den anderen, für welche eine Verminderung der Stromstärke eingetreten ist, herabsinkt. Das Wachsen des Stromes in den ersteren und das Abnehmen in den anderen Drähten würde so lange fortgehen, bis der Widerstand in allen Strombahnen gleich geworden ist.

3) Liegt in einem zusammenhängenden Leiterkreise eine elektromotorische Kraft e, so wird zur Ueberwindung des Widerstandes in demselben nur der Betrag $e - i$ verwendet, wenn i die in einem unverzweigten Stücke auftretende Stromstärke bedeutet.

Ich will diese drei Sätze auf die Verzweigung in der Wheatstone'schen Brücke anwenden und nehme an, dass der Strom die durch die Pfeile angezeigte Richtung habe.



Ad 1). Es sei $Zn\ Cu$ das Element; in dem ungetheilten Drahte AB und EF fliesse der Strom i und seine Absorptionszahl sei u; in den mit 1, 2, 3, 4 und 5 bezeichneten Stücken mögen i_1, u_1; i_2, u_2 u. s. w. die entsprechende Bedeutung haben.

Nach 1. ist

$$i = i_1 + i_2 = i_3 + i_4 ,$$
$$i_1 = i_3 + i_5 ,$$

also auch

$$i = i_3 + i_5 + i_2 .$$

Ad 2). Den bei einer Stromstärke vorhandenen Widerstand oder die bei derselben auftretende Absorption erhält man durch Multiplication der Absorptionszahl mit der Stromstärke. Der Widerstand in den verschiedenen Theilen ist also in

$EFAB$	$u\,i$	CE	$u_3 i_3$
BC	$u_1 i_1$	DE	$u_4 i_4$
BD	$u_2 i_2$	CD	$u_5 i_5$

Im Verzweigungspunkte B muss also, wenn man die Drähte BCE und BDE bis zu ihrer Wiedervereinigung verfolgt, der Widerstand auf BCE genau so gross sein, wie auf BDE. Es ist also

$$i_1 u_1 + i_3 u_3 = i_2 u_2 + i_4 u_4$$

oder

$$i_1 u_1 + i_3 u_3 - i_2 u_2 - i_4 u_4 = 0 \ .$$

Ein Gleiches muss stattfinden, wenn wir anstatt der Bahn BCE die Bahn $BCDE$ einsetzen. Es ist dann

$$i_1 u_1 + i_5 u_5 + i_4 u_4 = i_2 u_2 + i_4 u_4$$

oder nach Abzug von $i_4 u_4$

$$i_1 u_1 + i_5 u_5 = i_2 u_2$$

oder

$$i_1 u_1 + i_5 u_5 - i_2 u_2 = 0$$

u. s. w.

Ad 3). Betrachten wir nun einen Leiterkreis, welcher die Kette mit der elektromotorischen Kraft e einschliesst, z. B. $ABCEFA$, so ist, weil in jedem Gesammtquerschnitte durch den Leiter der Strom i fliesst, von der elektromotorischen Kraft e der in dem Strome erhaltene Betrag i abzuziehen; es bleibt daher nur $e - i$ zur Ueberwindung des Widerstandes.

Es ist also für die Bahn $ABCEFA$

$$e - i = iu + i_1 u_1 + i_3 u_3 \ .$$

Ebenso erhält man für die Bahn $ABDEFA$

$$e - i = iu + i_2 u_2 + i_4 u_4$$

und für die Bahn $ABCDEFA$

$$e - i = iu + i_1 u_1 + i_5 u_5 + i_4 u_4 \ .$$

Die Uebereinstimmung dieser drei Gleichungen erkennt man sofort, wenn man die unter 2) aufgeführten Gleichungen

Digitized by Google

$$i_1 u_1 + i_3 u_3 = i_2 u_2 + i_4 u_4$$

und

$$i_1 u_1 + i_5 u_5 = i_2 u_2$$

in Betracht zieht.

Aenderung der Absorption mit Länge und Dicke des Leiters.

Wird die Länge eines gegebenen Leiters von überall gleichem Querschnitte vergrössert, so wächst in gleichem Maasse die Anzahl der Molekule, welche in Bewegung zu setzen sind; es nimmt also selbstverständlich die Absorptionszahl proportional der Länge zu.

Das Gesetz über die Abhängigkeit der Absorptionszahl vom Querschnitte ergiebt sich in folgender Weise. Eine geschlossene Kette enthalte zwei Drähte aus demselben Material und von gleicher Länge, aber von verschiedenem Querschnitte. Der dickere Draht habe z. B. einen vierfach grösseren Querschnitt als der dünnere. Die durch die elektrodynamische Wirkung im äusseren Raume gemessene Stärke des Stromes i ist überall in dem gleichen Abstande von der Mitte des Leitungsdrahtes dieselbe. Die von jedem Querschnitte ausgehende Wirkung entspricht der Summe der Rotationen der in ihm vorhandenen Molekule. Soll nun die Wirkung des dickeren Drahtes dieselbe sein, wie die des dünneren, so müssen die Rotationen in dem ersteren, da er viermal so viel Molekule enthält als der letztere, eine viermal kleinere Geschwindigkeit besitzen als in dem dünnen Drahte, weil dann die Summe der Rotationen in beiden Drähten dieselbe ist.

Denken wir uns nun den dickeren Draht von 4fachem Querschnitt in 4 gleich dicke Streifen zerlegt, so gleicht jeder einzelne Streifen dem dünnen Drahte. Die Absorptionszahl des dünnen Drahtes sei u für die Einheit der Stromstärke, dann ist dieselbe für jeden Streifen bei der Stromstärke 1 ebenfalls u. In dem dünneren Drahte fliesst der Strom i, folglich ist seine Absorption $u\,i$; in jedem Streifen fliesst dagegen nur der Strom $\frac{i}{4}$; die Absorption, welche der durch jeden Streifen

Digitized by Google

gehende Strom $\frac{i}{4}$ findet, ist also nur $\frac{ui}{4}$, beträgt also nur ein Viertel von der, welche jeder Streifen bei der Stromstärke i zeigen würde.

Stromstärke bei mehreren Elementen.

Es möge ein Element Zink-Cadmium-Wasser die elektromotorische Kraft e, ein gleichgestaltetes Element Zink-Kupfer-Wasser aber die elektromotorische Kraft $E = 4e$ besitzen. Wegen der gleichen Länge und Dicke der Wassersäule ist in beiden der Widerstand gleich, daher die Absorptionszahl für beide $= u$.

Man erhält dann für das Element $(Zn\,Cd\,Aq)$

$$e = ui + i,\ e - i = ui \text{ und } i = \frac{e}{u+1};$$

für das Element $(Zn\,Cu\,Aq)$

$$E = ui' + i',\ E - i' = ui' \text{ und } i' = \frac{E}{u+1} = \frac{4e}{u+1}.$$

Der Strom i' hat also die vierfache Stärke des Stromes i.

Bei dem Element $(Zn\,Cd\,Aq)$ wird folglich der Betrag $e - i$ zur Ueberwindung des Widerstandes, und bei dem Element $(Zn\,Cu\,Aq)$ der Betrag $E - i' = 4e - i'$ ebendazu verbraucht.

Vergrössern wir ferner die Länge der Wassersäule in dem Element $(Zn\,Cu\,Aq)$ auf die vierfache Länge, so entsteht ein Strom i'', wobei $4e = 4ui'' + i'' = (4u + 1)\,i''$. Es wird also $i'' = \frac{4e}{4u+1}$. Es ist auch jetzt der Betrag $4e - i''$ zur Ueberwindung des Widerstandes verwendet.

Nehmen wir dagegen vier Elemente $(Zn\,Cd\,Aq)$, so ist die Summe der in ihnen auftretenden elektromotorischen Kräfte allerdings auch $4e$, also ebenso gross wie bei einem einzigen Zink-Kupferelement; desgleichen ist die Absorptionszahl wie in dem letzten Falle $4u$, und doch sind die Verhältnisse sehr wesentlich verändert. Die elektromotorische Kraft ist nicht auf eine Stelle concentrirt, sondern ist auf vier Punkte vertheilt.

Entsteht bei dieser Anordnung ein Strom i''', so ist in jedem Querschnitt des Schliessungskreises eine Rotation i''' vorhanden. An jeder Stelle, wo eine elektromotorische Kraft e liegt, übertrifft also diese elektromotorische Kraft e die Stromrotation i''' um

Digitized by Google

$e - i'''$ und nur dieser Betrag kann auf die Ueberwindung des Widerstandes verwendet werden. Dies gilt von jeder der vier elektromotorischen Kräfte e; jedes e liefert also zur Ueberwindung des Widerstandes nur den Betrag $e - i'''$, folglich alle vier den Betrag $4(e - i''')$. Dieser Betrag dient, wenn kein weiterer Widerstand eingeschaltet ist, zur Ueberwindung des Widerstandes $4ui'''$. Es ist mithin $4(e - i''') = 4ui'''$ oder $e - i''' = ui'''$ d. h. der Strom ist nur ebenso stark als in einem Elemente, nämlich $i''' = \frac{e}{u+1}$.

Schaltet man noch einen Draht von der Absorptionszahl a ein, so werden für die verschiedenen Fälle die Gleichungen

$$e - i = ui + ai \quad , \quad e = (u + a + 1)i \, , \quad i = \frac{e}{(u+1)+a}$$

$$4e - i' = ui' + ai' \quad , \quad 4e = (u + a + 1)i' \, , \quad i' = \frac{4e}{(u+1)+a}$$

$$4e - i'' = 4ui'' + ai'' \, , \quad 4e = (4u + a + 1)i'' \, , \quad i'' = \frac{4e}{(4u+1)+a}$$

$$4(e - i''') = 4ui''' + ai''' \, , \quad 4e = [4(u+1)+a]i''' \, , \quad i''' = \frac{4e}{4(u+1)+a} \, .$$

Wärmeentwickelung.

Wenn durch einen Draht kein Strom fliesst, mögen die einzelnen Bestandtheile seiner Molekülе eine bestimmte Lage gegen die nächsten Molekülе einnehmen. Tritt ein elektrischer Strom ein, so ändert sich diese Anordnung und die Molekülе eines Querschnittes üben auf die Molekülе des folgenden eine Kraft aus, um sie in gleiche Rotation zu setzen. Die Molekülе sind bestrebt, stets den ursprünglichen Zustand wieder herzustellen, daher bedarf es der fortwährenden Aufwendung einer Kraft, um den Zwangszustand zu erhalten.

Der Widerstand wächst mit der Stromstärke und habe bei der Stromstärke i die Grösse $u'i$. Dieser Widerstand ist nun auf einer der Rotationsgeschwindigkeit i gleichen Länge zu überwinden, sodass eine mit $u'ii$ proportionale Hemmung der Bewegung entsteht, wodurch eine entsprechende Wärmemenge entwickelt wird.

Digitized by Google

Bedeutet u' die auf der Einheit der Länge vorhandene Absorptionszahl, so ist hiernach die in einer Drahtlänge l während der Zeit t erzeugte Wärme proportional mit $u' i^2 l t$.

Elektrische Spannung an den Enden der Kette.

An den Enden eines galvanischen Elementes, das nicht geschlossen ist, beobachtet man eine elektrische Spannung, welche die Grösse seiner elektromotorischen Kraft misst. Diese elektromotorische Kraft wird in der geschlossenen Kette, wie gezeigt, verwendet: 1) zur Ueberwindung von Widerständen und 2) zur Erzeugung der Rotation der Molekule. Dann kann nur der zur Ueberwindung des Widerstandes zu verwendende Theil noch als Spannung an den Enden auftreten, während der in der Rotationsbewegung enthaltene Theil zu keiner Spannung Veranlassung giebt. Es ist nach dem Früheren $e = ui + i$: ui bedeutet den zur Ueberwindung des Widerstandes nöthigen Betrag von e, also die an den Polen der galvanischen Kette noch vorhandene Spannung. Wird dieselbe mit e' bezeichnet, sodass also $e' = ui$, so erhält man $e = e' + i$ oder $e - e' = i$.

Die Stromstärke in einer Kette ist aber auch $i = \frac{e}{u+1}$ und wird also um so kleiner, je grösser u wird; mit der Abnahme von i, also mit der Vergrösserung von u, nähert sich mithin e' immer mehr dem e.

Ich habe oben S. 384 ausgesprochen, dass es ein Verfahren giebt, durch welches die Werthe von i und e in demselben Maasse bestimmt werden können. Dasselbe gründet sich auf das soeben beschriebene Verhalten der elektrischen Spannung an den Polen der offenen und der geschlossenen Kette.

Experimenteller Nachweis.

Die Pole eines grossen Daniell'schen Elementes wurden nach einander mit dem Goldblättchen meines Elektrometers verbunden, während der andere Pol durch eine Verbindung mit der Gasleitung zur Erde abgeleitet war. Aus den an beiden Polen beobachteten, sehr nahe gleichen Ausschlägen wurde das Mittel als die Spannung an den Polen des Elementes genommen [1]).

1) Da der Zustand meiner Augen mir die Ablesung der Ausschläge unmöglich machte, so hat Herr Prof. von Zahn die Güte gehabt, die Beob-

Digitized by Google

Darauf wurde das Element mittelst eines Leiters von sehr grossem Widerstande, z. B. von 10000 Quecksilbereinheiten, geschlossen. Hierbei zeigte sich keine merkliche Abnahme des Ausschlages. Als jedoch der Widerstand des eingeschalteten Leiters verringert wurde, trat eine merkbare Veränderung in den Spannungen an den beiden Polen auf.

Ich übergehe die mit grossen Widerständen ausgeführten Beobachtungen und wende mich gleich zu denen, bei welchen geringere Widerstände in der Kette lagen und die Abnahme in der Spannung an den Polen recht deutlich hervortrat.

Auch bei der geschlossenen Kette wurden die Beobachtungen an beiden Polen ausgeführt, wobei jedes Mal der eine Pol zur Erde abgeleitet war. Aus den beiden sehr nahe gleichen Werthen, welche an den beiden Polen beobachtet waren, wurde wieder das Mittel genommen [1]).

Die Mittelwerthe der bei den verschiedenen Widerständen gemachten Beobachtungen waren die nachstehenden. Der Widerstand der eingeschalteten Drähte ist in Quecksilbereinheiten angegeben.

Kette offen	38,87
- geschlossen durch 0,5 Q. E.	30,84
- offen	38,54
- offen	38,65
- geschlossen durch 0,3 Q. E.	27,64
- offen	38,52
- geschlossen durch 1 Q. E.	33,71
- offen	38,82

achtungen am Elektrometer und die Berechnung der Mittelwerthe auszuführen, wofür ich ihm hier meinen herzlichsten Dank abstatte.

1) In Betreff der bei diesen Messungen möglichen Genauigkeit bemerke ich Folgendes. Die Theilstriche des Okularmikrometers, auf welche die Spitze des Goldblättchens sich projicirte, erschienen ungefähr 1^{mm} von einander entfernt. Mit voller Sicherheit konnte daher die Lage des Goldblättchens nur auf 0,2 Scalentheile bestimmt werden. Da ferner die Versuche in meinem an der Strasse gelegenen Wohnzimmer ausgeführt wurden, so veranlassten die vorüberfahrenden Wagen kleine Störungen. Die Erschütterung änderte nämlich den Zustand der Elemente in der nassen Säule, deren Pole mit den beiden neben dem Goldblättchen befindlichen Messingscheiben verbunden waren, öfters in ungleicher Weise, sodass der eine Pol etwas stärker wurde als der andere. Dies hatte aber eine Aenderung in der Ruhelage des Goldblättchens zur Folge. Wurde nun auch bei jeder Messung der elektrischen Spannung die Ruhelage vorher und nachher bestimmt, so konnte doch der Fehler noch um 0,1 Scthl. wachsen.

Digitized by Google

Nach einer Unterbrechung von 15 Minuten:

Kette	geschlossen durch 2 Q. E.	38,85
-	offen	38,56
-	geschlossen durch 3 Q. E.	36,65
-	offen	38,45

Vergleicht man nun die Mittel der vor und nach jeder Schliessung gemachten Beobachtungen der offenen Kette mit den bei dem dazwischen liegenden Schlusse gemessenen, und ordnet die Versuche nach der Reihe der eingeschalteten Widerstände, vom grössten beginnend, so erhält man

	e	e'	i	$u+1$	u
3 Q. E.	38,51	36,65	1,86	20,70	19,70
2 - -	38,56	35,85	2,71	14,23	13,23
1 - -	38,67	33,71	4,96	7,80	6,80
0,5 - -	38,70	30,84	7,86	4,92	3,92
0,3 - -	38,59	27,64	10,95	3,52	2,52

In dieser Tabelle stehen unter e die an den Polen der offenen Kette beobachteten Spannungen, unter e' die an den Polen der geschlossenen Kette erscheinenden. Der Unterschied zwischen e und e', d. h. der von e durch den Widerstand nicht absorbirte Theil, bildet den Strom i; es ist also $e - e' = i$. Diese Differenzen, welche also die Stromstärke angeben, finden sich in der dritten Columne unter i zusammengestellt. Wird e durch i dividirt, so erhält man den Werth von $u+1$, worin u die Absorptionszahl des Schliessungsbogens bedeutet. Diese Zahlen stehen in der vierten Columne, während die fünfte die Werthe von u selbst enthält.

Die verschieden starken elektrischen Ströme sind dadurch erhalten worden, dass mehr oder weniger Widerstand in die Kette eingeschaltet wurde. Bezeichnen wir die Stromstärke der Reihe nach mit $i_{0,3}$, $i_{0,5}$, i_1, u. s. w. und ebenso die ihnen zugehörige Absorptionszahl mit $u_{0,3}$, $u_{0,5}$, u_1, u. s. w., so wird, wenn x die Absorptionszahl der Kette selbst, y die Absorptionszahl für eine Quecksilbereinheit bezeichnet:

$$\begin{aligned} x + 3y &= 19{,}70 = u_3 \\ x + 2y &= 13{,}23 = u_2 \\ x + 1y &= 6{,}80 = u_1 \\ x + 0{,}5y &= 3{,}92 = u_{0,5} \\ x + 0{,}3y &= 2{,}52 = u_{0,3} \,. \end{aligned}$$

Digitized by Google

Ermittelt man aus diesen fünf Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Werthe, so erhält man

$$x = 0{,}638 \text{ und } y = 6{,}351 .$$

Durch Einsetzung dieser Werthe in die obigen Gleichungen ergiebt sich

0,638 + 19,053	=	19,69	20,69
0,638 + 12,702	=	13,34	14,34
0,638 + 6,357	=	6,99	7,99
0,638 + 3,175	=	3,81	4,81
0,638 + 1,905	=	2,54	3,54

Wird die beobachtete elektromotorische Kraft e durch den entsprechenden Werth von $u+1$ dividirt, so erhält man $\frac{e}{u+1} = i$. Die Berechnung liefert

	i		
	berech.	beobach.	Diff.
i_3 =	1,86	1,86	0
i_2 =	2,68	2,71	+ 0,03
i_1 =	4,84	4,96	+ 0,12
$i_{0,5}$ =	8,04	7,86	− 0,18
$i_{0,3}$ =	10,93	10,95	+ 0,02

Die berechneten Werthe stimmen also mit den beobachteten hinreichend überein [1].

---

1) Man könnte bei den vorstehenden Versuchen vermissen, dass die Stromstärken nicht mit einem Galvanometer gemessen wurden. Diese Zugabe hätte den Apparat und die Beobachtungen unnöthig complicirt; es lässt sich nämlich leicht der Beweis führen, dass die obigen Werthe von i in der That Werthe darstellen, welche den mit einem Galvanometer beobachteten proportional sind.

Zu diesem Zwecke will ich zwei Werthe von i, z. B. $i_{0,3}$ und i_2, als Ausschläge eines Galvanometers betrachten und dann nach der bisher üblichen Weise aus den Stromstärken die Werthe von E und W berechnen. Man hat also

$$I_{0,3} = 10{,}95 = \frac{E}{W + 0{,}3}$$

$$I_2 = 2{,}71 = \frac{E}{W + 2} .$$

Digitized by Google

Absorptionszahlen und Absorptionscoefficienten.

Nachdem im Vorstehenden die Absorptionszahl für eine Quecksilbersäule von 1 m Länge und 1 qmm Querschnitt be-

---

Hieraus erhält man

$$W = 0{,}259 \text{ und } E = 6{,}12 .$$

Werden mit diesen Werthen von W und E die übrigen drei beobachteten Stromstärken berechnet, so erhält man

	berechnet	beobachtet
$\frac{E}{W+3}$	= 1,88	1,86
$\frac{E}{W+1}$	= 4,86	4,96
$\frac{E}{W+0{,}5}$	= 8,07	7,86 .

Ein Galvanometer hätte also Zahlen ergeben, welche den aus den elektrometrischen Messungen abgeleiteten proportional gewesen wären.

Da jedoch bei einer anderen Veranlassung die Stromintensitäten eines Daniell'schen Elementes von gleicher Grösse, unter Einschaltung der eben benutzten Widerstände 0,3, 0,5, 1, 2 und 3 ausgeführt wurden, so will ich die gefundenen Werthe hier folgen lassen. Die Stromstärke wurde mit einer Tangentenboussole, deren Kreis nur in ganze Grade getheilt war, gemessen.

Zwischen den Beobachtungen bei Einschaltung der verschiedenen Widerstände 0,3, 1, 2 und 3 wurde stets die Messung der Stromstärke bei Einschaltung von 0,5 wiederholt, um ein Urtheil über die Veränderung der Kette zu gewinnen. Es wurde beobachtet:

bei Einschaltung von	0,5 Q. E.	0,418	0,3 Q. E.	0,555
	0,5 –	0,419	1,0 –	0,261
	0,5 –	0,414	2 –	0,139
	0,5 –	0,412	3 –	0,093

Betrachten wir die Kette als constant und nehmen für die Stromstärke bei Einschaltung von 0,5 Q. E. den Werth 0,414, so gehen demnach

bei Einschaltung von	0,3	0,5	1	2	3
die Stromstärken	0,555	0,414	0,261	0,139	0,093

hervor. Setzt man dagegen die Stromstärke bei Einschaltung von 0,5 Q. E. gleich 7,86, so werden die Verhältnisse der obigen Zahlen

10,53 7,86 4,90 2,64 1,78 .

Dies sind aber nahe dieselben Werthe, wie sie sich oben aus den elektrometrischen Messungen ergeben haben.

Digitized by Google

stimmt worden, lassen sich die Absorptionscoefficienten v für eben so lange und dicke Drähte von anderen Metallen angeben. Es wird nämlich nachher bewiesen werden, dass die in der bisherigen Weise gemessenen Widerstände W den Absorptionszahlen proportional sind. Die Absorptionscoefficienten aber werden nach S. 383 aus den Absorptionszahlen u durch Division derselben mit $u + 1$ erhalten.

	W	e	u	i	e	v	i
Quecksilber	1,000	7,351	6,351	1	1	0,864	0,136
Platin	0,143	1,908	0,908	1	1	0,476	0,524
Eisen.	0,125	1,794	0,794	1	1	0,443	0,557
Zink	0,0667	1,424	0,424	1	1	0,298	0,702
Kupfer. . .	0,0185	1,117	0,117	1	1	0,105	0,895
Silber.	0,0169	1,107	0,107	1	1	0,097	0,903

In der zweiten Columne der vorstehenden Tabelle sind die Widerstände für Quecksilber $= 1$ aufgeführt; die Zahlen der dritten, vierten und fünften Columne geben unter e die elektromotorische Kraft an, welche bei der unter u bezeichneten Absorptionszahl einen Strom von der Stärke 1 entstehen lässt. Die Zahlen der sechsten, siebenten und achten Columne geben unter v an, wieviel von der elektromotorischen Kraft $e = 1$ durch den Widerstand absorbirt wird und unter i, wieviel in den Strom übergeht.

Beziehungen der im Vorhergehenden aufgestellten Formeln zu den bisher üblichen.

Ich will nun zum Schlusse noch zeigen, in welcher Beziehung die von mir gegebenen Ausdrücke zu den bisher benutzten stehen.

Ohm'sches Gesetz.

In dem von Ohm für die Stärke eines elektrischen Stromes aufgestellten Gesetze $I = \frac{E}{W}$ ist I die Stromstärke, E die elektromotorische Kraft, und W soll den Widerstand der Kette bedeuten. Die Werthe von E und W werden aber bei der Anwendung der vorstehenden Formel nicht direct gemessen,

Digitized by Google

sondern durch Rechnung aus gemessenen Stromstärken hergeleitet.

Es sei für eine gegebene Kette $I = \frac{E}{W}$; durch Einschaltung eines bekannten Widerstandes A geht der vorstehende Ausdruck über in $I' = \frac{E}{W + A}$. Schaltet man anstatt A einen Widerstand W' von noch unbekannter Grösse ein, so erhält man $I'' = \frac{E}{W + W'}$.

Oben S. 395 habe ich gezeigt, dass die mit dem Galvanometer gemessenen Stromstärken genau den nach den Gleichungen $i = e - e'$ berechneten proportional sind. Wir können also setzen $I = mi$, $I' = mi'$ und $I'' = mi''$.

Berechnet man aus den vorstehenden Gleichungen $\frac{W'}{A}$, so ergiebt sich

$$\frac{W'}{A} = \frac{I'(I - I'')}{I''(I - I')} = \frac{i'(i - i'')}{i''(i - i')},$$

also der nämliche Ausdruck, der S. 384 für $\frac{u'}{a}$ gefunden wurde. A und W' unterscheiden sich von a und u' also nur durch einen constanten Factor n; es ist somit $A = na$ und $W' = nu'$.

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt

$$W = \frac{I' \cdot A}{I - I'} = \frac{mi'na}{m(i - i')} = \frac{na \cdot i'}{i - i'}.$$

Da nun früher aus den Gleichungen

$$i = \frac{e}{u + 1}, \quad i' = \frac{e}{(u + 1) + a}$$

der Werth $u + 1 = \frac{i'a}{i - i'}$ erhalten wurde, so ist $W = n(u+1)$. W unterscheidet sich also von $u + 1$ nur durch denselben Factor, mit welchem die willkürliche Maasseinheit für den Widerstand multiplicirt ist [1]).

---

1) Ist der Factor n bekannt, so lässt sich aus dem in der bisher üblichen Weise gefundenen Werthe von W die Absorptionszahl der Kette u berechnen. Nehmen wir z. B. die beiden mittelst der Tangentenbousssole S. 395 gemessenen Stromstärken

Digitized by Google

Berechnet man aus der Gleichung $IW = E$ den Werth von E, so wird derselbe, da $I = mi$ und $W = n(u+1)$,

$$E = mi \cdot n(u+1)$$

oder, da $i(u+1) = e$,

$$E = mne .$$

Die Werthe E, I, W entsprechen also den Grössen e, i, $u+1$; sie sind nur durch gewisse constante Factoren von denselben verschieden.

Verstehen wir also unter W nicht den Werth nu, wo u die Absorptionszahl des ursprünglich gegebenen Leiterkreises bedeutet, sondern setzen $W = n(u+1)$, so ist die Ohm'sche Formel mit der von mir aufgestellten in Uebereinstimmung.

Weiter in diese Kette eingeschaltete Widerstände W', W'' u. s. w. sind den Absorptionszahlen proportional, also $W' = nu'$, $W'' = nu''$ u. s. w.

$$I_{0,5} = 0,414 = \frac{E}{W+0,5} \text{ und } I_2 = 0,139 = \frac{E}{W+2} ,$$

so ergiebt sich

$$W = 0,258 .$$

Nun hatten wir S. 394 für die Quecksilbereinheit die Absorptionszahl 6,351 gefunden, sonach ist die Einheit für die Absorptionszahl $\frac{1}{6,351}\times$ der Quecksilbereinheit, d. h. $n = \frac{1}{6,351}$. Man verwandelt also nach Quecksilbereinheiten gemessene Widerstände in Absorptionszahlen durch Multiplication mit 6,351. Dem oben berechneten Werthe von $W = 0,258$ liegt die Quecksilbereinheit zu Grunde.

Man erhält hiernach aus der Formel $0,258 = n(u+1)$

$$u+1 = \frac{0,258}{n} = 0,258 \cdot 6,351 = 1,639 ,$$

folglich

$$u = 0,639 .$$

Dieser Werth stimmt zufällig mit dem S. 394 gefundenen Werthe $x = 0,638$ überein. Bei der letzten Messung war zwar der dicke Kupferdraht der Tangentenboussole dem Schliessungskreise hinzugefügt, andererseits war aber die Flüssigkeit in dem Daniell'schen Elemente in grösserer Höhe eingefüllt, und so hat sich zufälliger Weise die Vermehrung des Widerstandes durch Hinzufügung der Tangentenboussole, mit der Verminderung desselben in Folge der Vergrösserung des Querschnittes der Flüssigkeit ausgeglichen.

Digitized by Google

Nach der bisherigen Auffassung soll der Widerstand eines gegebenen Leiterkreises von der Stärke des in ihm fliessenden Stromes unabhängig, also constant sein. Zufolge der im Vorhergehenden aufgestellten Theorie ist jedoch der Widerstand von der Stromstärke abhängig und wächst mit ihr proportional. Wenn in der Ohm'schen Formel $I = \frac{E}{W}$ der Werth von W als von der Stromstärke unabhängig erscheint, so liegt der Grund darin, dass W nicht den bei der Stromstärke I vorhandenen Widerstand bedeutet, sondern den Werth $n(u+1)$, wo u die auf die Einheit der Stromstärke bezogene constante Absorptionszahl und n einen constanten Factor bezeichnet.

Kirchhoff'sche Gesetze.

Das erste der oben S. 386 aufgestellten Gesetze $i = i' + i''$ ist mit dem Kirchhoff'schen gleichbedeutend.

Das zweite $i'u' + i''u'' = 0$ u. s. w. stimmt ebenfalls mit dem Kirchhoff'schen $i'w' + i''w'' = 0$ überein, da $w' = nu'$, $w'' = nu''$.. ist. In dem dritten Gesetze $E = iw + i'w' + i''w''$ werden die Grössen w, w', w''... als völlig analog betrachtet. Dies ist aber nicht der Fall. Während $w' = nu'$, $w'' = nu''$, gilt für w, welches dem Theile der Kette entspricht, in welchem sich die elektromotorische Kraft E befindet, die Gleichung

$$w = n(u+1) .$$

Setzt man für w diesen Werth, so fällt auch der oben von mir aufgestellte Ausdruck mit dem von Kirchhoff gegebenen zusammen.

Joule'sches Gesetz.

Nach Joule ist die Wärmeentwicklung durch den Strom in einem Drahte vom Widerstande w' und von der Länge l während der Zeit t proportional mit $w' i^2 l t$. In diesem Ausdrucke ist aber w' nicht der effective Widerstand des Drahtstückes bei der Stromstärke i, sondern w' ist der Absorptionszahl u' proportional, $w' = nu'$, sodass auch zwischen diesem Ausdrucke und dem oben S. 391 von mir gegebenen Uebereinstimmung herrscht.

Digitized by Google

SITZUNG VOM 2. DECEMBER 1889.

G. Scheffers, *Ueber die Berechnung von Zahlensystemen.*

Das Problem der Bildung solcher complexer Zahlensysteme, welche dem associativen und dem distributiven Gesetze der Multiplication genügen, ist bisher Gegenstand mehrfacher Arbeiten gewesen. Namentlich sind alle aus vier Einheiten gebildeten Systeme neuerdings von Study aufgestellt worden [1]). Dagegen sind die aus mehr als vier Einheiten ableitbaren Algorithmen noch nicht erschöpfend untersucht. Die Schwierigkeit liegt in dem unverhältnissmässigen Anwachsen des Rechenmaterials beim Fortschreiten zu mehr Einheiten. Bei dem vielseitigen Interesse, welches solche Systeme besitzen, ist es daher erwünscht, das Problem der Aufstellung der Zahlensysteme möglichst zu vereinfachen.

Hiermit beschäftigt sich vorliegende Arbeit. Es ist im Fol-

---

1) Ausser den bekannten zusammengehörigen Arbeiten von Weierstrass, Dedekind, Schwarz, Hölder uud Petersen in den Göttinger Nachrichten von 1884 bis 1887, an die sich die Dissertation von Berloty, Théorie des quantités complexes à n unités principales, Paris 1886 (die dem Verfasser nicht erreichbar war) vermuthlich eng anschliesst, sind namentlich zu nennen:

Poincaré, Sur les nombres complexes, Comptes Rendus XCIX (1884), S. 740—742.

B. Peirce, Linear associative algebra. With notes and addenda by C. S. Peirce. American Journ. of Math. IV (1881), S. 97—229.

Study, Ueber Systeme von complexen Zahlen, Göttinger Nachrichten 1889, S. 237—268.

—, Complexe Zahlen und Transformationsgruppen, Berichte der Ges. d. W. zu Leipzig 1889, S. 177—228,

sowie zahlreiche Abhandlungen und Noten von Cayley und Sylvester, namentlich im Americ. Journ. of Math. und in Johns Hopkin's Circular, u. s. w.

Digitized by Google

genden die ganze Schaar der Systeme auf Grund von Sätzen aus dem Bereiche der LIE'schen Theorie der Transformationsgruppen in zwei Kategorien eingetheilt, die in Analogie mit einer Bezeichnung jener Theorie als die Schaar der *Kegelschnittsysteme* und die der *Nichtkegelschnittsysteme* bezeichnet werden. Diese Scheidung ist in der Natur der Sache begründet, und die Systeme der ersteren Art darf man wohl als die bei weitem interessantesten hervorheben. Zu ihnen gehören unter anderen die *Quaternionen* von HAMILTON und das dazu analoge System von *Nonionen*, das vor einigen Jahren von SYLVESTER aufgestellt wurde [1]).

In § 1 sind die beiden Classen von Systemen näher charakterisirt. § 2 beschäftigt sich mit der allgemeinen Form der Kegelschnittsysteme, welche sich wieder in zwei verschiedene Kategorien einreihen lassen, indem sich ergiebt, dass dieselben stets ein System enthalten, das entweder vier oder fünf Einheiten hat und in sich geschlossen ist. Die erstere Kategorie (— Erweiterung des Quaternionensystems —) ist in § 3 untersucht und erledigt. Die andere wird in § 4 eingehend betrachtet. Mit Hülfe der in diesen beiden §§ entwickelten Theorien ist es dann leicht, in § 5 alle Kegelschnittssysteme aus 4, 5, 6, 7, 8 Einheiten fast ohne Rechnung anzugeben. Im § 6 treten die Nichtkegelschnittssysteme in den Vordergrund. Dieselben besitzen sehr einfach gebaute Multiplicationstafeln und lassen sich verhältnissmässig leicht berechnen. Ihre Betrachtung führt naturgemäss zu Ausartungen von Zahlensystemen, nämlich solchen, denen sich keine einfach-transitiven Gruppen zuordnen lassen. Bei der Aufmerksamkeit, welche diesen Ausartungen namentlich von Seiten englischer und amerikanischer Mathematiker geschenkt wird, erschien es angebracht, alle ausgearteten Systeme in drei Einheiten anzugeben und damit eine CAYLEY'sche Untersuchung [2]) weiter zu führen. Im Schlussparagraphen endlich ist die Tafel aller Zahlensysteme aus fünf Einheiten aufgestellt, die wohl hier zum ersten Male gegeben wird.

Wegen der engen Beziehung zwischen Zahlensystemen und Transformationsgruppen, sowie namentlich wegen der funda-

---

1) Siehe § 5.

2) CAYLEY, On double algebra, Proceed. of Lond. Math. Soc. XV (1883—84), S. 185—197.

Digitized by Google

mentalen Trennung aller Zahlensysteme in zwei Kategorien auf Grund gruppentheoretischer Sätze muss bezüglich der benutzten Begriffe der Gruppentheorie auf den erschienenen ersten Band des grossen LIE'schen Werkes verwiesen werden[1]).

§ 1.

Scheidung aller Zahlensysteme in zwei Classen.

Der enge Zusammenhang, welcher zwischen den Zahlensystemen und gewissen endlichen continuirlichen Transformationsgruppen besteht[2]), führt zu einer bemerkenswerthen Scheidung aller Systeme in zwei Classen.

Nach einem Satze von ENGEL[3]), der wiederum in einer Reihe LIE'scher Sätze seinen Ursprung findet, lassen sich nämlich alle endlichen continuirlichen Gruppen von Punkttransformationen, die von infinitesimalen Transformationen $X_1 f \,..\, X_r f$ erzeugt sind, in zwei Kategorien theilen. Die Gruppen der einen Kategorie besitzen eine dreigliedrige Untergruppe von der *Kegelschnittszusammensetzung*:

$$(X_1 X_2) = X_1 \,, \quad (X_1 X_3) = 2 X_2 \,, \quad (X_2 X_3) = X_3 \,.$$

Die Gruppen der zweiten Kategorie hingegen haben die besondere Zusammensetzung

$$(X_i X_{i+\varkappa}) = \sum_{1}^{i+\varkappa-1} {}_s \, c_{i,i+\varkappa,s} \, X_s f$$

$$(i = 1, \,.. \, r-1 \,;\; \varkappa = 1, \; 2, \,.. \, r-i) \,.$$

Dementsprechend ordnen sich auch die Zahlensysteme in zwei Classen ein, da jedes System als eine endliche continuirliche Gruppe von Punkttransformationen aufgefasst werden kann, die von infinitesimalen Transformationen erzeugt ist.

---

1) SOPHUS LIE, Theorie der Transformationsgruppen, I. Abschnitt, unter Mitwirkung von F. ENGEL bearbeitet. Leipzig, Teubner, 1888.

2) Dieser Zusammenhang ist eingehend dargestellt worden in der zweiten der citirten Abhandlungen von STUDY. Man vergleiche auch meine eigene Note »Zur Theorie der aus n Haupteinheiten ableitbaren höheren complexen Zahlen«, Ber. d. Ges. d. W. zu Leipzig, 1889, S. 290—307.

3) ENGEL, Kleinere Beiträge zur Gruppentheorie. II. Zur Theorie der Zusammensetzung, Ber. d. Ges. d. W. zu Leipzig, 1887, S. 95—99.

Digitized by Google

Diejenigen Systeme, welche der zuerst bezeichneten Classe angehören, wollen wir *Kegelschnittssysteme*, die anderen *Nichtkegelschnittssysteme* nennen.

Es handelt sich darum, die Eigenschaften beider Arten, welche soeben nur gruppentheoretisch definirt wurden, auch zahlentheoretisch auszusprechen.

Allgemein entspricht jeder infinitesimalen Transformation der zu einem System gehörigen Gruppe $x' = xa$ eine Multiplication mit einer Zahl $\varepsilon + u\tau$ des Systems, wo ε den Modul [1]) und τ eine unendlich wenig von Null verschiedene gewöhnlich-complexe Zahl bedeutet. Wenn nun den infinitesimalen Transformationen Uf, Vf der Gruppe die Multiplicationen mit $\varepsilon + u\tau$ resp. $\varepsilon + v\tau$ entsprechen, so ist der infinitesimalen Transformation $(UV) \equiv U(V) - V(U)$ die Multiplication mit $\varepsilon + (uv - vu)\tau$ zugeordnet. Soll also das Zahlensystem der zuerst genannten Classe angehören, so ergiebt sich unmittelbar, dass es in ihm drei von einander linear unabhängige Zahlen u, v, w geben muss von der Beschaffenheit, dass für jede Zahl x des Systems

$$\begin{aligned} x \cdot (\varepsilon + (uv - vu)\tau) &= x \cdot (\varepsilon + u\tau) , \\ x \cdot (\varepsilon + (uw - wu)\tau) &= x \cdot (\varepsilon + 2v\tau) , \\ x \cdot (\varepsilon + (vw - wv)\tau) &= x \cdot (\varepsilon + w\tau) \end{aligned}$$

ist. Es muss also sein:

$$(1) \qquad uv - vu = u , \quad uw - wu = 2v , \quad vw - wv = w .$$

Diese Gleichungen sind nicht ganz symmetrisch. Wir wählen deshalb statt u, v, w die folgenden Zahlen des Systems:

$$\overline{u} = -iV\overline{i} \cdot u + V\overline{i} \cdot w , \quad \overline{v} = 2iv , \quad \overline{w} = +V\overline{i} \cdot u - iV\overline{i} \cdot w .$$

Nach (1) und unter Benutzung des distributiven Gesetzes ergiebt sich nämlich

$$\overline{u}\,\overline{v} - \overline{v}\,\overline{u} = 2\overline{w} , \quad \overline{v}\,\overline{w} - \overline{w}\,\overline{v} = 2\overline{u} , \quad \overline{w}\,\overline{u} - \overline{u}\,\overline{w} = 2\overline{v} ,$$

und diese Gleichungen, welche offenbar (1) ersetzen, sind durchaus symmetrisch. Man überzeugt sich leicht davon, dass der Modul des Systems sich nicht durch $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ allein linear

---

1) D. h. diejenige Zahl ε des Systemes, für welches stets $x\varepsilon = \varepsilon x = x$ ist.

Digitized by Google

darstellen lässt. Demgemäss lassen sich $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ und der Modul als vier von einander unabhängige Einheiten des Systemes wählen, und wir können sagen:

Ein Kegelschnittssystem $(e_1 \dots e_n)$ besitzt drei vom Modul unabhängige Einheiten e_1, e_2, e_3, für welche

$$(2)\quad e_1e_2 - e_2e_1 = 2e_3, \quad e_2e_3 - e_3e_2 = 2e_1, \quad e_3e_1 - e_1e_3 = 2e_2$$

ist, und umgekehrt ist jedes System, welches drei solche Zahlen e_1, e_2, e_3 besitzt, ein Kegelschnittssystem.

Kegelschnittssysteme treten ihrer Natur nach erst im Falle von vier oder mehr Einheiten auf. Ein Beispiel ist das System der Quaternionen.

Einem Nichtkegelschnittssystem gehört eine projective Gruppe von der oben angegebenen Eigenthümlichkeit zu. Für eine solche Gruppe gilt aber der Satz [1]), dass sie in dem Raume ihrer Variabeln einen Punkt, eine durch diesen gehende Gerade, eine durch letztere gehende Ebene u. s. w. invariant lässt. Jeder Punkt des Raumes n^{ter} Stufe mit den homogenen Punktcoordinaten $x_1 \dots x_n$ stellt aber eine Zahl $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$ des Systems dar, und wir sehen folglich, dass es im Zahlensystem von der betrachteten Art eine Zahl 0 (entsprechend dem invarianten Punkt) giebt, die bei jeder Multiplication mit einem Coefficienten reproducirt wird:

$$e_1e_\varkappa = \text{Const. } e_1,$$

ferner eine Zahl e_2 derart, dass jedes Product $e_2e_\varkappa$ sich durch e_1 und e_2 allein ausdrückt:

$$e_2e_\varkappa = \text{Const. } e_1 + \text{Const. } e_2,$$

eine Zahl e_3, so dass stets

$$e_3e_\varkappa = \text{Const. } e_1 + \text{Const. } e_2 + \text{Const. } e_3$$

ist u. s. w. Dem Zahlensystem gehört aber noch eine zweite zur ersten Gruppe $x' = xa$ reciproke Gruppe $x' = ax$ [2]) zu, welche dieselben Gebilde wie die erstere invariant lässt [3]). Demgemäss ist auch

1) Siehe LIE, a. a. O. S. 589, Satz 4.

2) Vgl. die in der Fussnote 2) S. 402 angegebenen Abhandlungen.

3) Vgl. LIE, a. a. O. S. 390, Satz 8.

Digitized by Google

$$e_k e_1 = \text{Const. } e_1 ,$$
$$e_k e_2 = \text{Const. } e_1 + \text{Const. } e_2 ,$$
$$e_k e_3 = \text{Const. } e_1 + \text{Const. } e_2 + \text{Const. } e_3$$

u. s. w. Die Multiplicationstafel [1]) des Systems hat somit die Form

$$(3) \qquad \left| \begin{array}{ccccc} (1) & (1) & (1) & (1) & . . \\ (1) & (12) & (12) & (12) & . . \\ (1) & (12) & (123) & (123) & . . \\ (1) & (12) & (123) & (1234) & . . \\ . & . & . & . & . . \\ . & . & . & . & . . \end{array} \right|$$

Hierbei soll $(123 .. m)$ einen Ausdruck von der Form

$$\text{Const. } e_1 + \text{Const. } e_2 + \cdots + \text{Const. } e_m$$

bedeuten.

So ist auch für die Nichtkegelschnittssysteme eine zahlentheoretische Definition gegeben, denn umgekehrt ist jedes System, dessen Multiplicationstafel auf die Form (3) gebracht werden kann, ein Nichtkegelschnittssystem.

§ 2.

Zur Bestimmung der Kegelschnittssysteme.

Nehmen wir an, ein Zahlensystem $(e_0 e_1 e_2 ..)$ sei ein Kegelschnittssystem. Dann giebt es drei vom Modul e_0 unabhängige Einheiten e_1, e_2, e_3 derart, dass

$$(1) \quad e_1 e_2 - e_2 e_1 = 2 e_3 , \quad e_2 e_3 - e_3 e_2 = 2 e_1 , \quad e_3 e_1 - e_1 e_3 = 2 e_2$$

ist. Hieraus leiten wir eine neue Gleichung ab. Es ist

$$e_1 e_2^2 - e_2^2 e_1 = (e_1 e_2 - e_2 e_1) e_2 + e_2 (e_1 e_2 - e_2 e_1)$$

und also nach (1):

$$(2) \qquad e_1 e_2^2 - e_2^2 e_1 = 2 (e_3 e_2 + e_2 e_3)$$

1) Hier steht der Ausdruck des Productes $e_i e_x$ im Durchschnitt der i^{ten} Colonne und x^{ten} Zeile.

Digitized by Google

und durch cyklische Vertauschung der Indices 1, 2, 3 ergeben sich zwei ähnliche Relationen.

Wenn wir nun allgemein jede Zahl

$$x = x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots$$

unseres Systems als Punkt mit den homogenen Coordinaten x_0, x_1, x_2 ... in einem Raume von entsprechender Stufenzahl interpretiren, so stellen e_1, e_2, e_3 drei Punkte dar, welche eine Ebene bestimmen. Diese drei Punkte sind die Ecken eines Polardreiecks des Kegelschnittes

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

in der Ebene (e_1, e_2, e_3). Es liegt nahe, zu Einheitspunkten statt e_1, e_2, e_3 die Ecken eines beliebigen Polardreiecks dieses Kegelschnittes zu wählen, d. h. an Stelle von e_1, e_2, e_3 neue Einheiten einzuführen vermöge einer orthogonalen Subtitution

$$(3) \qquad \begin{cases} \bar{e}_1 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 \ , \\ \bar{e}_2 = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3 \ , \\ \bar{e}_3 = \nu_1 e_1 + \nu_2 e_2 + \nu_3 e_3 \ , \end{cases}$$

wo

$$\begin{aligned} &\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1 \ , \quad \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3 = 0 \ , \\ &\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 = 1 \ , \quad \mu_1\nu_1 + \mu_2\nu_2 + \mu_3\nu_3 = 0 \ , \\ &\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1 \ , \quad \nu_1\lambda_1 + \nu_2\lambda_2 + \nu_3\lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

angenommen wird und dann bekanntlich auch

$$(4) \quad \lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2 = \nu_1 \ , \quad \lambda_3\mu_1 - \lambda_1\mu_3 = \nu_2 \ , \quad \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = \nu_3$$

ist.

Man findet, dass die Relationen (1) und — da (2) blosse Folge von (1) ist — auch die Relation (2) für die neuen Einheiten $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ bestehen bleiben. In der That ergiebt sich ja z. B.

$$\bar{e}_1\bar{e}_2 - \bar{e}_2\bar{e}_1 = (\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)e_1e_2 + \cdots - (\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)e_2e_1 - \cdots \ ,$$

d. h. nach (1):

$$\bar{e}_1\bar{e}_2 - \bar{e}_2\bar{e}_1 = 2(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)e_3 + \cdots$$

und also nach (4):

Digitized by Google

$$\overline{e_1}\,\overline{e_2} - \overline{e_2}\,\overline{e_1} = 2(\nu_1 e_1 + \nu_2 e_2 + \nu_3 e_3)$$

oder endlich nach (3):

$$\overline{e_1}\,\overline{e_2} - \overline{e_2}\,\overline{e_1} = 2\,\overline{e_3} .$$

Wählen wir als jene orthogonale Substitution (3) insbesondere diese:

$$(5) \qquad \begin{cases} \overline{e_1} = e_1 , \\ \overline{e_2} = \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}(e_2 + u e_3) , \\ \overline{e_3} = \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}(-u e_2 + e_3) , \end{cases}$$

wo natürlich die gewöhnlich-complexe Zahl u verschieden von $\pm i$ angenommen werden muss, so gelten (1) und (2) sicher auch geschrieben in $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$. Die Gleichung (2) enthält überdies e_2 und e_3 in homogener Weise (im 2. Grade), sie besteht daher auch für die folgenden Einheiten:

$$(6) \qquad \begin{cases} \overline{\overline{e_1}} = e_1 , \\ \overline{\overline{e_2}} = e_2 + u e_3 , \\ \overline{\overline{e_3}} = -u e_2 + e_3 . \end{cases}$$

Es ist also

$$(7) \qquad \overline{\overline{e_1}}\,\overline{\overline{e_2^2}} - \overline{\overline{e_2^2}}\,\overline{\overline{e_1}} = 2(\overline{\overline{e_2}}\,\overline{\overline{e_3}} + \overline{\overline{e_3}}\,\overline{\overline{e_2}})$$

und zwar für alle gewöhnlich-complexen Werthe von u mit Ausnahme von $u = \pm i$. Aber wenn wir (6) in (7) substituiren, so werden beide Seiten von (7) quadratisch in u, und da u variiren kann, so müssen die Coefficienten gleicher Potenzen von u rechts und links übereinstimmen. Dann aber gilt (7) für *jeden* Werth von u, auch für $u = \pm i$.

Setzen wir daher $u = i$, so wird nach (6)

$$\overline{e_3} = -i\,\overline{\overline{e_2}}$$

und $\overline{\overline{e_2}}$ ist offenbar der eine Schnittpunkt e des Kegelschnittes mit der e_2 und e_3 verbindenden Geraden, d. h. Berührpunkt der einen von e_1 aus gezogenen Tangente. Die Gleichung (7) liefert demnach, weil jetzt $\overline{e_2}\,\overline{e_3} = \overline{e_3}\,\overline{e_2} = -ie^2$ wird, die Relation

Digitized by Google

(8) $$e_1 e^2 - e^2 e_1 = -4ie^2 .$$

Hätten wir gleich zu Anfang statt des Punktes e_1 auf der Tangente (e_1, e) einen andern Punkt e_1' gewählt, so würden wir zu demselben Punkte e auf dem Kegelschnitte, nur vielleicht mit einem von 1 verschiedenen Zahlenfactor λ behaftet: λe gelangt sein und hätten analog (8) die Gleichung gefunden:

$$e_1' \cdot \lambda^2 e^2 - \lambda^2 e^2 \cdot e_1' = -4i\lambda^2 e^2$$

oder

(8′) $$e_1' e^2 - e^2 e_1' = -4ie^2 .$$

Da e_1' wie e_1 auf jener Tangente gelegen sind, so ist auch $e_1 - e_1'$ ein Punkt der Tengente, und für diesen besteht wie für e_1 und e_1' eine Gleichung analog (8) und (8′):

$$(e_1 - e_1')e^2 - e^2(e_1 - e_1') = -4ie^2 .$$

Aber aus (8) und (8′) ergiebt sich durch Subtraction

$$(e_1 - e_1')e^2 - e^2(e_1 - e_1') = 0$$

und deshalb ist

$$e^2 = 0 ,$$

in Worten: Das Quadrat jedes Kegelschnittspunktes ist Null.

Nunmehr kehren wir zu den ursprünglichen Einheiten e_1, e_2, e_3 zurück. Es sind bei Zugrundelegung derselben $e_2 \pm ie_3$ Punkte des Kegelschnittes. Also folgt nach dem soeben Bewiesenen

$$(e_2 \pm ie_3)^2 = 0 ,$$

d. h.

$$e_2^2 - e_3^2 \pm i(e_2 e_3 + e_3 e_2) = 0 ,$$

folglich

$$e_2^2 = e_3^2 , \quad e_2 e_3 + e_3 e_2 = 0 .$$

Cyklische Vertauschung von 1, 2, 3 giebt vier ähnliche Gleichungen. Aus ihnen und aus (1) folgt sofort

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 ,$$

$$e_1 e_2 = e_3 , \quad e_2 e_3 = e_1 , \quad e_3 e_1 = e_2 ,$$

$$e_2 e_1 = -e_3 , \quad e_3 e_2 = -e_1 , \quad e_1 e_3 = -e_2 .$$

Digitized by Google

Es ist nun, wenn $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2$ mit $-\eta$ bezeichnet wird:

$$e_1\eta = \eta e_1 , \quad e_2\eta = \eta e_2 , \quad e_3\eta = \eta e_3 ;$$

ferner

$$\eta e_1 = -e_2^2 e_1 = -e_2 \cdot e_2 e_1 = +e_2 \cdot e_3 = e_1 ,$$
$$e_1\eta = -e_1 e_2^2 = -e_1 e_2 \cdot e_2 = -e_3 \cdot e_2 = e_1 ,$$

analog $\eta e_2 = e_2\eta = e_2$, $\eta e_3 = e_3\eta = e_3$. Endlich wird noch

$$\eta^2 = e_1^4 = -e_1 \cdot \eta \cdot e_1 = -e_1^2 = \eta .$$

Es sind zwei Fälle denkbar: Entweder ist η aus e_0, e_1, e_2, e_3 allein linear ableitbar oder η ist eine neue Einheit e_4.

Im ersteren Falle ist η offenbar identisch mit dem Modul e_0 und e_0, e_1, e_2, e_3 bilden das in sich geschlossene System der Quaternionen mit der Multiplicationstafel

I.

e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	$-e_0$	$-e_3$	e_2
e_2	e_3	$-e_0$	$-e_1$
e_3	$-e_2$	e_1	$-e_0$

Im andern Falle bilden e_0, e_1, e_2, e_3, e_4 ein in sich geschlossenes Zahlensystem mit der Multiplicationstafel

II.

e_0	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	$-e_4$	$-e_3$	e_2	e_1
e_2	e_3	$-e_4$	$-e_1$	e_2
e_3	$-e_2$	e_1	$-e_4$	e_3
e_4	e_1	e_2	e_3	e_4

Natürlich ist es denkbar, dass sowohl zum System I. als auch zum System II. noch weitere Einheiten e_4, e_5 .. resp. e_5, e_6 .. hinzutreten, und dies zu untersuchen, ist die Aufgabe der beiden folgenden Paragraphen.

§ 3.

Der Fall I.

Unser jetziges Problem ist, zum Quaternionensystem I. des § 2 weitere Einheiten e_4, e_5 .. hinzuzufügen, wohlbemerkt derart, dass auch für diese e_0 Modul ist.

Digitized by Google

Es ist etwa

$$e_4 e_1 = \cdots + a_4 e_4 + b_4 e_5 + \cdots$$
$$e_5 e_1 = \cdots + a_5 e_4 + b_5 e_5 + \cdots ,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

wo die mit e_0, e_1, e_2, e_3 behafteten Glieder nicht mitgeschrieben sind. Die Determinante $\Sigma \pm a_4 b_5 \ldots$ ist $\neq 0$, denn sonst liesse sich eine Einheit e_4 so wählen, dass

$$e_4 e_1 = \alpha e_0 + \beta e_1 + \gamma e_2 + \delta e_3 ,$$

also

$$e_4 e_1^2 = - e_4 e_0 = - e_4 = \alpha e_1 - \beta e_0 - \gamma e_3 + \delta e_2$$

wäre, was absurd ist. Daher lassen sich nicht sämtlich verschwindende Constanten $\lambda_4, \lambda_5 \ldots$ so wählen, dass $(\lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5 + \cdots) e_1$ die Form $\cdots + \varrho(\lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5 + \cdots)$ annimmt. Die Grösse $\lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5 + \cdots$ darf zur Einheit e_4 genommen werden und es ist

$$e_4 e_1 = a e_0 + b e_1 + c e_2 + d e_3 + \varrho e_4 .$$

Bilden wir $e_4 e_1^2 = - e_4 e_0 = - e_4$, so folgt $b = \varrho a$, $c = \varrho d$, $\varrho = i$. Indem wir statt e_4 passend $e_4 + \text{Const.}\, e_0 + \cdots + \text{Const.}\, e_3$ als Einheit einführen, erreichen wir, dass $e_4 e_1 = i e_4$ angenommen werden kann. $e_4 e_2$ hängt nun nicht nur von $e_0 \ldots e_4$ ab, denn wäre $e_4 e_2 = \cdots + \sigma e_4$, so würde aus $e_4 e_2^2 = - e_4$ hervorgehen $\sigma^2 = - 1$. Aus $e_4 e_1 e_2 = i e_4 e_2 = e_4 e_3$ ergäbe sich dann $e_4 e_2 \cdot e_1 = - e_4 e_3 = - i e_4 e_2$. In $e_4 e_2 \cdot e_1$ hat jedoch e_4 den Coefficienten σi, in $- i e_4 e_2$ den Coefficienten $- \sigma i$ und beide sind wegen $\sigma^2 = - 1$ unmöglich einander gleich. Also darf $e_4 e_2 = e_5$ gesetzt werden und es kommt $e_5 e_1 = e_4 e_2 \cdot e_1 = - i e_4 e_2 = - i e_5$. Wir haben also

$$e_4 e_1 = i e_4 , \quad e_5 e_1 = - i e_5 .$$

Nunmehr lässt sich e_6 so wählen, dass $e_6 e_1$ nur von $e_0 \ldots e_6$ abhängt. Aus $e_6 e_1^2 = - e_6$ folgt dann unter Anderem, dass der Coefficient von e_6 darin zum Quadrate $- 1$ hat, und durch Einführung einer Einheit $e_6 + \text{Const.}\, e_0 + \cdots + \text{Const.}\, e_3$ anstatt e_6 lässt sich erreichen, dass

$$e_6 e_1 = \sigma e_4 + \sigma' e_5 + \varrho e_6 , \quad \varrho^2 = - 1$$

wird. Aus $e_6 e_1^2 = - e_6$ geht dann $\sigma(\varrho + i) = \sigma'(\varrho - i) = 0$

Digitized by Google

hervor. Indem wir als neues e_6 einführen: $\bar{e}_6 = e_6 + s e_4 + s' e_5$, ergiebt sich

$$\bar{e}_6 e_4 = \sigma e_4 + \sigma' e_5 + \varrho(\bar{e}_6 - s e_4 - s' e_5) + s i e_4 - s' i e_5 .$$

Hierin haben e_4 resp. e_5 die Coefficienten $\sigma - s(\varrho - i)$ resp. $\sigma' - s'(\varrho + i)$. Ist $\varrho = +i$, d. h. $\sigma = 0$, so setzen wir $s' = -\frac{1}{2} i\sigma'$ und beide Coefficienten verschwinden. Aehnliches gilt, wenn $\varrho = -i$ ist. Also darf angenommen werden

$$e_6 e_4 = \pm i e_6 .$$

Die Grösse $e_7 = \pm e_6 e_2$ hängt dann nicht bloss von $e_0 \ldots e_6$ ab, denn wäre $e_6 e_2 = \cdots + a e_6$, so würde $e_6 e_2^2 = -e_6$ ergeben, dass $a^2 = -1$ sein müsste. Ausserdem käme $e_6 e_4 e_2 = \pm i e_6 e_2 = e_6 e_3$ und daher $e_6 e_2 e_4 = -e_6 e_3 = \mp i e_6 e_2$. In $e_6 e_2 \cdot e_4$ hat jedoch e_6 den Coefficienten $\pm i a$, in $\pm i e_6 e_2$ den Coefficienten $\mp i a$. Beide können nicht wegen $a^2 = -1$ übereinstimmen. Es ist also $e_7 = \pm e_6 e_2$ eine neue Einheit. Man findet $e_7 e_4 = \mp i e_7$.

In dieser Weise kann man fortfahren und die Folgerungen durch Schluss von n auf $n+1$ verallgemeinern. Es ergiebt sich dadurch, dass im ganzen System ausser $e_0 \ldots e_3$ noch $2 \cdot n$ Einheiten, die wir zweckmässig nunmehr mit $E_1, E_2 \ldots E_n$, H_1, $\mathsf{H}_2 \ldots \mathsf{H}_n$ bezeichnen, vorhanden sind derart, dass

$$\begin{aligned} E_\varkappa e_4 &= i E_\varkappa , & \mathsf{H}_\varkappa e_4 &= -i \mathsf{H}_\varkappa , \\ E_\varkappa e_2 &= \mathsf{H}_\varkappa , & \mathsf{H}_\varkappa e_2 &= -E_\varkappa , \qquad (\varkappa = 1, 2 \ldots n) \\ E_\varkappa e_3 &= i \mathsf{H}_\varkappa , & \mathsf{H}_\varkappa e_3 &= i E_\varkappa , \end{aligned}$$

wird.

Bisher haben wir immer die Einheiten $e_0 \ldots e_3$ als zweite Factoren benutzt. Wir hätten aber auch statt der Producte $e_4 e_4$, $e_5 e_4 \ldots$ die Producte $e_4 e_4$, $e_4 e_5 \ldots$ untersuchen können. Wir würden dann gefunden haben, dass die $2 \cdot n$ zu $e_0 \ldots e_3$ hinzutretenden Einheiten in solcher Form $E_\varkappa'$, $\mathsf{H}_\varkappa'$ gewählt werden können, dass

$$\begin{aligned} e_4 E_\varkappa' &= i E_\varkappa' , & e_4 \mathsf{H}_\varkappa' &= -i \mathsf{H}_\varkappa' , \\ e_2 E_\varkappa' &= i \mathsf{H}_\varkappa' , & e_2 \mathsf{H}_\varkappa' &= i E_\varkappa' , \qquad (\varkappa = 1, 2 \ldots n) \\ e_3 E_\varkappa' &= \mathsf{H}_\varkappa' , & e_3 \mathsf{H}_\varkappa' &= -E_\varkappa' \end{aligned}$$

Digitized by Google

wird. Die $E_\varkappa'$ und $\mathsf{H}_\varkappa'$ sind lineare Ausdrücke in den $e_0 \dots e_3$, $E_\varkappa$, $\mathsf{H}_\varkappa$ und umgekehrt die $E_\varkappa$ und $\mathsf{H}_\varkappa$ lineare Ausdrücke in den $e_0 \dots e_3$, $E_\varkappa'$, $\mathsf{H}_\varkappa'$.

Gehen wir auf die Bestimmung der $E_\varkappa'$ und $\mathsf{H}_\varkappa'$ etwas näher ein. Zunächst wird allgemein jedes $e_1 E_\varkappa$ und $e_1 \mathsf{H}_\varkappa$ die Form

$$\text{Const. } e_0 + \cdots + \text{Const. } e_3 + \Sigma \text{ Const. } E_i + \Sigma \text{ Const. } \mathsf{H}_i$$

haben. Aber wenn wir bedenken, dass $e_1 E_\varkappa e_1 = i e_1 E_\varkappa$ und $e_1 \mathsf{H}_\varkappa = e_1 E_\varkappa e_2$ ist, so ergiebt sich, dass in den Ausdrücken für die $e_1 E_\varkappa$ die H, in den Ausdrücken für die $e_1 \mathsf{H}_\varkappa$ die E fehlen und zwar hat, wenn

$$e_1 E_\varkappa = \text{Const. } e_0 + \cdots + \text{Const. } e_3 + \sum\nolimits^i a_{\varkappa i} E_i$$

ist, $e_1 \mathsf{H}_\varkappa$ die Form

$$e_1 \mathsf{H}_\varkappa = \text{Const. } e_0 + \cdots + \text{Const. } e_3 + \sum\nolimits^i a_{\varkappa i} \mathsf{H}_i \ .$$

Ein $E_\varkappa$ lässt sich wegen der Form der $e_1 E_\varkappa$ so annehmen, dass

$$e_1 E_1 = \text{Const. } e_0 + \cdots + \text{Const. } e_3 + i E_1$$

wird. Wegen $e_1^2 E_1 = - E_1$ hat $e_1 E_1$ die speciellere Form:

$$e_1 E_1 = a e_0 + i a e_1 + c e_2 + i c e_3 + i E_1 \ .$$

Nun darf E_1 ersetzt werden durch

$$E_1 = E_1 - \tfrac{1}{2} c i e_2 + \tfrac{1}{2} c e_3 \ ,$$

denn dann bleibt immer noch $\overline{E_1} e_2 = i \overline{E_1}$. Durch Einführung dieses neuen E_1 wird dann

$$e_1 E_1 = a e_0 + i a e_1 + i E_1 \ .$$

Wenn wir endlich bedenken, dass $e_1 E_1 e_1 = i e_1 E_1$ ist, so ergiebt sich noch $a = 0$, sodass bleibt

$$e_1 E_1 = i E_1 \ .$$

Dies E_1 kann nun als E_1' gewählt werden. Das zugehörige H_1' wird dann definirt durch

$$e_3 E_1 = \mathsf{H}_1' \ .$$

Sei etwa

Digitized by Google

$$\mathsf{H}_1' = ae_0 + be_1 + ce_2 + de_3 + \Sigma\lambda_i E_i + \Sigma\mu_i \mathsf{H}_i ,$$

so folgt aus $\mathsf{H}_1' e_1 = e_3 E_1 e_1 = ie_3 E_1 = i\mathsf{H}_1'$ der speciellere Werth

$$\mathsf{H}_1' = ibe_0 + be_1 + ce_2 + ice_3 + \Sigma\lambda_i E_i .$$

Also auch H_1' drückt sich nur durch die $e_0 \ldots e_3$ und die E_i aus. Man überzeugt sich davon, dass auch $\mathsf{H}_1' e_1 = +i\mathsf{H}_1'$ ist, und daraus folgt, dass H_1' direct mit einem der E_i identificirt werden darf, natürlich nicht mit E_1.

Nunmehr kann E_2 so angenommen werden, dass

$$e_1 E_2 = ae_0 + be_1 + ce_2 + de_3 + \sigma E_1 + \sigma' \mathsf{H}_1' + \varrho E_2$$

wird. Wegen $e_1^2 E_2 = -E_2$ specialisirt sich dieser Werth zu:

$$e_1 E_2 = ae_0 + \varrho ae_1 + ce_2 + \varrho ce_3 + \sigma E_1 + \sigma' \mathsf{H}_1' + \varrho E_2 ,$$

wo

$$(\varrho + i)\sigma = 0 , \quad (\varrho - i)\sigma' = 0 ,$$
$$\varrho^2 = -1$$

ist. Setzen wir an, dass $e_1 E_2 e_1 = ie_1 E_2$ ist, so folgt noch

$$(\varrho + i)a = 0 , \quad (\varrho - i)c = 0 .$$

Statt E_2 führen wir als neues $\overline{E_2}$ ein:

$$\overline{E_2} = E_2 + i\beta e_0 + \beta e_1 + \gamma e_2 + i\gamma e_3 + sE_1 + s'\mathsf{H}_1' ,$$

was geschehen darf, da fortwährend $\overline{E_2} e_1 = i\overline{E_2}$ bleibt. Alsdann kommt

$$\begin{aligned} e_1 \overline{E_2} = {} & ae_0 + \varrho ae_1 + ce_2 + \varrho ce_3 + \sigma E_1 + \sigma' \mathsf{H}_1' + \\ & + \varrho(\overline{E_2} - i\beta e_0 - \beta e_1 - \gamma e_2 - i\gamma e_3 - sE_1 - s'\mathsf{H}_1') \\ & + i\beta e_1 - \beta e_0 + \gamma e_3 - i\gamma e_2 + isE_1 - is'\mathsf{H}_1' . \end{aligned}$$

Die Coefficienten von $e_0 \ldots e_3$, E_1 und H_1' hierin verschwinden, sobald die Ausdrücke

$$a - \varrho i\beta - \beta , \quad c - \varrho\gamma - i\gamma ,$$
$$\sigma - \varrho s + is , \quad \sigma' - \varrho s' - is'$$

gleich Null sind. Ist nun $\varrho = +i$, so ist $a = 0$, $\sigma = 0$, also verschwinden dann zwei dieser Ausdrücke, während sich die

Digitized by Google

beiden anderen durch passende Wahl von γ und s' gleich Null machen lassen. Ist $\varrho = -i$, so gilt Aehnliches. Jedenfalls dürfen wir also annehmen:

$$e_1 E_2 = \varrho E_2 .$$

E_2 wählen wir nun als E_2' und definiren H_2' durch

$$e_3 E_2' = e_3 E_2 = \mathsf{H}_2' ,$$

sodass $\mathsf{H}_2' e_1 = e_3 E_2 e_1 = i e_3 E_2 = i \mathsf{H}_2'$, also H_2' auch eines der E_i ist, natürlich nicht E_1 oder E_2 selbst.

So können wir weiter folgern und das Verfahren durch Schluss von n auf $n+1$ verallgemeinern. Es ergiebt sich, dass die E_i sich in zwei Gruppen eintheilen lassen:

$$E_1 , E_2 , E_3 \ldots . E_\nu ;$$
$$E_{\nu+1} , E_{\nu+2} \ldots . . E_n ,$$

wo $\nu = \frac{n}{2}$ und also n gerade ist und die Relationen bestehen:

$$e_1 E_j = i E_j , \quad e_1 E_{\nu+j} = -i E_{\nu+j} , \quad e_3 E_j = E_{\nu+j}$$
$$(j = 1, 2 \ldots \nu) .$$

Die $E_1 \ldots E_\nu$ sind auch durch $E_1' \ldots E_\nu'$ und die $E_{\nu+1} \ldots E_n$ durch $\mathsf{H}_1' \ldots \mathsf{H}_\nu'$ zu bezeichnen und es gelten demgemäss die Gleichungen

$$\begin{aligned} e_1 E_j &= i E_j , & e_1 E_{\nu+j} &= -i E_{\nu+j} , \\ e_2 E_j &= i E_{\nu+j} , & e_2 E_{\nu+j} &= i E_j , \\ e_3 E_j &= E_{\nu+j} , & e_3 E_{\nu+j} &= -E_j \end{aligned}$$
$$(j = 1, 2 \ldots \nu) .$$

Wir bemerkten schon, dass die $e_1 \mathsf{H}_\varkappa$ sich in der Form zeigen:

$$e_1 \mathsf{H}_\varkappa = \text{Const. } e_0 + \cdots + \text{Const. } e_3 + \Sigma a_{\varkappa i} \mathsf{H}_i ,$$

sobald

$$e_1 E_\varkappa = \text{Const. } e_0 + \cdots + \text{Const. } e_3 + \Sigma a_{\varkappa i} E_i$$

ist. Demnach folgt nun:

Digitized by Google

$$e_1 \mathsf{H}_j = a_j e_0 + b_j e_1 + c_j e_2 + d_j e_3 + i \mathsf{H}_j \ ,$$
$$e_1 \mathsf{H}_{\nu+j} = a_{\nu+j} e_0 + b_{\nu+j} e_1 + c_{\nu+j} e_2 + d_{\nu+j} e_3 - i \mathsf{H}_{\nu+j} \ .$$

Aus $e_1 \mathsf{H}_j e_1 = - i e_1 \mathsf{H}_j$ und $e_1 \mathsf{H}_j e_2 = - e_1 E_j = - i E_j$ und den analogen Formeln mit $\mathsf{H}_{\nu+j}$ folgt dann leicht, dass insbesondere

$$e_1 \mathsf{H}_j = i \mathsf{H}_j \ , \quad e_1 \mathsf{H}_{\nu+j} = - i \mathsf{H}_{\nu+j}$$

wird. Auch ist

$$e_3 \mathsf{H}_{\nu+j} = e_3 \cdot E_{\nu+j} e_2 = e_3 \cdot e_3 E_j \cdot e_2 = - E_j e_2 = - \mathsf{H}_j$$

und daher:

$$e_3 \mathsf{H}_j = - e_3^2 \mathsf{H}_{\nu+j} = \mathsf{H}_{\nu+j} \ .$$

Die Einheiten $\mathsf{H}_1 .. \mathsf{H}_\nu$ sind also mit $E_{\nu+1}' .. E_n'$, die Einheiten $\mathsf{H}_{\nu+1} .. \mathsf{H}_n$ mit $\mathsf{H}_{\nu+1}' .. \mathsf{H}_n'$ zu bezeichnen.

Nach allem Diesen sehen wir, dass die E und H sich in der durch folgende Tabelle angegebenen Weise mit $e_0 .. e_3$ multipliciren:

	e_0	e_1	e_2	e_3	E_j	$E_{\nu+j}$	H_j	$\mathsf{H}_{\nu+j}$
e_1		.	.	.	iE_j	$iE_{\nu+j}$	$-i\mathsf{H}_j$	$-i\mathsf{H}_{\nu+j}$
e_2		.	.	.	H_j	$\mathsf{H}_{\nu+j}$	$-E_j$	$-iE_{\nu+j}$
e_3		.	.	.	$i\mathsf{H}_j$	$i\mathsf{H}_{\nu+j}$	iE_j	$iE_{\nu+j}$
E_j		iE_j	$iE_{\nu+j}$	$E_{\nu+j}$	.	.	.	.
$E_{\nu+j}$		$-iE_{\nu+j}$	iE_j	$-E_j$	.	.	.	.
H_j		$i\mathsf{H}_j$	$i\mathsf{H}_{\nu+j}$	$\mathsf{H}_{\nu+j}$	.	.	.	.
$\mathsf{H}_{\nu+j}$		$-i\mathsf{H}_{\nu+j}$	$i\mathsf{H}_j$	$-\mathsf{H}_j$	.	.	.	.

$(j=1, 2 .. \nu)$

Hier steht z. B. das Product $e_2 E_j$ im Durchschnitt der mit e_2 beginnenden Colonne und der mit E_j beginnenden Zeile.

Noch nicht kennen wir die Producte der E, H unter sich. Aber durch Anwendung des associativen Gesetzes, wie z. B.:

$$(E_j e_1) E_{\nu+\varkappa} = i E_j E_{\nu+\varkappa} = - E_j (e_1 E_{\nu+\varkappa}) = - i E_j E_{\nu+\varkappa} \ ,$$

woraus $E_j E_{\nu+\varkappa} = 0$ u. s. w., ergeben sich mehrfache verschwin-

Digitized by Google

dende Producte und durch Anwendung der Formeln $E_j^2 e_1 = iE_j^2$ u. s. w. werden die Productausdrücke, welche nicht verschwinden, specialisirt. Man findet so folgende Multiplicationstafel des ganzen Systems:

e_0	e_1	e_2	e_3	.	E_j	$E_{\nu+j}$	H_j	$\mathsf{H}_{\nu+j}$.
e_1	$-e_0$	$-e_3$	e_2	.	iE_j	$iE_{\nu+j}$	$-i\mathsf{H}_j$	$-i\mathsf{H}_{\nu+j}$.
e_2	e_3	$-e_0$	$-e_1$	.	H_j	$\mathsf{H}_{\nu+j}$	$-E_j$	$-E_{\nu+j}$.
e_3	$-e_2$	e_1	$-e_0$	.	$i\mathsf{H}_j$	$i\mathsf{H}_{\nu+j}$	iE_j	$iE_{\nu+j}$.
.	.	.	.	.	.	.	.	. .
$E_\varkappa$	$iE_\varkappa$	$iE_{\nu+\varkappa}$	$E_{\nu+\varkappa}$	.	$u_{j\varkappa}$	$w_{j\varkappa}$	0	0 .
$E_{\nu+\varkappa}$	$-iE_{\nu+\varkappa}$	$iE_\varkappa$	$-E_\varkappa$	.	0	0	$iu_{j\varkappa}$	$iw_{j\varkappa}$.
$\mathsf{H}_\varkappa$	$i\mathsf{H}_\varkappa$	$i\mathsf{H}_{\nu+\varkappa}$	$\mathsf{H}_{\nu+\varkappa}$	.	$v_{j\varkappa}$	$t_{j\varkappa}$	0	0 .
$\mathsf{H}_{\nu+\varkappa}$	$-i\mathsf{H}_{\nu+\varkappa}$	$i\mathsf{H}_\varkappa$	$-\mathsf{H}_\varkappa$	.	0	0	$iv_{j\varkappa}$	$it_{j\varkappa}$.
.	.	.	.	.	.	.	.	. .

Hier ist

$$u_{j\varkappa} = ia_{j\varkappa}e_0 + a_{j\varkappa}e_1 + \sum_1^\nu{}_\tau \lambda_{j\varkappa\tau} E_\tau \ ,$$

$$v_{j\varkappa} = ia_{j\varkappa}e_2 + a_{j\varkappa}e_3 + \sum_1^\nu{}_\tau \lambda_{j\varkappa\tau} \mathsf{H}_\tau \ ,$$

$$w_{j\varkappa} = a_{j\varkappa}e_2 + ia_{j\varkappa}e_3 + \sum_1^\nu{}_\tau \lambda_{j\varkappa\tau} E_{\nu+\tau} \ ,$$

$$t_{j\varkappa} = -a_{j\varkappa}e_0 - ia_{j\varkappa}e_1 + \sum_1^\nu{}_\tau \lambda_{j\varkappa\tau} \mathsf{H}_{\nu+\tau} \ .$$

$$(j, \varkappa \leqq \nu .)$$

Man überzeugt sich nun davon, dass allgemein das associative Gesetz erfüllt ist, sobald es für die Producte der $E_1 \ldots E_\nu$ besteht. Auch sieht man, dass, wenn diese Producte bekannt sind, auch jedes Product im System angegeben werden kann.

$E_1 \ldots E_\nu$ bilden mit $\frac{1}{2}(e_0 - ie_1)$ zusammen ein Zahlensystem für sich mit dem Modul $\frac{1}{2}(e_0 - ie_1)$. Dies System hat nur $\nu+1$ Einheiten, während das von uns gesuchte System im Ganzen $4(\nu+1)$ Einheiten aufweist. Unser Problem ist daher auf das

Digitized by Google

bedeutend einfachere zurückgeführt, ein System von $(\nu+1)$ Einheiten $E_0 = \frac{1}{2}(e_0 - ie_1)$, $E_1, E_2 \ldots E_\nu$ mit dem Modul E_0 aufzustellen.

Die Systeme von $(\nu+1)$ Einheiten $E_0 \ldots E_\nu$ lassen sich bekanntlich in gewissen Typen darstellen. Es fragt sich, ob ein Typus auch immer nur ein System $e_0 \ldots e_\nu$, $E_1 \ldots E_n$, $\mathsf{H}_1 \ldots \mathsf{H}_n$ liefert. Eine einfache Ueberlegung zeigt, dass dem in der That so ist. Man hat dabei davon Gebrauch zu machen, dass statt E_j die Einheit $\lambda(e_0 - ie_1) + E_j$ eingeführt werden darf, ohne dass E_j seine charakteristischen Eigenheiten verliert [1]).

Nehmen wir also an, dass alle Zahlensysteme von weniger als $\frac{1}{4}(\nu+1)$, ja nur die Systeme von $(\nu+1)$ Einheiten in ihren typischen Formen bekannt sind, so folgt ohne Weiteres, dass auch die von uns gesuchten Erweiterungen des Quaternionensystems fast ohne jede Rechnung angebbar sind.

Im Falle $\nu = 1$ z. B. haben wir alle Systeme aus E_0, E_1 mit Modul E_0 zu bilden. Es giebt bekanntlich nur zwei Typen:

E_0	E_1		E_0	E_1
E_1	0		E_1	E_0

und dementsprechend haben wir die beiden Systeme von je 8 Einheiten, wenn E_1, $E_{\nu+1}$, H_1, $\mathsf{H}_{\nu+1}$ durch e_4, e_5, e_6, e_7 bezeichnet werden:

e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	$-e_0$	$-e_3$	e_2	ie_4	ie_5	$-ie_6$	$-ie_7$
e_2	e_3	$-e_0$	$-e_1$	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	$-e_2$	e_1	$-e_0$	ie_6	ie_7	ie_4	ie_5
e_4	ie_4	ie_5	e_5	0	0	0	0
e_5	$-ie_5$	ie_4	$-e_4$	0	0	0	0
e_6	ie_6	ie_7	e_7	0	0	0	0
e_7	$-ie_7$	ie_6	$-e_6$	0	0	0	0

und:

---

1) Zu demselben Typus gehören alle Systeme, welche durch lineare Transformation ineinander überführbar sind. Die erweiterte Bedeutung des Typus, wie sie STUDY (a. a. O. in den Gött. Nachr. S. 240) festsetzt, benutzen wir hier nicht.

Digitized by Google

e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	$-e_0$	$-e_3$	e_2	ie_4	ie_5	$-ie_6$	$-ie_7$
e_2	e_3	$-e_0$	$-e_1$	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	$-e_2$	e_1	$-e_0$	ie_6	ie_7	ie_4	ie_5
e_4	ie_4	ie_5	e_5	$\frac{1}{2}(e_0-ie_1)$	$\frac{1}{2}(-ie_2+e_3)$	0	0
e_5	$-ie_5$	ie_4	$-e_4$	0	0	$\frac{1}{2}(ie_0+e_1)$	$\frac{1}{2}(e_2+ie_3)$
e_6	ie_6	ie_7	e_7	$\frac{1}{2}(e_2+ie_3)$	$\frac{1}{2}(ie_0-e_1)$	0	0
e_7	$-ie_7$	ie_6	$-e_6$	0	0	$\frac{1}{2}(ie_2-e_3)$	$\frac{1}{2}(-e_0-ie_1)$

Da sich das System

$$\begin{matrix} E_0 & E_1 \\ E_1 & E_0 \end{matrix}$$

auch auf die Form

$$\begin{matrix} E_0 & E_1 \\ E_1 & E_1 \end{matrix}$$

bringen lässt, so kann das letztere der vorstehenden Systeme $(e_0 \,..\, e_7)$ auch auf die vielleicht bequemere Form zurückgeführt werden:

e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	$-e_0$	$-e_3$	e_2	ie_4	ie_5	$-ie_6$	$-ie_7$
e_2	e_3	$-e_0$	$-e_1$	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	$-e_2$	e_1	$-e_0$	ie_6	ie_7	ie_4	ie_5
e_4	ie_4	ie_5	e_5	e_4	e_5	0	0
e_5	$-ie_5$	ie_4	$-e_4$	0	0	ie_4	ie_5
e_6	ie_6	ie_7	e_7	e_6	e_7	0	0
e_7	$-ie_7$	ie_6	$-e_6$	0	0	ie_6	ie_7

Wir fassen das Ergebniss dieses Paragraphen zusammen:

Kennt man alle Typen von Zahlensystemen bis zu $(\nu+1)$ Einheiten, so kennt man auch ohne weiteres alle Zahlensysteme von der hier gesuchten Art bis zu $4(\nu+1)$ Einheiten.

Digitized by Google

§ 4.
Der Fall II.

Wir geben dazu über, zu dem Systeme

$$\begin{array}{ccccc} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_1 & -e_4 & -e_3 & e_2 & e_1 \\ e_2 & e_3 & -e_4 & -e_1 & e_2 \\ e_3 & -e_2 & e_1 & -e_4 & e_3 \\ e_4 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array}$$

weitere Einheiten e_5, e_6 ... hinzuzufügen.

Zunächst darf angenommen werden, dass eine Einheit e_5 existirt derart, dass

$$e_5 e_4 = a e_0 + b e_1 + c e_2 + d e_3 + \sigma e_4 + \varrho e_5$$

ist. Bilden wir aber $e_5 e_4^2 = e_5 e_4$, so ergeben sich für die Coefficienten folgende Bedingungen

$$a + \varrho\sigma = 0\,, \quad \varrho b = \varrho c = \varrho d = 0\,, \quad a - \varrho a = 0\,, \quad \varrho^2 = \varrho\,.$$

Es ist also $\varrho = 0$ oder $= 1$.

Sei zuvörderst $\varrho = 0$, so folgt $a = 0$ und

$$e_5 e_4 = b e_1 + c e_2 + d e_3 + \sigma e_4\,.$$

Indem wir eine neue Einheit $e_5 +$ Const. $e_1 + \cdots +$ Const. e_4 an Stelle von e_5 einführen, erreichen wir $e_5 e_4 = 0$. Ist jedoch $\varrho = 1$, so folgt $a + \sigma = 0$, $b = c = d = 0$, d. h.

$$e_5 e_4 = a(e_0 - e_4) + e_5\,,$$

und durch Einführung eines neuen e_5 geht hervor: $e_5 e_4 = e_5$.

Eine weitere Einheit e_6 kann nun so gewählt werden, dass

$$e_6 e_4 = \alpha e_0 + \beta e_1 + \gamma e_2 + \delta e_3 + s e_4 + r e_5 + t e_6$$

wird. Auch hier lässt sich zunächst $\beta = \gamma = \delta = 0$ machen. $e_6 e_4^2 = e_6 e_4$ liefert dann Bedingungen zwischen α, s, r, t, und durch Einführung einer neuen Einheit $e_6 +$ Const. $e_0 +$ Const. $e_4 +$ Const. e_5 anstatt e_6 lässt sich in beiden Fällen $\varrho = 0, 1$ erreichen, dass $e_6 e_4 = 0$ oder $= e_6$ wird.

Aehnliches gilt für eine dritte neue Einheit e_7 u. s. f. Schliesslich ergiebt sich, dass die hinzutretenden Einheiten e_5, e_6 .. derart gewählt werden können, dass allgemein $e_\varkappa e_4 = 0$ oder $= e_\varkappa$ wird ($\varkappa = 5, 6$ ..). Wir theilen daher die neuen Einheiten in zwei Classen, die wir verschieden bezeichnen:

Digitized by Google

$$e_5,\ e_6,\ e_7 \ldots;\ \mathsf{E}_1,\ \mathsf{E}_2 \ldots$$

Hier soll sein:

$$e_\varkappa e_4 = e_\varkappa,\ \mathsf{E}_\lambda e_4 = 0,\quad (\varkappa = 5, 6 \ldots,\ \lambda = 1, 2 \ldots)\ .$$

Bilden wir nun irgend ein Product von der Form $u \cdot e_\varkappa$, sodass etwa

$$u e_\varkappa = a e_0 + \cdots + d e_3 + r e_4 + \alpha_5 e_5 + \alpha_6 e_6 + \cdots + \beta_1 \mathsf{E}_1 + \beta_2 \mathsf{E}_2 + \cdots$$

ist, so folgt aus $u e_\varkappa e_4 = u e_\varkappa$ mit Leichtigkeit $a = \beta_5 = \beta_6 = \cdots = 0$, d. h. jedes derartige Product drückt sich durch e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 ... allein aus. Hierin liegt, dass wir zur näheren Bestimmung der Producte $e_\varkappa e_1$, $e_\varkappa e_2$, $e_\varkappa e_3$ genau das Verfahren des § 3 einschlagen können. (Nur tritt hier e_4 an Stelle von e_0.) Demnach ergiebt sich, dass die e_5, e_6 .. wieder in zwei Gruppen von gleichvielen Einheiten zerfallen, die wir durch

$$E_1, E_2 \ldots\ldots;\ \mathsf{H}_1,\ \mathsf{H}_2 \ldots\ldots$$

bezeichnen, derart, dass

$$\begin{aligned} E_\varkappa e_1 &= i E_\varkappa\ , & \mathsf{H}_\varkappa e_1 &= -i \mathsf{H}_\varkappa\ , \\ E_\varkappa e_2 &= \mathsf{H}_\varkappa\ , & \mathsf{H}_\varkappa e_2 &= -E_\varkappa\ , \\ E_\varkappa e_3 &= i \mathsf{H}_\varkappa\ , & \mathsf{H}_\varkappa e_3 &= i E_\varkappa\ , \\ E_\varkappa e_4 &= E_\varkappa\ , & \mathsf{H}_\varkappa e_4 &= \mathsf{H}_\varkappa \end{aligned}$$

ist, während natürlich

$$\begin{aligned} \mathsf{E}_\varkappa e_1 &= 0\ , \\ \mathsf{E}_\varkappa e_2 &= 0\ , \\ \mathsf{E}_\varkappa e_3 &= 0\ , \\ \mathsf{E}_\varkappa e_4 &= 0 \end{aligned}$$

sein muss.

Anstatt immer e_4 als zweiten Factor zu benutzen, hätten wir auch e_4 als ersten Factor gebrauchen können. Dadurch wären wir zu dem Resultate gelangt, dass die hinzuzufügenden Einheiten in einer solchen Form

$$E_1',\ E_2' \ldots;\ \mathsf{H}_1',\ \mathsf{H}_2' \ldots;\ \mathsf{E}_1',\ \mathsf{E}_2' \ldots$$

gewählt werden können, dass

Digitized by Google

$$\begin{aligned} e_1 E_\varkappa' &= i E_\varkappa' , & e_1 \mathsf{H}_\varkappa' &= -i \mathsf{H}_\varkappa' , \\ e_2 E_\varkappa' &= i \mathsf{H}_\varkappa' , & e_2 \mathsf{H}_\varkappa' &= \quad i E_\varkappa' , \\ e_3 E_\varkappa' &= \mathsf{H}_\varkappa' , & e_3 \mathsf{H}_\varkappa' &= -E_\varkappa' , \\ e_4 E_\varkappa' &= E_\varkappa' , & e_4 \mathsf{H}_\varkappa' &= \quad \mathsf{H}_\varkappa' , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_1 \mathsf{E}_\varkappa' &= 0 , \\ e_2 \mathsf{E}_\varkappa' &= 0 , \\ e_3 \mathsf{E}_\varkappa' &= 0 , \\ e_4 \mathsf{E}_\varkappa' &= 0 \end{aligned}$$

wird.

Die $E_\varkappa'$, $\mathsf{H}_\varkappa'$, $\mathsf{E}_\varkappa'$ sind lineare Functionen der $e_0 \ldots e_4$, $E_\varkappa$, $\mathsf{H}_\varkappa$, $\mathsf{E}_\varkappa$ und unabhängig von einander hinsichtlich der $E_\varkappa$, $\mathsf{H}_\varkappa$, $\mathsf{E}_\varkappa$.

Man findet, wenn man bedenkt, dass $e_4 E_\varkappa e_4 = i e_4 E_4$ ist, leicht, dass $e_4 E_\varkappa$ nur die $e_1 \ldots e_4$ und die E enthält und zwar ist etwa:

$$e_4 E_\varkappa = b_\varkappa e_1 + c_\varkappa e_2 + i c_\varkappa e_3 + i b_\varkappa e_4 + \sum\nolimits_i \lambda_{\varkappa i} E_i$$

und also:

$$e_4 \mathsf{H}_\varkappa = e_4 E_\varkappa e_2 = -i c_\varkappa e_1 + i b_\varkappa e_2 + b_\varkappa e_3 - c_\varkappa e_4 + \sum\nolimits_i \lambda_{\varkappa i} \mathsf{H} i ,$$

während $e_4 \mathsf{E}_\varkappa$ die Form hat:

$$e_4 \mathsf{E}_\varkappa = \alpha_\varkappa (e_0 - e_4) + \sum\nolimits_i \mu_{\varkappa i} \mathsf{E}_i .$$

Hiernach kann E_4 so gewählt werden, dass:

$$e_4 E_4 = b e_1 + c e_2 + i c e_3 + i b e_4 + \lambda E_4$$

wird. Aus $e_4^2 E_4 = e_4 E_4$ folgt aber dann

$$\lambda (e_4 E_4 - E_4) = 0 .$$

Ist zunächst $\lambda \neq 0$, so ist $e_4 E_4 = E_4$ und E_4 darf als E_4' gewählt werden. Das zugehörige $\mathsf{H}_4' = e_3 E_4' = e_3 E_4$ hängt (wegen $e_3 E_4 e_4 = i e_3 E_4$) nur von den e und E ab und lässt sich mit einem der E identificiren. Im Falle $\lambda = 0$ dagegen lässt sich leicht erreichen, dass $e_4 E_4 = 0$, d. h. E_4 eines der E' wird.

In beiden Fällen darf angenommen werden

$$e_4 E_2 = a e_1 + \cdots + \sigma E_4 + \sigma' \mathsf{H}_4' + \tau E_2$$

Digitized by Google

(wo im zweiten Falle $\sigma' = 0$ sein soll). Da $e_4^2 E_2 = e_4 E_2$ ist, so folgt hieraus

$$\tau (e_4 E_1 - E_2) = 0 ,$$

d. h. wenn $\tau \neq 0$, ist E_2 eines der E', und im Falle $\tau = 0$ lässt sich erreichen, dass $e_4 E_2 = 0$, d. h. E_2 eines der E wird. So können wir fortfahren. Kennen wir einmal die Producte der E mit e_1, e_2, e_3 (letztere als erste Factoren genommen), so sind auch die $e_1 \mathsf{H}$, $e_2 \mathsf{H}$, $e_3 \mathsf{H}$ bekannt, da $e_1 \mathsf{H} = e_4 E e_2$ u. s. w. ist.

Für die E endlich war allgemein:

$$e_4 \mathsf{E}_\varkappa = a_\varkappa (e_0 - e_4) + \sum_i \mu_{\varkappa i} \mathsf{E}_i .$$

Aus $e_4^2 \mathsf{E}_\varkappa = e_4 \mathsf{E}_\varkappa$ folgt hier analog dem Obigen, dass

$$e_4 \mathsf{E}_\varkappa = a_\varkappa (e_0 - e_4) + \mathsf{E}_\varkappa$$

oder

$$e_4 \mathsf{E}_\varkappa = 0$$

gesetzt werden kann. Im ersteren Falle lässt sich noch $a_\varkappa = 0$ machen.

Führt man die skizzirte Betrachtung durch, so ergiebt sich: Die E, H, E zerfallen im Allgemeinen wieder in je drei besondere Gruppen:

$$\begin{array}{llll} E_1, & E_2 \ldots E_\nu; & E_{\nu+1} \ldots E_{2\nu}; & E_{2\nu+1} \ldots E_\mu ; \\ \mathsf{H}_1, & \mathsf{H}_2 \ldots \mathsf{H}_\nu; & \mathsf{H}_{\nu+1} \ldots \mathsf{H}_{2\nu}; & \mathsf{H}_{2\nu+1} \ldots \mathsf{H}_\mu ; \\ \mathsf{E}_1, & \mathsf{E}_2 \ldots \mathsf{E}_\sigma; & \mathsf{E}_{\sigma+1} \ldots \mathsf{E}_{2\sigma}; & \mathsf{E}_{2\sigma+1} \ldots \mathsf{E}_\tau , \end{array}$$

sodass

$$\begin{array}{lll} e_1 E_j = i E_j , & e_1 E_{\nu+j} = -i E_{\nu+j} , & e_1 E_{2\nu+j} = 0 , \\ e_2 E_j = i E_{\nu+j} , & e_2 E_{\nu+j} = i E_j , & e_2 E_{2\nu+j} = 0 . \\ e_3 E_j = E_{\nu+j} , & e_3 E_{\nu+j} = -E_j , & e_3 E_{2\nu+j} = 0 , \\ e_4 E_j = E_j , & e_4 E_{\nu+j} = E_{\nu+j} , & e_4 E_{2\nu+j} = 0 , \\ (j = 1, 2 \ldots \nu) & (j = 1, 2 \ldots \nu) & (j = 1, 2 \ldots \mu - 2\nu) \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} e_1 \mathsf{H}_j = i \mathsf{H}_j , & e_1 \mathsf{H}_{\nu+j} = -i \mathsf{H}_{\nu+j} , & e_1 \mathsf{H}_{2\nu+j} = 0 , \\ \text{u. s. w.} & \text{u. s. w.} & \text{u. s. w.} \\ e_1 \mathsf{E}_j = i \mathsf{E}_j , & e_1 \mathsf{E}_{\sigma+j} = -i \mathsf{E}_{\sigma+j} , & e_1 \mathsf{E}_{2\sigma+j} = 0 \\ \text{u. s. w.} & \text{u. s. w.} & \text{u. s. w.} \end{array}$$

ist. Stellen wir diese Productregeln in eine Tabelle zusammen, so lautet sie:

Digitized by Google

$$
\begin{array}{cccccccccccccccccc}
e_0 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & E_j & E_{\nu+j} & E_{2\nu+j} & H_j & H_{\nu+j} & H_{2\nu+j} & E_j & E_{\sigma+j} & E_{2\sigma+j} \\
e_1 & -e_4 & e_3 & -e_2 & e_1 & iE_j & iE_{\nu+j} & iE_{2\nu+j} & -iH_j & -iH_{\nu+j} & -iH_{2\nu+j} & 0 & 0 & 0 \\
e_2 & e_3 & -e_4 & e_1 & e_2 & H_j & H_{\nu+j} & H_{2\nu+j} & -E_j & -E_{\nu+j} & -E_{2\nu+j} & 0 & 0 & 0 \\
e_3 & -e_2 & e_1 & -e_4 & e_3 & iH_j & iH_{\nu+j} & iH_{2\nu+j} & iE_j & iE_{\nu+j} & iE_{2\nu+j} & 0 & 0 & 0 \\
e_4 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & E_j & E_{\nu+j} & E_{2\nu+j} & H_j & H_{\nu+j} & H_{2\nu+j} & E_j & E_{\sigma+j} & E_{2\sigma+j} \\
E_j & iE_j & iE_j & E_j & E_j & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
E_{\nu+j} & -iE_{\nu+j} & iE_j & -E_j & E_{\nu+j} & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
E_{2\nu+j} & 0 & 0 & 0 & E_{2\nu+j} & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
H_j & iH_j & iH_{\nu+j} & H_{\nu+j} & H_j & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
H_{\nu+j} & -iH_{\nu+j} & iH_j & -H_j & H_{\nu+j} & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
H_{2\nu+j} & 0 & 0 & 0 & H_{2\nu+j} & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
E_j & iE_j & iE_{\sigma+j} & E_{\sigma+j} & E_j & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
E_{\sigma+j} & -iE_{\sigma+j} & iE_j & -E_j & E_{\sigma+j} & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
E_{2\sigma+j} & 0 & 0 & 0 & E_{2\sigma+j} & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}
$$

Noch nicht bekannt sind die Producte der E, H, E unter sich. Weil die Producte von E_j, $\mathsf{E}_{\sigma+j}$, $\mathsf{E}_{2\sigma+j}$ mit e_1 als zweitem Factor verschwinden und ebenso die Producte von $E_{2\nu+j}$, $\mathsf{H}_{2\nu+j}$, $\mathsf{E}_{2\sigma+j}$ mit e_1 als erstem Factor, so folgt, dass ein Product aus den Einheiten E_j, $E_{\nu+j}$, H_j, $\mathsf{H}_{\nu+j}$ frei von den Einheiten E_j, $\mathsf{E}_{\sigma+j}$, $\mathsf{E}_{2\sigma+j}$, $E_{2\nu+j}$, $\mathsf{H}_{2\nu+j}$ ist. Z. B. wäre:

$$E_{\nu+j}\mathsf{H}_\varkappa = a_0 e_0 + \cdots + a_4 e_4 + \sum_1^{2\nu} \lambda_i E_i + \sum_1^{2\nu} \mu_i \mathsf{H}_i +$$

$$+ \sum_{2\nu+1}^{\mu} \lambda_i E_i + \sum_{2\nu+1}^{\mu} \mu_i \mathsf{H}_i + \sum_1^{\tau} \nu_i \mathsf{E}_i \ ,$$

so würde

$$E_{\nu+j}\mathsf{H}_\varkappa e_4 = E_{\nu+j}\mathsf{H}_\varkappa$$

ergeben, dass die $\nu_i = 0$ sind, während aus

$$e_4 E_{\nu+j}\mathsf{H}_\varkappa = E_{\nu+j}\mathsf{H}_\varkappa$$

folgen würde, dass $\lambda_{2\nu+1} = 0 \ldots$, $\mu_{2\nu+1} = 0 \ldots$ ist. Die Einheitsproducte der Grössen E_j, $E_{\nu+j}$, H_j, $\mathsf{H}_{\nu+j}$ sind überdies aus ähnlichem Grunde frei von e_0, enthalten also nur die $e_1 \ldots e_4$ und sich selbst. Mithin bilden $e_1 \ldots e_4$, $E_1 \ldots E_{2\nu}$, $\mathsf{H}_1 \ldots \mathsf{H}_{2\nu}$ für sich ein System und zwar eines der in § 3 bestimmten. (Nur tritt an Stelle des dortigen e_0 hier e_4 als Modul.)

Zur besseren Uebersichtlichkeit wollen wir die Einheiten in vier Abtheilungen gruppiren. Wir bezeichnen die Einheiten

$E_1 \ldots E_{2\nu}$,	$\mathsf{H}_1 \ldots \mathsf{H}_{2\nu}$	durch A,
$\mathsf{E}_1 \ldots \mathsf{E}_{2\sigma}$		durch B,
$E_{2\nu+1} \ldots E_\mu$,	$\mathsf{H}_{2\nu+1} \ldots \mathsf{H}_\mu$	durch Γ,
$\mathsf{E}_{2\sigma+1} \ldots \mathsf{E}_\tau$		durch Δ.

Sie sind charakterisirt durch die Formeln

$$\mathsf{A}e_4 = \mathsf{A} \ , \quad e_4\mathsf{A} = \mathsf{A} \ ,$$
$$\mathsf{B}e_4 = 0 \ , \quad e_4\mathsf{B} = \mathsf{B} \ ,$$
$$\Gamma e_4 = \Gamma \ , \quad e_4\Gamma = 0 \ ,$$
$$\Delta e_4 = 0 \ , \quad e_4\Delta = 0 \ .$$

Digitized by Google

Ein Product AB hatzunächst die allgemeine Form

$$AB = a_0 e_0 + \cdots + a_4 e_4 + \Sigma A + \Sigma B + \Sigma \Gamma + \Sigma \Delta .$$

Wegen $AB e_4 = 0$ und $e_4 AB = AB$ aber specialisirt sich diese zu:

$$AB = \Sigma B .$$

Ferner ist $BA = B . e_4 A = B e_4 . A = 0 . A = 0$ u. s. w. In dieser Weise ergiebt sich, dass die Einheiten der einzelnen Abtheilungen A, B, Γ, Δ sich in der hier schematisch angedeuteten Weise mit einander multipliciren [1]):

	A	B	Γ	Δ
A	$ae_4+\cdots+de_4+\Sigma A$	0	$\Sigma\Gamma$	0
B	ΣB	0	$\alpha(e_0-e_4)+\Sigma\Delta$	0
Γ	0	$\mathfrak{a}e_4+\cdots+\mathfrak{d}e_4+\Sigma A$	0	$\Sigma\Gamma$
Δ	0	ΣB	0	$\beta(e_0-e_4)+\Sigma\Delta$

Wenn man in ähnlicher Weise wie im § 3 die Einheiten der vier Abtheilungen A, B, Γ, Δ mit einander multiplicirt und die allgemeine Form der Producte sucht unter Benutzung der Relationen wie z. B.

$$E_{2\nu+j} \cdot e_2 \mathsf{E}_\varkappa = iE_{2\nu+j} \cdot \mathsf{E}_{\sigma+\varkappa} = \mathsf{H}_{2\nu+j}\mathsf{E}_\varkappa \qquad (2\nu+j=2\nu+1,..\mu)$$
$$E_{2\nu+j} \cdot e_3 \mathsf{E}_\varkappa = E_{2\nu+j} \cdot \mathsf{E}_{\sigma+\varkappa} = i\mathsf{H}_{2\nu+j}\mathsf{E}_\varkappa , \qquad \varkappa = 1, 2 .. \sigma)$$

woraus:

$$E_{2\nu+j}\mathsf{E}_{\sigma+\varkappa} = \mathsf{H}_{2\nu+j}\mathsf{E}_\varkappa = 0$$

hervorgeht, so gelangt man zur folgenden Multiplicationstafel:

---

1) Die Aehnlichkeit dieser Tafel mit der von PEIRCE, a. a. O. § 46 angegebenen, ist nicht bloss eine äusserliche. Die Grössen Δ z. B. sind nach PEIRCE's Sprachgebrauch Nilfacienden und Nilfacienten hinsichtlich e_4 u. s. w.

Digitized by Google

e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	.	E_j	$E_{\nu+j}$	$E_{2\nu+j}$	H_j	$\mathsf{H}_{\nu+j}$	$\mathsf{H}_{2\nu+j}$	E_j	$\mathsf{E}_{\sigma+j}$	$\mathsf{E}_{2\sigma+j}$		
e_1	$-e_4$	$-e_3$	e_2	e_1	.	iE_j	$iE_{\nu+j}$	$iE_{2\nu+j}$	$-i\mathsf{H}_j$	$-i\mathsf{H}_{\nu+j}$	$-i\mathsf{H}_{2\nu+j}$	0	0	0		
e_2	e_3	$-e_4$	$-e_1$	e_3	.	H_j	$\mathsf{H}_{\nu+j}$	$\mathsf{H}_{2\nu+j}$	$-E_j$	$-E_{\nu+j}$	$-E_{2\nu+j}$	0	0	0		
e_3	$-e_2$	e_1	$-e_4$	e_3	.	$i\mathsf{H}_j$	$i\mathsf{H}_{\nu+j}$	$i\mathsf{H}_{2\nu+j}$	iE_j	$iE_{\nu+j}$	$iE_{2\nu+j}$	0	0	0		
e_4	e_1	e_3	e_2	e_4	.	E_j	$E_{\nu+j}$	$E_{2\nu+j}$	H_j	$\mathsf{H}_{\nu+j}$	$\mathsf{H}_{2\nu+j}$	0	0	0		
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
E_x	iE_x	$iE_{\nu+x}$	$E_{\nu+x}$	E_x	.	A_{jx}	B_{jx}	C_{jx}	0	0	0	0	0	0		
$E_{\nu+x}$	$-iE_{\nu+x}$	iE_x	$-E_x$	$E_{\nu+x}$	.	0	0	0	iA_{jx}	iB_{jx}	iC_{jx}	0	0	0		
$E_{2\nu+x}$	0	0	0	0	.	0	0	0	0	0	0	K_{jx}	L_{jx}	M_{jx}		
H_x	$i\mathsf{H}_x$	$i\mathsf{H}_{\nu+x}$	$\mathsf{H}_{\nu+x}$	H_x	.	D_{jx}	E_{jx}	F_{jx}	0	0	0	0	0	0		
$\mathsf{H}_{\nu+x}$	$-i\mathsf{H}_{\nu+x}$	$i\mathsf{H}_x$	$-\mathsf{H}_x$	$\mathsf{H}_{\nu+x}$	.	0	0	0	iD_{jx}	iE_{jx}	iF_{jx}	0	0	0		
$\mathsf{H}_{2\nu+x}$	0	0	0	0	.	0	0	0	0	0	0	N_{jx}	O_{jx}	P_{jx}		
E_x	$i\mathsf{E}_x$	$i\mathsf{E}_{\sigma+x}$	$\mathsf{E}_{\sigma+x}$	E_x	.	G_{jx}	H_{jx}	I_{jx}	0	0	0	0	0	0		
$\mathsf{E}_{\sigma+x}$	$-i\mathsf{E}_{\sigma+x}$	$i\mathsf{E}_x$	$-\mathsf{E}_x$	$\mathsf{E}_{\sigma+x}$	.	0	0	0	iG_{jx}	iH_{jx}	iI_{jx}	0	0	0		
$\mathsf{E}_{2\sigma+x}$	0	0	0	0	.	0	0	0	0	0	0	Q_{jx}	R_{jx}	S_{jx}		

Digitized by Google

Hierin bedeuten die $A_{j\varkappa} \ldots S_{j\varkappa}$ Summenausdrücke von der Form:

$$A_{j\varkappa} = i a_{j\varkappa} e_4 + a_{j\varkappa} e_1 + \sum_1^{\nu}{}^{\lambda} a_{j\varkappa\lambda} E_\lambda \ ,$$

$$B_{j\varkappa} = a_{j\varkappa} e_2 + i a_{j\varkappa} e_3 + \sum_1^{\nu}{}^{\lambda} a_{j\varkappa\lambda} E_{\nu+\lambda} \ ,$$

$$C_{j\varkappa} = \sum^{\lambda} c_{j\varkappa\lambda} E_{2\nu+\lambda} \ ,$$

$$D_{j\varkappa} = i a_{j\varkappa} e_2 + a_{j\varkappa} e_3 + \sum_1^{\nu}{}^{\lambda} a_{j\varkappa\lambda} \mathsf{H}_\lambda \ ,$$

$$E_{j\varkappa} = -a_{j\varkappa} e_4 - i a_{j\varkappa} e_1 + \sum^{\lambda} a_{j\varkappa\lambda} \mathsf{H}_{\nu+\lambda} \ ,$$

$$F_{j\varkappa} = \sum^{\lambda} c_{j\varkappa\lambda} \mathsf{H}_{2\nu+\lambda} \ ,$$

$$G_{j\varkappa} = \sum_1^{\sigma}{}^{\lambda} g_{j\varkappa\lambda} \mathsf{E}_\lambda \ ,$$

$$H_{j\varkappa} = \sum_1^{\sigma}{}^{\lambda} g_{j\varkappa\lambda} \mathsf{E}_{\sigma+\lambda} \ ,$$

$$I_{j\varkappa} = i_{j\varkappa}(e_0 - e_4) + \sum^{\lambda} i_{j\varkappa\lambda} \mathsf{E}_{2\sigma+\lambda} \ ,$$

$$K_{j\varkappa} = k_{j\varkappa} e_1 + i k_{j\varkappa} e_4 + \sum_1^{\nu}{}^{\lambda} k_{j\varkappa\lambda} E_\lambda \ ,$$

$$L_{j\varkappa} = k_{j\varkappa} e_2 + i k_{j\varkappa} e_3 + \sum^{\lambda} k_{j\varkappa\lambda} E_{\nu+\lambda} \ ,$$

$$M_{j\varkappa} = \sum^{\lambda} m_{j\varkappa\lambda} E_{2\nu+\lambda} \ ,$$

$$N_{j\varkappa} = k_{j\varkappa} e_3 + i k_{j\varkappa} e_2 + \sum_1^{\nu}{}^{\lambda} k_{j\varkappa\lambda} \mathsf{H}_\lambda \ ,$$

$$O_{j\varkappa} = -k_{j\varkappa} e_4 - i k_{j\varkappa} e_1 + \sum^{\lambda} k_{j\varkappa\lambda} \mathsf{H}_{\nu+\lambda} \ ,$$

$$P_{j\varkappa} = \sum^{\lambda} m_{j\varkappa\lambda} \mathsf{H}_{2\nu+\lambda} \ ,$$

$$Q_{j\varkappa} = \sum_1^{\sigma}{}^{\lambda} q_{j\varkappa\lambda} \mathsf{E}_\lambda \ ,$$

$$R_{j\varkappa} = \sum_1^{\sigma}{}^{\lambda} q_{j\varkappa\lambda} \mathsf{E}_{\sigma+\lambda} \ ,$$

$$S_{j\varkappa} = s_{j\varkappa}(e_0 - e_4) + \sum^{\lambda} s_{j\varkappa\lambda} \mathsf{E}_{2\sigma+\lambda} \ .$$

Digitized by Google

Durch diese allgemeinen Formeln ist das Problem dieses Paragraphen zwar nicht ganz erledigt, aber doch soweit gefördert, um die Berechnung der betreffenden Systeme bei nicht zu grosser Zahl der Einheiten verhältnissmässig einfach zu gestalten.

§ 5.

Anwendungen.

An der Hand des bisher Gefundenen wollen wir die Kegelschnittssysteme in 4, 5, 6, 7 und 8 Einheiten sämmtlich aufstellen.

Zunächst sei die Zahl der Einheiten:

$$n = 4 .$$

Dann ergiebt sich nur das Quaternionensystem:

e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	$-e_0$	$-e_3$	e_2
e_2	e_3	$-e_0$	$-e_1$
e_3	$-e_2$	e_1	$-e_0$

Ist weiter

$$n = 5 ,$$

so haben wir das System

e_0	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	$-e_4$	$-e_3$	e_2	e_1
e_2	e_3	$-e_4$	$-e_1$	e_2
e_3	$-e_2$	e_1	$-e_4$	e_3
e_4	e_4	e_2	e_3	e_4

Wenn die Zahl der Einheiten

$$n = 6$$

ist, so haben wir ein System von der in § 4 betrachteten Form. Da die dort A genannten Einheiten zu je vieren, die B und Γ zu

Digitized by Google

je zweien auftreten, so ist nur der Fall denkbar, dass e_5 ein Δ ist. Die Δ aber bilden mit $e_0 - e_4$ ein System für sich mit dem Modul $e_0 - e_4$ und daher darf $e_5^2 = 0$ oder $= e_5$ gesetzt werden. Dies liefert die beiden wesentlich verschiedenen Formen:

e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_1	$-e_4$	$-e_3$	e_2	e_1	0
e_2	e_3	$-e_3$	$-e_1$	e_2	0
e_3	$-e_2$	e_1	$-e_4$	e_3	0
e_4	e_1	e_2	e_3	e_4	0
e_5	0	0	0	0	0

e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_1	$-e_4$	$-e_3$	e_2	e_1	0
e_2	e_3	$-e_4$	$-e_1$	e_2	0
e_3	$-e_2$	e_1	$-e_4$	e_3	0
e_4	e_1	e_2	e_3	e_4	0
e_5	0	0	0	0	e_5

$$n = 7 .$$

Drei Annahmen sind denkbar: Es kommen zwei Grössen B oder zwei Γ oder zwei Δ vor. Der erste Fall giebt:

e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
e_1	$-e_4$	$-e_3$	e_2	e_1	0	0
e_2	e_3	$-e_4$	$-e_1$	e_2	0	0
e_3	$-e_2$	e_1	$-e_4$	e_3	0	0
e_4	e_1	e_2	e_3	e_4	0	0
e_5	ie_5	ie_6	e_6	e_5	0	0
e_6	$-ie_6$	ie_5	$-e_5$	e_6	0	0

Der zweite liefert analog:

Digitized by Google

e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
e_1	$-e_4$	$-e_3$	e_2	e_1	ie_5	$-ie_6$
e_2	e_3	$-e_4$	$-e_1$	e_2	e_6	$-e_5$
e_3	$-e_2$	e_1	$-e_4$	e_3	ie_6	ie_5
e_4	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
e_5	0	0	0	0	0	0
e_6	0	0	0	0	0	0

Im dritten Fall bilden e_5 und e_6 (die beiden Δ) zusammen mit $e_0 - e_4$ ein System mit dem Modul $e_0 - e_4$. Alle Systeme in drei Einheiten aber sind bekannt[1]. In Rücksicht auf dieselben lassen sich e_5 und e_6 so wählen, dass ihre Producte eine der fünf Tafeln bilden:

$\alpha)$

e_5	0
0	e_6

$\beta)$

0	0
0	e_6

$\gamma)$

e_6	0
0	0

$\delta)$

e_5	e_6
0	0

$\varepsilon)$

0	0
0	0

Diese Tafeln sind in das Multiplicationsschema

e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
e_1	$-e_4$	$-e_3$	e_2	e_1	0	0
e_2	e_3	$-e_4$	$-e_1$	e_2	0	0
e_3	$-e_2$	e_1	$-e_4$	e_3	0	0
e_4	e_1	e_2	e_3	e_4	0	0
e_5	0	0	0	0	.	.
e_6	0	0	0	0	.	.

an der noch nicht ausgefüllten Stelle einzufügen, sodass fünf Typen hervorgehen. Keiner der so gefundenen sieben Typen im Falle $n = 7$ ist überzählig.

---

1) Man sehe die Abhandlung von STUDY in den Göttinger Nachrichten 1889, S. 246–247.

Digitized by Google

Im Falle

$$n = 8$$

giebt es zunächst die beiden in § 3 berechneten Systeme von je acht Einheiten.

Ferner sind drei Fälle denkbar, es kommen nämlich vor:

Erstens: 2 B, 1 Δ. Das Schema ist hier:

e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	$-e_4$	$-e_3$	e_2	e_1	0	0	0
e_2	e_3	$-e_4$	$-e_1$	e_2	0	0	0
e_3	$-e_2$	e_1	$-e_4$	e_3	0	0	0
e_4	e	e_2	e_3	e_4	0	0	0
e_5	ie_5	ie_6	e_6	e_5	0	0	0
e_6	$-ie_6$	ie_5	$-e_5$	e_6	0	0	0
e_7	0	0	0	0	.	.	.

Noch nicht geschrieben sind

$$e_5 e_7 = a e_5 \ , \quad e_6 e_7 = a e_6$$

und e_7^2, das, da e_7 und $e_0 - e_4$ für sich ein System mit dem Modul $e_0 - e_4$ bilden, entweder $= 0$ oder $= e_7$ angenommen werden kann. Aus $e_5 e_7^2 = e_5 e_7 . e_7$ folgt dann, dass nur die drei Fälle vorkommen, in denen an der in vorstehender Tafel freigelassenen Stelle steht:

$\alpha)$ 0 0 0 $\quad$ $\beta)$ 0 0 e_7 $\quad$ $\gamma)$ e_5 e_6 e_7 .

Zweitens: 2 Γ und 1 Δ. Hier ergeben sich ganz analog drei Systeme, die wir wohl nicht anzugeben brauchen.

Drittens: 3 Δ. Diese bilden mit $e_0 - e_4$ ein System von vier Einheiten mit dem Modul $e_0 - e_4$. Daher sind in das Schema

Digitized by Google

e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	$-e_4$	$-e_3$	e_2	e_1	0	0	0
e_2	e_3	$-e_4$	$-e_1$	e_2	0	0	0
e_3	$-e_2$	e_1	$-e_4$	e_3	0	0	0
e_4	e_1	e_2	e_3	e_4	0	0	0
e_5	0	0	0	0	.	.	.
e_6	0	0	0	0	.	.	.
e_7	0	0	0	0	.	.	.

an den noch nicht ausgefüllten Stellen Symbole einzuführen in einer der 17 nachfolgenden Arten [1]):

e_5	0	0	0	0	0	0	0	0	e_6	0	0	e_6	e_7	0
0	e_6	0	0	e_6	0	0	e_6	e_7	0	0	0	e_7	0	0
0	0	e_7	0	0	e_7	0	e_7	0	0	0	e_7	0	0	0
e_5	0	e_7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	e_7	e_7	0
0	e_6	0	0	0	0	0	0	e_6	0	0	0	$-e_7$	λe_7	0
0	0	0	0	e_6	e_7	0	0	e_7	0	0	e_7	0	0	0
e_7	0	0	e_6	0	0	e_4-e_0	$-e_7$	e_6	0	0	e_5	0	e_7	0
0	e_7	0	0	0	0	e_7	e_4-e_0	$-e_5$	0	0	0	$-e_7$	0	0
0	0	0	0	0	0	$-e_6$	e_5	e_4-e_0	0	e_6	e_7	0	0	0

0	0	e_5	0	0	0
0	0	e_6	0	0	0
0	0	e_7	0	0	0

Alle 25 Typen, welche sich hiernach im Fall $n = 8$ ergeben, sind von einander verschieden.

Somit erhalten wir im Fall

---

1) Siehe STUDY, a. a. O. Gött. Nachr. S. 256—262. Einige der dortigen Systeme haben wir in etwas anderer Weise geschrieben, so die Systeme VI, VII (in zwei Weisen, da VII 2 nach unserer Auffassung — vgl. die Fussnote zu S. 417 — verschiedene Typen enthält), XIII und XV.

Digitized by Google

$n = 4$ 1 System ,
$n = 5$ 1 - ,
$n = 6$ 2 Systeme ,
$n = 7$ 7 - ,
$n = 8$ 25 - .

Die Bestimmung aller Kegelschnittssysteme aus neun Einheiten ist in der angegebenen Weise durchführbar, sobald überhaupt alle Zahlensysteme aus fünf Einheiten in ihren Typen bekannt sind. Diese Systeme sind weiter unten (im § 7) sämmtlich aufgestellt. Wir verzichten jedoch auf die Durchführung des Falles $n = 9$.

Nur ein Beispiel eines Systems in neun Einheiten möge hier Platz finden. Nehmen wir nämlich an, dass im System $e_0 .. e_8$ ausser $e_0 .. e_4$ zwei Grössen B und zwei Grössen Γ vorkommen und bezeichnen wir letztere mit e_5, e_6, erstere mit e_7, e_8, so ergiebt sich zunächst das Schema

e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
e_1	$-e_4$	$-e_3$	e_2	e_1	ie_5	$-ie_6$	0	0
e_2	e_3	$-e_4$	$-e_1$	e_2	e_6	$-e_5$	0	0
e_3	$-e_2$	e_1	$-e_4$	e_3	ie_6	ie_5	0	0
e_4	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	0	0
e_5	0	0	0	0	0	0	$\alpha(e_1+ie_4)$	$\alpha(e_2+ie_3)$
e_6	0	0	0	0	0	0	$\alpha(e_3+ie_2)$	$\alpha(-e_4-ie_1)$
e_7	ie_7	ie_8	e_8	e_7	$a(e_0-e_4)$	0	0	0
e_8	$-ie_8$	ie_7	$-e_7$	e_8	0	$ia(e_0-e_4)$	0	0

Bildet man $e_7 e_5 . e_7 = e_7 . e_5 e_7$, so ergiebt sich $a = 2i\alpha$ und es kann nun $\alpha = 1$ oder $= 0$ gemacht werden. Wir wollen die erstere Annahme im Auge behalten. Dann ergiebt sich das System:

Digitized by Google

e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
e_1	$-e_4$	$-e_3$	e_2	e_1	ie_5	$-ie_6$	0	0
e_2	e_3	$-e_4$	$-e_1$	e_2	e_6	$-e_5$	0	0
e_3	$-e_2$	e_1	$-e_4$	e_3	ie_6	ie_5	0	0
e_4	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	0	0
e_5	0	0	0	0	0	0	e_1+ie_4	e_2+ie_3
e_6	0	0	0	0	0	0	e_3+ie_2	$-e_4-ie_1$
e_7	ie_7	ie_8	e_8	e_7	$2ie_0-2ie_4$	0	0	0
e_8	$-ie_8$	ie_7	$-e_7$	e_8	0	$-2e_0+2e_4$	0	0

Dieses System beansprucht insofern besonderes Interesse, als es von Sylvester zuerst angegeben und eingehend als Analogon zu den Hamilton'schen Quaternionen untersucht worden ist[1]). Freilich giebt Sylvester das System nicht in obiger Form, sondern in der von ihm und Cayley sowie anderen englischen und amerikanischen Mathematikern gehandhabten Matricendarstellung[2]). Wenn man die Matricensymbole als Einheiten auffasst[3]), so lautet das Sylvester'sche System zunächst wie folgt:

e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
e_1	e_2	e_0	$\varrho^2 e_7$	ϱe_6	$\varrho^2 e_3$	ϱe_8	$\varrho^2 e_5$	ϱe_4
e_2	e_0	e_1	ϱe_8	$\varrho^2 e_8$	ϱe_7	$\varrho^2 e_4$	ϱe_3	$\varrho^2 e_6$
e_3	e_7	e_5	e_4	e_0	e_8	e_1	e_6	e_2
e_4	e_6	e_8	e_0	e_3	e_2	e_7	e_1	e_5
e_5	e_3	e_7	ϱe_8	$\varrho^2 e_2$	ϱe_6	$\varrho^2 e_0$	ϱe_4	$\varrho^2 e_1$
e_6	e_8	e_1	$\varrho^2 e_1$	ϱe_7	$\varrho^2 e_0$	ϱe_5	$\varrho^2 e_2$	ϱe_3
e_7	e_5	e_3	$\varrho^2 e_6$	ϱe_1	$\varrho^2 e_4$	ϱe_2	$\varrho^2 e_8$	ϱe_0
e_8	e_4	e_6	ϱe_2	$\varrho^2 e_5$	ϱe_1	$\varrho^2 e_3$	ϱe_0	$\varrho^2 e_7$

1) Sylvester, A word on nonions, Johns Hopkins Circular 1882, S. 261, ferner: Sur les quantités formants une groupe de nonions analogues aux quaternions de Hamilton, Comptes Rendus XCVII (1883) S. 1336—1340, XCVIII (1884) S. 273—276, S. 471—475.

2) Bezüglich der Matricenbenutzung vgl. Sylvester, Lectures on the principles of universal algebra, Amer. J. of Math. VI (1884), S. 270—286; ferner die grundlegenden Arbeiten von Cayley in den Transactions of Royal Soc. (1858), dann Buchheim in den Proceedings of London Math Soc. u. s. w.

3) Nämlich indem man setzt $u = e_0$, $m = e_1$, $m^2 = e_2$, $n = e_3$, $n^2 = e_4$, $m^2 n = e_5$, $m n^2 = e_6$, $m n = e_7$, $m^2 n^2 = e_8$.

Digitized by Google

Hier bedeutet ϱ eine primitive Kubikwurzel der 1. Wenn man aber hierin als neue Einheiten die Ausdrücke einführt

$$\begin{aligned}
\overline{e_0} &= \tfrac{1}{3}(e_0 + e_1 + e_2) \quad , & \overline{e_3} &= \tfrac{1}{3}(e_0 + \varrho^2 e_1 + \varrho e_2) \quad , \\
\overline{e_1} &= \tfrac{1}{3}(e_3 + \varrho e_5 + \varrho^2 e_7) \, , & \overline{e_4} &= \tfrac{1}{3}(e_3 + \varrho^2 e_5 + \varrho e_7) \, , \\
\overline{e_2} &= \tfrac{1}{3}(e_4 + \varrho e_6 + \varrho^2 e_8) \, , & \overline{e_5} &= \tfrac{1}{3}(e_4 + e_6 + e_8) \quad , \\
& & \overline{e_6} &= \tfrac{1}{3}(e_0 + \varrho e_1 + \varrho^2 e_2) \, , \\
& & \overline{e_7} &= \tfrac{1}{3}(e_3 + e_5 + e_7) \quad , \\
& & \overline{e_8} &= \tfrac{1}{3}(e_4 + \varrho^2 e_6 + \varrho e_8)
\end{aligned}$$

und darauf die $\overline{e_\varkappa}$ kurz durch $e_\varkappa$ bezeichnet, so ergiebt sich die Tafel:

e_0	e_1	e_2	0	0	0	0	0	0
0	0	0	e_1	e_2	e_0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	e_2	e_0	e_1
0	0	0	e_3	e_4	e_5	0	0	0
0	0	0	0	0	0	e_4	e_5	e_3
e_5	e_3	e_4	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	e_6	e_7	e_8
e_7	e_8	e_6	0	0	0	0	0	0
0	0	0	e_8	e_6	e_7	0	0	0

Wenn nun hierin die neuen Einheiten eingeführt werden:

$$\begin{aligned}
\overline{e_0} &= e_0 + e_3 + e_6 \quad , & \overline{e_5} &= i e_4 \quad , \\
\overline{e_1} &= i(e_3 - e_0) \quad , & \overline{e_6} &= \sqrt{i}\, e_2 \quad , \\
\overline{e_2} &= -i\sqrt{i}(e_1 - i e_5) \, , & \overline{e_7} &= 2 e_8 \quad , \\
\overline{e_3} &= \sqrt{i}(e_1 + i e_5) \quad , & \overline{e_8} &= 2i\sqrt{i}\, e_7 \quad , \\
\overline{e_4} &= e_0 + e_3 \quad ,
\end{aligned}$$

so geht eben das obige System, das wir als Beispiel für den Fall $n = 9$ angaben, hervor. —

Digitized by Google

Es sei hier noch auf eine Note von Cayley[1]) Bezug genommen, in welcher derselbe ein aus acht Einheiten bestehendes System bildet von der Eigenschaft, dass, wenn für zwei Zahlen

$$x = x_0 e_0 + \cdots + x_7 e_7 \ , \qquad y = y_0 e_0 + \cdots + y_7 e_7$$

das Product

$$xy = z = z_0 e_0 + \cdots + z_7 e_7$$

ist, auch die Relation besteht

$$(x_0^2 + \cdots + x_7^2)\,(y_0^2 + \cdots + y_7^2) = (z_0^2 + \cdots + z_7^2) \ .$$

Das betreffende System lässt sich nicht so bilden, dass es diese Forderung erfüllt und gleichzeitig associativ ist.

Dies kann hier bestätigt werden. Ein System von der bezeichneten Eigenthümlichkeit muss die quadratische Mannigfaltigkeit $x_0^2 + \cdots + x_7^2 = 0$ invariant lassen. Nun bleiben bei Nichtkegelschnittssystemen $(e_0 \,..\, e_7)$, wie wir später noch bemerken werden, nur *ebene* Mannigfaltigkeiten 7. Stufe invariant. Das gesuchte System muss also Kegelschnittssystem sein. Aber wir haben alle derartigen Systeme aufgestellt. Bildet man, um die bei ihnen invarianten Mannigfaltigkeiten zu finden, ihre Determinanten, so findet sich, dass sie sämtlich ausser ebenen noch solche quadratische Mannigfaltigkeiten invariant lassen, deren Gleichungen unmöglich auf die Form $x_0^2 + \cdots + x_7^2 = 0$ gebracht werden können. Es giebt also in der That kein System in acht Einheiten, das eine Mannigfaltigkeit zweiten Grades mit nicht verschwindender Determinante invariant liesse, und es steht zu vermuthen, dass ein solcher Satz überhaupt für Systeme aus mehr als vier Einheiten gilt. —

Die in diesem § aufgestellten Systeme in vier bis acht Einheiten besitzen selbstverständlich eine *gruppentheoretische* Bedeutung. Denn jedem dieser Systeme entspricht ein Paar reciproker einfach-transitiver projectiver Gruppen mit Kegelschnittszusammensetzung und umgekehrt[2]). Wir haben also ein Problem der Lie'schen Transformationstheorie erledigt, das sich in Worten aussprechen lässt: *Alle Typen von Paaren von*

---

1) Cayley, On the 8-square imaginaries, Amer. J. of Math. IV (1881), S. 293—296.

2) Vgl. Study a. a. O. in den Berichten der Ges. d. W. zu Leipzig, § 6.

Digitized by

reciproken einfach-transitiven projectiven Gruppen eines Gebietes 4., 5., 6., 7., 8. *Stufe aufzustellen, welche Kegelschnittszusammensetzung haben.*

Wir stellen in folgender Tabelle alle diejenigen Zusammensetzungen 3-, 4-, 5-, 6- und 7-gliedriger Gruppen auf, welche bei reciproken projectiven Gruppen dieser Art überhaupt vorkommen.

3-gliedrig.

$$(X_1 X_2) = X_3 , \quad (X_2 X_3) = X_1 , \quad (X_3 X_1) = X_2 .$$

4-gliedrig.

$$(X_1 X_2) = X_3 , \quad (X_2 X_3) = X_1 , \quad (X_3 X_1) = X_2 , \quad (X_\varkappa X_1) = 0 .$$

5-gliedrig.

$$(X_1 X_2) = X_3 , \quad (X_2 X_3) = X_1 , \quad (X_3 X_1) = X_2 , \quad (X_\varkappa X_1) = (X_\varkappa X_5) = 0 .$$

6-gliedrig.

I.
$$\begin{aligned}
&(X_1 X_2) = 2X_3 , \ (X_1 X_3) = -2X_2 , \ (X_1 X_4) = 0 , \ (X_1 X_5) = iX_5 , \ (X_1 X_6) = -iX_6 , \\
&(X_2 X_3) = \ 2X_1 , \ (X_2 X_4) = 0 , \ (X_2 X_5) = iX_6 , \ (X_2 X_6) = \ iX_5 , \\
&(X_3 X_4) = 0 , \ (X_3 X_5) = X_6 , \ (X_3 X_6) = -X_5 , \\
&(X_4 X_5) = X_5 , \ (X_4 X_6) = \ X_6 , \\
&(X_5 X_6) = \ 0 .
\end{aligned}$$

II. $(X_1 X_2) = X_3 , \ (X_2 X_3) = X_1 , \ (X_3 X_1) = X_2 , \ (X_\varkappa X_4) = (X_\varkappa X_5) = (X_\varkappa X_6) = 0 .$

III. Wie II. mit Ausnahme von $(X_5 X_6) = X_6 .$

7-gliedrig.

I.
$$\begin{aligned}
&(X_1 X_2) = 2X_3 , (X_1 X_3) = -2X_2 , (X_1 X_4) = 0 , (X_1 X_5) = iX_5 , (X_1 X_6) = -iX_6 , (X_1 X_7) = 0 , \\
&(X_2 X_3) = \ 2X_1 , (X_2 X_4) = 0 , (X_2 X_5) = iX_6 , (X_2 X_6) = \ iX_5 , (X_2 X_7) = 0 , \\
&(X_3 X_4) = 0 , (X_3 X_5) = X_6 , (X_3 X_6) = -X_5 , (X_3 X_7) = 0 , \\
&(X_4 X_5) = X_5 , (X_4 X_6) = \ X^5 , (X_4 X_7) = 0 , \\
&(X_5 X_6) = \ 0 , (X_5 X_7) = 0 , \\
&(X_6 X_7) = 0 .
\end{aligned}$$

II. $(X_1 X_2) = X_3 , \ (X_2 X_3) = X_1 , \ (X_3 X_1) = X_2 , \ (X_\varkappa X_4) = (X_\varkappa X_5) = (X_\varkappa X_6) = (X_\varkappa X_7) = 0 .$

III. Ebenso mit Ausnahme von $(X_5 X_7) = X_5 .$

Digitized by Google

IV. Wie II. mit Ausnahme von $(X_6X_7) = X_5$.

V. Wie II. mit Ausnahme von

$$(X_5X_7) = -X_5 , \quad (X_6X_7) = X .$$

VI. Wie II. mit Ausnahme von

$$(X_5X_6) = X_7 , \quad (X_6X_7) = X_5 , \quad (X_7X_5) = X_6 .$$

VII.

$$(X_1X_2)=2X_3,(X_1X_3)=-2X_2,(X_1X_4)=2X_7,(X_1X_5)=-2iX_5, \quad X_6)=2iX_6,(X_1X_7)=2iX_4$$
$$(X_2X_3)=2X_1,\ (X_2X_4)=0\ ,\ (X_2X_5)=2iX_4,\ (X_2X_6)=2X_7,\ (X_2X_7)=iX_5-X_6$$
$$(X_3X_4)=0,(X_3X_5)=-2X_4,(X_3X_6)=-2iX_7,(X_3X_7)=X_5-iX_6$$
$$(X_4X_5) = 0 , \quad (X_4X_6) = 0 , \quad (X_4X_7) = 0$$
$$(X_5X_6) = 0 , \quad (X_5X_7) = 0$$
$$(X_6X_7) = 0.$$

VIII. Ebenso mit Ausnahme von

$$(X_5X_6) = -2iX_7 , \quad (X_5X_7) = X_5 , \quad (X_6X_7) = -X_6 .$$

§ 6.

Zur Bestimmung der Nichtkegelschnittssysteme,

Die Berechnung der Nichtkegelschnittssysteme bietet weniger theoretische Schwierigkeiten als die der Kegelschnittsysteme.

Es seien e_1, $e_2 \ldots e_n$ die n Einheiten eines solchen Systems. Dieselben können nach § 1 derartig gewählt werden, dass die Multiplicationstafel die Form annimmt:

(1)	(1)	(1)	(1)	. .
(1)	(12)	(12)	(12)	. .
(1)	(12)	(123)	(123)	. .
(1)	(12)	(123)	(1234)	. .
.	.	.	.	. .
.	.	.	.	. . ,

wo $(12..m)$ einen aus $e_1 \ldots e_m$ linear zusammengesetzten Ausdruck bedeutet. In Worten sagt diese Form aus: Jedes Product,

Digitized by Google

in welchem $e_\varkappa$ auftritt, setzt sich aus $e_1, e_2 \ldots e_\varkappa$ linear zusammen. Um die invarianten Mannigfaltigkeiten zu finden, hat man die Determinante des Systems zu bilden. Dieselbe reducirt sich auf ihr Diagonalglied und zeigt daher, dass sie in *lineare* Factoren zerfällt, d. h. dass die invarianten Mannigfaltigkeiten $(n-1)$ter Stufe sämmtlich *eben* sind.

Um die Nichtkegelschnittssysteme zu berechnen, wird man bedenken, dass der Modul sicher von e_n abhängt, d. h. dass direct e_n als Modul benutzt werden kann. $e_1 \ldots e_{n-1}$ bilden für sich ein System von $(n-1)$ Einheiten; kennt man dieses, so ist auch das System $(e_1 \ldots e_n)$ ohne weiteres bekannt. Aber das kleinere System $e_1 \ldots e_{n-1}$ kann sehr wohl ausgeartet sein, d. h. gar keinen Modul besitzen, indem eine der Determinanten des Systems identisch verschwindet, und wir dürfen nicht voraussetzen, dass dies System alsdann bekannt sei. So z. B. ist beim 4-gliedrigen System

$$\begin{array}{cccc} e_1 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & e_2 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array}$$

mit dem Modul e_4 das kleinere System $(e_1 e_2 e_3)$:

$$\begin{array}{ccc} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

ausgeartet. Es besitzt, obgleich das associative Gesetz erfüllt ist, keinen Modul.

Demnach bedarf es zur Aufstellung der Nichtkegelschnittssysteme in n Einheiten der vorgängigen Berechnung aller regulären und ausgearteten Nichtkegelschnittssysteme in $(n-1)$ Einheiten. Genauer gesagt handelt es sich um das Problem:

Man soll zu einem regulären oder ausgearteten Zahlensystem ohne Kegelschnittszusammensetzung eine Einheit hinzufügen, sodass das neue System ebenfalls Nichtkegelschnittssystem ist, gleichviel ob regulär oder ausgeartet.

Dies Problem bereitet keine Schwierigkeiten, wenn man sich zu seiner Erledigung folgender Bemerkung bedient:

Digitized by Google

Wir wollen annehmen, es seien alle Nichtkegelschnittssysteme — reguläre und ausgeartete — bis zu $(n-1)$ Einheiten bekannt. Um dann die Systeme in n Einheiten zu finden, greifen wir eines der Systeme in $(n-1)$ Einheiten $(e_1 .. e_{n-1})$ heraus, dessen Multiplicationstafel die obige Form hat. e_n ist so hinzuzufügen, dass $e_n e_\varkappa$ und $e_\varkappa e_n$ sich durch $e_1 .. e_\varkappa$ allein ausdrücken. Das System $(e_1 .. e_n)$ *verkürzen* wir nun auf diese Art: Wir streichen die erste Horizontal- und Verticalreihe der Tafel und unterdrücken ausserdem überall die Glieder in e_1. Dann bleibt eine Multiplicationstafel der Einheiten $e_2 .. e_n$ und es ist leicht zu sehen, dass in ihr das associative Gesetz erfüllt ist. Es ist dies ein System in nur noch $(n-1)$ Einheiten, in welchem überdies — nach Voraussetzung — die Producte der $(n+2)$ ersten Einheiten $e_2 .. e_{n-1}$ bekannt sind und dessen Tafel wieder die für die Nichtkegelschnittssysteme charakteristische Form hat. Das System kann demnach als bekannt angesehen werden. Nun sind wieder die Glieder in e_1 hinzuzufügen und es handelt sich also einfach darum, welche Vielfachen von e_1 zu den bisherigen Ausdrücken für $e_n e_2$, $e_n e_3 \ldots$, $e_2 e_n$, $e_3 e_n \ldots$ hinzuzufügen sind und wie sich $e_n e_1$ und $e_1 e_n$ durch e_1 ausdrücken. Diese Berechnung geschieht durch Prüfung des associativen Gesetzes.

Um diese Methode durch ein Beispiel zu erläutern, handle es sich darum, zu dem (ausgearteten) System

$$\begin{matrix} e_1 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_2 \\ e_1 & 0 & e_3 \end{matrix}$$

eine Einheit e_4 hinzuzufügen. Zunächst lautet die Tafel allgemein:

$$\begin{matrix} e_1 & 0 & e_1 & ae_1 \\ 0 & 0 & e_2 & be_1 + ce_2 \\ e_1 & 0 & e_3 & de_1 + fe_2 + ge_3 \\ a'e_1 & b'e_1 + c'e_2 & d'e_1 + f'e_2 + g'e_3 & he_1 + ke_2 + le_3 + me_4 . \end{matrix}$$

Wir verkürzen und finden das System in e_2, e_3, e_4:

Digitized by Google

	e_2	e_3	e_4
e_2	0	e_2	ce_2
e_3	0	e_3	fe_2+ge_3
e_4	$c'e_2$	$f'e_2+g'e_3$	$ke_2+le_3+me_4$

Die Systeme dieser Art haben nun eine der typischen Formen:

0	e_2	e_2	0	e_2	e_4	0	e_2	0
0	e_3	e_3	0	e_3	e_3	0	e_3	0
e_4	e_2	e_3	0	e_2	e_3	0	0	0

Die letztere derselben liefert z. B. rückwärts das System in $e_1 .. e_4$:

e_1	0	e_1	ae_1
0	0	e_2	be_1
e_1	0	e_3	de_1
$a'e_1$	$b'e_1$	$d'e_1$	he_1

und die Prüfung des associativen Gesetzes giebt

$$a=a',\quad h=a^2,\quad b=b'=0,\quad d=d'=a,\quad a^2(1-a)=0,$$

d. h. $a=1$ oder 0, sodass die beiden Systeme hervorgehen

e_1	0	e_1	e_1		e_1	0	e_1	0
0	0	e_2	0		0	0	e_2	0
e_1	0	e_3	e_1		e_1	0	e_3	0
e_1	0	e_1	e_1		0	0	0	0

(die beide ausgeartet sind).

In dieser Weise wird die Bestimmung der Nichtkegelschnittssysteme bei passender Anordnung leicht zu einer bloss mechanischen Arbeit. —

Die *ausgearteten* Systeme, d. h. also solche, deren eine oder beide Determinanten identisch verschwinden, sind in den bisher vorliegenden deutschen Abhandlungen nicht in dem Grade berücksichtigt worden, wie von den englischen und amerikanischen Mathematikern. Peirce's ausführliche oben citirte Abhandlung ist in der Hauptsache eben den ausgearteten Systemen gewidmet.

Digitized by Google

Die ausgearteten Systeme bieten auch Interesse vom Gesichtspunkt der Theorie der Transformationsgruppen aus. Während nämlich die Deutung der regulären Systeme nur einfach-transitive Gruppen in Beziehung zu den complexen Zahlen bringt, geben die ausgearteten Systeme eine Interpretation gewisser intransitiver Gruppen im Bereiche der complexen Zahlen. Um dies kurz zu erläutern, seien $e_1 \dots e_n$ die Einheiten und

$$e_i e_\varkappa = \sum_s \eta_{si\varkappa} e_s$$

die Multiplicationsregeln eines Systems. Die bisherige Methode ordnete nun dem System — von dem vorausgesetzt wird, dass es associativ sei — die Gruppen zu

$$x_s' = \sum_i \sum_\varkappa \eta_{si\varkappa} x_i y_\varkappa \; ; \quad y_s' = \sum_i \sum_\varkappa \eta_{si\varkappa} x_i y_\varkappa$$

und verlangte demnach, dass diese die identische Transformation enthielten, wodurch alle ausgearteten Systeme und damit alle intransitiven Gruppen von vornherein ausgeschlossen waren.

Wir bemerken nun aber, dass auch die je $(n+1)$ Gleichungen:

$$x_0' = x_0 y_0 \; ,$$
$$x_s' = x_s y_0 + x_0 y_s + \sum_i \sum_\varkappa \eta_{si\varkappa} x_i y_\varkappa \; ;$$

$$y_0' = x_0 y_0 \; ,$$
$$y_s' = x_s y_0 + x_0 y_s + \sum_i \sum_\varkappa \eta_{si\varkappa} x_i y_\varkappa$$

Gruppen darstellen, wovon man sich durch Verification überzeugen kann. Diese Gruppen besitzen die identische Transformation und sind einfach-transitiv in dem Raume $(x_0 x_1 \dots x_n)$ resp. $(y_0 y_1 \dots y_n)$. Ihnen gehört das Zahlensystem zu, welches man erhält, indem man zum System $(e_1 \dots e_n)$ noch einen Modul e_0 hinzugefügt (sodass also $e_\varkappa e_0 = e_0 e_\varkappa = e_\varkappa$, $e_0^2 = e_0$ angenommen wird). Hierbei bleibt es ganz gleichgültig, ob das System $(e_1 \dots e_n)$ regulär oder ausgeartet war. Bei diesen beiden Gruppen werden nun die Punkte der Mannigfaltigkeit $x_0 = 0$ resp. $y_0 = 0$ (die offenbar invariant bleibt) transformirt vermöge der Gruppen in $x_1 \dots x_n$ resp. $y_1 \dots y_n$:

$$x_s' = x_s + \sum_i \sum_\varkappa \eta_{si\varkappa} x_i y_\varkappa \; ; \quad y_s' = y_s + \sum_i \sum \eta_{si\varkappa} x_i y_\varkappa \; .$$

Digitized by Google

Diese beiden Gruppen sind freilich keine Parametergruppen. Sie besitzen die identische und infinitesimale Transformationen und brauchen nicht nothwendig einfach-transitiv zu sein. Denn wenn das System $(e_1 \dots e_n)$ ausgeartet ist, so sind diese beiden Gruppen (deren Transformationen natürlich auch mit einander paarweise vertauschbar sind) intransitiv. Ihre infinitesimalen Transformationen

$$X_k f = \sum_s \sum_i \eta_{sik} x_i p_s \; ; \quad Y_i f = \sum_s \sum_k \eta_{sik} y_k p_s$$

lassen sich in derselben Weise direct aus der Multiplicationstafel der Einheiten $e_1 \dots e_n$ ablesen, wie überhaupt die infinitesimalen Transformationen der zu einem nicht-ausgearteten Systeme gehörigen beiden einfach-transitiven Gruppen aus der Multiplicationstafel des Systems ohne weiteres entnommen werden können.

Z. B. zu dem ausgearteten Zahlensystem

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_2 \\ e_1 & 0 & e_3 \end{matrix}$$

sind die Gruppen zugeordnet

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_1 y_3 \; , & y_1' &= y_1 + y_3 x_1 \\ x_2' &= x_2 + x_3 y_2 \; , & y_2' &= y_2 + y_2 x_3 \\ x_3' &= x_3 + x_3 y_3 \; , & y_3' &= y_3 + y_3 x_3 \end{aligned}$$

mit den sofort aus der Tafel zu entnehmenden infinitesimalen Transformationen

$$x_3 p_2 \; , \quad x_1 p_1 + x_3 p_3 \; ; \quad y_3 q_1 \; , \quad y_2 q_2 + y_3 q_3 \; .$$

Es ist nicht unsere Absicht, diese Deutung der ausgearteten Zahlensysteme an dieser Stelle weiter zu verfolgen. Sie sollte nur zeigen, dass auch die ausgearteten Systeme, indem sie gewisse intransitive Gruppen vorstellen, für die Theorie der Transformationsgruppen von Bedeutung sein können.

Wie schon bemerkt, hat Peirce die ausgearteten Systeme eingehender betrachtet. Die Systeme aus zwei Einheiten, deren es fünf giebt (zu denen bekanntlich zwei reguläre hinzutreten),

Digitized by Google

hat jedoch erst CAYLEY [1]) vollständig aufgestellt. Durch Hinzufügung eines Moduls hätte man aus diesen sieben Systemen in zwei Einheiten ohne weiteres die fünf nicht-ausgearteten Systeme in drei Einheiten ablesen können, die zuerst von STUDY auf anderem (directem) Wege bestimmt wurden. Die ausgearteten Systeme in drei Einheiten sind u. W. noch nicht angegeben worden, wenn sie auch implicite in der STUDY'schen Aufstellung aller regulären Systeme in vier Einheiten enthalten sind. In vier Einheiten giebt es fast hundert Typen ausgearteter Systeme. Wir haben dieselben sämtlich berechnet und zwar nach der oben entwickelten Methode, glauben jedoch von ihrer Wiedergabe ihrer grossen Zahl halber absehen zu sollen. Wohl aber mögen die achtzehn ausgearteten Systeme in drei Einheiten, die wir ebenfalls durch unsere Methode bestimmten und daher in etwas anderer äusserer Form erhalten, als sie aus der von STUDY gegebenen Zusammenstellung der Systeme in vier Einheiten hervorgehen würden, hier Platz finden [2]):

1.	2.	3.	4.	5.	6.
$0\ 0\ e_1$	$0\ 0\ e_1$	$0\ 0\ e_1$	$0\ 0\ 0$	$0\ 0\ 0$	$0\ 0$
$0\ e_2\ e_2$	$0\ 0\ e_2$	$0\ 0\ e_2$	$0\ e_2\ e_2$	$0\ 0\ e_2$	$0\ 0$
$0\ e_2\ e_3$	$0\ e_2\ e_3$	$0\ 0\ e_3$	$e_1\ e_2\ e_3$	$e_1\ e_2\ e_3$	$e_1\ e_2$

7.	8.	9.	10.	11.	12.
$0\ 0\ 0$	$0\ 0\ 0$	$0\ 0\ 0$	$0\ 0\ 0$	$0\ 0\ 0$	$0\ 0$
$0\ 0\ e_2$	$0\ e_2\ 0$	$0\ e_2\ 0$	$0\ 0\ e_2$	$0\ 0\ e_1$	$0\ 0$
$e_1\ 0\ e_3$	$0\ 0\ e_3$	$0\ 0\ e_1$	$0\ e_2\ e_3$	$0\ e_1\ e_2$	$0\ 0$

13.	14.	15.	16.	17.	18.
$0\ 0\ 0$	$0\ 0\ 0$	$0\ 0\ 0$	$0\ 0\ 0$	$0\ 0\ 0$	$0\ 0$
$0\ 0\ 0$	$0\ 0\ 0$	$0\ 0\ 0$	$0\ 0\ e_1$	$0\ 0\ e_1$	$0\ 0$
$0\ e_2\ e_3$	$0\ 0\ e_3$	$0\ 0\ e_1$	$0\ \lambda e_1\ 0$	$0\ -e_1\ e_1$	$0\ 0$

1) CAYLEY, On double algebra, Proceed. of Lond. Math. Soc. XV (1883—84), S. 185—197.

2) Aus diesen ausgearteten Systemen und den fünf nicht ausgearteten gehen durch Zufügung des Moduls als vierte Einheit in der That die von STUDY bestimmten Systeme in vier Einheiten hervor, womit eine Bestätigung der Resultate STUDY's durch eine andere Methode gewonnen ist.

Digitized by Google

Kennt man alle ausgearteten Systeme in vier Einheiten — wie schon bemerkt, haben wir sie sämtlich berechnet — so ist es leicht, durch Hinzufügung eines Moduls alle regulären Systeme in fünf Einheiten anzugeben. Sie sind im folgenden § zusammengestellt.

§ 7.

Die aus fünf Einheiten ableitbaren Zahlensysteme.

In Bezug auf die Anordnung der unten gegebenen Zusammenstellung aller regulären (nicht ausgearteten) Zahlensysteme in fünf Einheiten e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 muss Folgendes bemerkt werden.

Eines der Systeme, das in § 5 bestimmte, unten mit XXVII. bezeichnete, ist Kegelschnittssystem. Alle übrigen besitzen als Nichtkegelschnittssysteme Multiplicationstafeln von der in § 1 angegebenen besonderen Form. — Die fünfte Einheit e_5 ist in dem grösseren Theile der Systeme der Modul. In einer kleineren Anzahl ist dagegen zur Einheit e_5 eine andere Zahl genommen. Ueberall ist jedoch der Modul ε noch besonders angegeben.

Von besonderer Bedeutung ist für die Systeme eine gewisse Zahl k, die so zu definiren ist: Ist x eine allgemeine Zahl des Systems und ε der Modul, so wird unter den Zahlen

$$\varepsilon,\ x,\ x^2,\ x^3 \ldots .$$

eine erste, etwa x^k, sein, die sich durch die vorhergehenden linear mit gewöhnlich-complexen Coefficienten $a_1 .. a_k$ ausdrückt:

$$x^k = a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \cdots + a_k \varepsilon .$$

Die Potenz k ist eben jene bemerkenswerthe Zahl. Dass sie noch eine andere Bedeutung besitzt, ist von Study [1]) bemerkt worden. Die Coefficienten $a_1 .. a_k$ sind im Gebiete der gewöhnlich-complexen Zahlen Functionen der in $x = x_1 e_1 + \cdots + x_5 e_5$ auftretenden Zahlen x_1, $x_2 .. x_5$. Fasst man x in vorstehender Gleichung als gewöhnlich-complexe Zahl auf, so besitzt die Gleichung k Wurzeln x: $x^{(1)}$, $x^{(2)} .. x^{(k)}$, die theilweise oder ganz zusammenfallen können. Die Gleichung lässt sich dann so schreiben:

1) A. a. O. in d. Leipz. Berichten S. 194.

$$(x - x^{(1)}\varepsilon)\ (x - x^{(2)}\varepsilon)\ \ldots\ (x - x^{(k)}\varepsilon) = 0\ ,$$

wenn x wieder eine allgemeine Zahl des Systems vorstellt. Die Zahl k ist höchstens $= 5$ und kann gleich 5, 4, 3 oder 2 sein. Hiernach sind alle Systeme in vier Schaaren eingereiht. Ferner sind in jeder Schaar die einzelnen Systeme wieder geordnet nach der Anzahl der von einander verschiedenen Wurzeln $x^{(1)}, x^{(2)} \ldots x^{(k)}$. Es sei hier hervorgehoben, dass diese Anzahl auch die der ebenen Mannigfaltigkeiten vierter Stufe ist, welche bei den zum Systeme gehörigen Gruppen invariant bleiben.

Von den je zwei zu einander reciproken Systemen ist stets nur das eine angegeben, auch wenn sie sich nicht durch projective Transformation in einander überführen lassen.

$k = 5$. [1]

I.	$\begin{matrix} e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_5 \end{matrix}$	$(x - x_1\varepsilon)\ (x - x_2\varepsilon)\ (x - x_3\varepsilon)\ (x - x_4\varepsilon)\ (x - x_5\varepsilon) = 0$ $\varepsilon = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5\ .$ Commutativ und daher zu sich selbst reciprok.
II.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & e_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 & 0 \\ e_1 & 0 & 0 & 0 & e_5 \end{matrix}$	$(x - x_2\varepsilon)(x - x_3\varepsilon)(x - x_4\varepsilon)(x - x_5\varepsilon)^2 = 0$ $\varepsilon = e_2 + e_3 + e_4 + e_5\ .$ Commutativ und daher zu sich selbst reciprok.
III.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_2 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & e_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 & 0 \\ e_1 & 0 & 0 & 0 & e_5 \end{matrix}$	$(x - x_3\varepsilon)^2\ (x - x_4\varepsilon)\ (x - x_5\varepsilon)^2 = 0$ $\varepsilon = e_3 + e_4 + e_5\ .$ Commutativ und daher zu sich selbst reciprok.

1) Die nachfolgenden Systeme sind mit aller bei so umfangreicher Rechnung erforderlichen Sorgfalt bestimmt und von den überzähligen gesäubert worden. Sollten sich doch noch Fehler finden, was der Verf. nicht vermuthet, so bittet derselbe um Nachsicht.

Digitized by Google

IV.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & e_1 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & e_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & e_5 \end{matrix}$	$(x - x_3\varepsilon)\ (x - x_4\varepsilon)\ (x - x_5\varepsilon)^3 = 0$ $\varepsilon = e_3 + e_4 + e_5$. Commutativ und daher zu sich selbst reciprok.
V.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & e_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & e_2 & 0 & e_3 \\ e_1 & 0 & 0 & e_4 & 0 \\ 0 & e_2 & e_3 & 0 & e_5 \end{matrix}$	$(x - x_4\varepsilon)^2\ (x - x_5\varepsilon)^3 = 0$ $\varepsilon = e_4 + e_5$. Commutativ und daher zu sich selbst reciprok.
VI.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_1 & 0 & e_2 \\ 0 & e_1 & e_2 & 0 & e_3 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 & 0 & e_5 \end{matrix}$	$(x - x_4\varepsilon)\ (x - x_5\varepsilon)^4 = 0$ $\varepsilon = e_4 + e_5$. Commutativ und daher zu sich selbst reciprok.
VII.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_2 \\ 0 & 0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{matrix}$	$(x - x_5\varepsilon)^5 = 0$ $\varepsilon = e_5$. Commutativ und daher zu sich selbst reciprok.

$k = 4$.

VIII.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & e_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 & 0 & 0 \\ e_1 & 0 & 0 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_5 \end{matrix}$	$(x - x_2\varepsilon)\,(x - x_3\varepsilon)\,(x - x_4\varepsilon)\,(x - x_5\varepsilon) = 0$ $\varepsilon = e_2 + e_3 + e_4 + e_5$. Geht in sein reciprokes System über durch $\overline{e_4} = e_5$, $\overline{e_5} = e_4$.

Digitized by Google

IX.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & e_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & e_5 \end{matrix}$	$(x-x_3\varepsilon)\,(x-x_4\varepsilon)\,(x-x_5\varepsilon)^2=0$ $\varepsilon=e_3+e_4+e_5\,.$ Commutativ und daher zu sich selbst reciprok.
X.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & e_3 & 0 & 0 \\ e_1 & 0 & 0 & e_4 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 & 0 & e_5 \end{matrix}$	$(x-x_3\varepsilon)\,(x-x_4\varepsilon)\,(x-x_5\varepsilon)^2=0$ $\varepsilon=e_3+e_4+e_5\,.$ Kann nicht in sein reciprokes System übergeführt werden.
XI.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 & e_4 & 0 \\ e_1 & 0 & 0 & 0 & e_5 \end{matrix}$	$(x-x_3\varepsilon)\,(x-x_4\varepsilon)\,(x-x_5\varepsilon)^2=0$ $\varepsilon=e_3+e_4+e_5\,.$ Geht in sein reciprokes System über durch $\overline{e_3}=e_4\,,\quad \overline{e_4}=e_3\,.$
XII.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & e_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_3 \\ e_1 & 0 & 0 & e_4 & 0 \\ 0 & e_2 & e_3 & 0 & e_5 \end{matrix}$	$(x-x_4\varepsilon)^2\,(x-x_5\varepsilon)^2=0$ $\varepsilon=e_4+e_5\,.$ Commutativ und daher zu sich selbst reciprok.
XIII.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_3 & 0 \\ 0 & e_2 & e_3 & e_4 & 0 \\ e_1 & 0 & 0 & 0 & e_5 \end{matrix}$	$(x-x_4\varepsilon)^2\,(x-x_5\varepsilon)^2=0$ $\varepsilon=e_4+e_5\,.$ Geht in sein reciprokes System über durch $\overline{e_1}=e_3\,,\ \overline{e_3}=e_4\,,\ \overline{e_4}=e_5\,,\ \overline{e_5}=e_4\,.$

Digitized by Google

XIV.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & e_1 & 0 & e_3 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 & 0 & e_5 \end{matrix}$	$(x - x_4\varepsilon)\,(x - x_5\varepsilon)^3 = 0$ $\varepsilon = e_4 + e_5$. Commutativ und daher zu sich selbst reciprok.
XV.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & e_4 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & e_1 & 0 & e_3 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 & 0 & e_5 \end{matrix}$	$(x - x_4\varepsilon)\,(x - x_5\varepsilon)^3 = 0$ $\varepsilon = e_4 + e_5$. Commutativ und daher zu sich selbst reciprok.
XVI.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & e_2 & 0 & e_3 \\ e_1 & 0 & 0 & e_4 & 0 \\ 0 & e_2 & e_3 & 0 & e_5 \end{matrix}$	$(x - x_4\varepsilon)\,(x - x_5\varepsilon)^3 = 0$ $\varepsilon = e_4 + e_5$. Kann nicht in sein reciprokes System übergeführt werden.
XVII.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & e_4 & e_4 & 0 & e_2 \\ 0 & -e_1 & \lambda e_1 & 0 & e_3 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 & 0 & e_5 \end{matrix}$	$(x - x_4\varepsilon)\,(x - x_5\varepsilon)^3 = 0$ $\varepsilon = e_4 + e_5$. Geht in sein reciprokes System über durch $\overline{e_2} = -e_2$.
XVIII.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_2 \\ 0 & 0 & e_1 & 0 & e_3 \\ 0 & e_1 & 0 & e_2 & e_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{matrix}$	$(x - x_5\varepsilon)^4 = 0$ $\varepsilon = e_5$. Commutativ und daher zu sich selbst reciprok.

Digitized by Google

XIX.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_1 & 0 & e_2 \\ 0 & e_1 & e_2 & e_1 & e_3 \\ 0 & 0 & e_1 & 0 & e_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{matrix}$	$(x - x_5\varepsilon)^4 = 0$ $\varepsilon = e_5$. Commutativ und daher zu sich selbst reciprok.
XX.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 & e_3 \\ 0 & 0 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{matrix}$	$(x - x_5\varepsilon)^4 = 0$ $\varepsilon = e_5$. Commutativ und daher zu sich selbst reciprok.
XXI.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_2 \\ 0 & 0 & e_1 & e_1 & e_3 \\ 0 & e_1 & -e_1 & e_2 & e_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{matrix}$	$(x - x_5\varepsilon)^4 = 0$ $\varepsilon = e_5$. Geht in sein reciprokes System über durch $\overline{e_3} = -e_3$.
XXII.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_3 \\ 0 & e_1 & -e_1 & e_2 & e_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{matrix}$	$(x - x_5\varepsilon)^4 = 0$ $\varepsilon = e_5$. Geht in sein reciprokes System über durch $\overline{e_3} = -e_3$.

$k = 3$.

XXIII.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 & 0 & 0 \\ e_1 & 0 & 0 & e_4 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 & 0 & e_5 \end{matrix}$	$(x - x_3\varepsilon)(x - x_4\varepsilon)(x - x_5\varepsilon) = 0$ $\varepsilon = e_3 + e_4 + e_5$. Geht in sein reciprokes System über durch $\overline{e_1} = e_2$, $\overline{e_2} = e_1$, $\overline{e_3} = e_4$, $\overline{e_4} = e_3$.

Digitized by Google

XXIV.

0	0	0	0	e_1
0	0	0	0	e_2
0	e_2	e_3	0	0
e_1	0	0	e_4	0
0	0	0	0	e_5

$$(x - x_3\varepsilon)(x - x_4\varepsilon)(x - x_5\varepsilon) = 0$$
$$\varepsilon = e_3 + e_4 + e_5 .$$

Kann nicht in sein reciprokes System übergeführt werden.

XXV.

0	0	0	0	e_1
0	0	0	0	e_2
0	0	e_3	0	0
e_1	e_2	0	e_4	0
0	0	0	0	e_5

$$(x - x_3\varepsilon)(x - x_4\varepsilon)(x - x_5\varepsilon) = 0$$
$$\varepsilon = e_3 + e_4 + e_5 .$$

Geht in sein reciprokes System über durch
$$\overline{e_4} = e_5 , \quad \overline{e_5} = e_4 .$$

XXVI.

0	0	e_1	0	0
0	0	0	0	e_2
0	e_2	e_3	0	0
0	0	0	e_4	0
e_1	0	0	0	e_5

$$(x - x_3\varepsilon)(x - x_4\varepsilon)(x - x_5\varepsilon) = 0$$
$$\varepsilon = e_3 + e_4 + e_5 .$$

Geht in sein reciprokes System über durch
$$\overline{e_1} = e_2 , \quad \overline{e_2} = e_1 .$$

XXVII.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_1
e_2	$-e_1$	$-e_4$	e_3	e_2
e_3	e_4	$-e_1$	$-e_2$	e_3
e_4	$-e_3$	e_2	$-e_1$	e_4
e_1	e_2	e_3	e_4	e_5

$$(x - (x_1 + x_5 + i\sqrt{x_2^2 + x_3^2 + x_4^2})\,\varepsilon)$$
$$(x - (x_1 + x_5 - i\sqrt{x_2^2 + x_3^2 + x_4^2})\,\varepsilon) \,.$$
$$\cdot\,(x - x_5\varepsilon) = 0$$
$$\varepsilon = e_5 .$$

Geht in sein reciprokes System über durch
$$\overline{e_1} = -e_1 , \quad \overline{e_2} = -e_2 , \quad e_3 = -e_3 .$$

XXVIII.

0	0	0	0	e_1
0	0	0	0	e_2
0	0	0	0	e_3
0	0	0	e_4	0
e_1	e_2	e_3	0	e_5

$$(x - x_4\varepsilon)(x - x_5\varepsilon)^2 = 0$$
$$\varepsilon = e_4 + e_5 .$$

Commutativ und daher zu sich selbst reciprok.

Digitized by Google

XXIX.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_3 \\ 0 & 0 & e_3 & e_4 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & e_5 \end{matrix}$	$(x - x_4\varepsilon)\,(x - x_5\varepsilon)^2 = 0$ $\varepsilon = e_4 + e_5$. Kann nicht in sein reciprokes System übergeführt werden.
XXX.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_4 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_3 \\ e_1 & e_2 & 0 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 & 0 & e_5 \end{matrix}$	$(x - x_4\varepsilon)\,(x - x_5\varepsilon)^2 = 0$ $\varepsilon = e_4 + e_5$. Kann nicht in sein reciprokes System übergeführt werden.
XXXI.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_3 \\ e_1 & e_2 & 0 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 & 0 & e_5 \end{matrix}$	$(x - x_4\varepsilon)\,(x - x_5\varepsilon)^2 = 0$ $\varepsilon = e_4 + e_5$. Kann nicht in sein reciprokes System übergeführt werden.
XXXII.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_4 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_3 \\ 0 & 0 & e_3 & e_4 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & e_5 \end{matrix}$	$(x - x_4\varepsilon)\,(x - x_5\varepsilon)^2 = 0$ $\varepsilon = e_4 + e_5$. Geht in sein reciprokes System über durch $\overline{e_2} = e_3$, $\overline{e_3} = e_2$.
XXXIII.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_4 & 0 & e_2 \\ 0 & -e_1 & 0 & 0 & e_3 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 & 0 & e_5 \end{matrix}$	$(x - x_4\varepsilon)\,(x - x_5\varepsilon)^2 = 0$ $\varepsilon = e_4 + e_5$. Geht in sein reciprokes System über durch $\overline{e_2} = -e_2$.

Digitized by Google

XXXIV.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & e_1 & 0 & e_3 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 & e_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{matrix}$	$(x - x_5\varepsilon)^3 = 0$ $\varepsilon = e_5$. Commutativ und daher zu sich selbst reciprok.
XXXV.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_3 \\ 0 & 0 & e_1 & e_2 & e_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{matrix}$	$(x - x_5\varepsilon)^3 = 0$ $\varepsilon = e_5$. Commutativ und daher zu sich selbst reciprok.
XXXVI.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & e_1 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & e_1 & 0 & e_3 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{matrix}$	$(x - x_5\varepsilon)^3 = 0$ $\varepsilon = e_5$. Commutativ und daher zu sich selbst reciprok.
XXXVII.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & e_1 & 0 & e_3 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{matrix}$	$(x - x_5\varepsilon)^3 = 0$ $\varepsilon = e_5$. Commutativ und daher zu sich selbst reciprok.
XXXVIII.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_3 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{matrix}$	$(x - x_5\varepsilon)^3 = 0$ $\varepsilon = e_5$. Commutativ und daher zu sich selbst reciprok.

Digitized by Google

XXXIX.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_3 \\ 0 & 0 & \lambda e_1 & e_2 & e_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{matrix}$ $\lambda \neq 1.$	$(x - x_5\varepsilon)^3 = 0$ $\varepsilon = e_5 .$ Kann nicht in sein reciprokes System übergeführt werden.
XL.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & e_1 & \lambda e_1 + e_2 & e_3 \\ 0 & 0 & -\lambda e_1 - e_2 & e_2 & e_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{matrix}$	$(x - x_5\varepsilon)^3 = 0$ $\varepsilon = e_5 .$ Geht in sein reciprokes System über durch $\overline{e_3} = -e_3 .$
XLI.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_3 \\ 0 & 0 & e_2 & 0 & e_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{matrix}$	$(x - x_5\varepsilon)^3 = 0$ $\varepsilon = e_5 .$ Geht in sein reciprokes System über durch $\overline{e_1} = e_2 , \ \overline{e_2} = e_1 .$
XLII.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda e_1 + e_2 & e_3 \\ 0 & 0 & \lambda e_1 - e_2 & e_2 & e_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{matrix}$	$(x - x_5\varepsilon)^3 = 0$ $\varepsilon = e_5 .$ Geht in sein reciprokes System über durch $\overline{e_1} = -e_1 , \ \overline{e_3} = -e_3 .$
XLIII.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_1 & 0 & e_2 \\ 0 & \lambda e_1 & 0 & 0 & e_3 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 & e_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{matrix}$	$(x - x_5\varepsilon)^3 = 0$ $\varepsilon = e_5 .$ Geht in sein reciprokes System über durch $\overline{e_2} = e_3 , \ \overline{e_3} = e_2 .$

Digitized by Google

XLIV.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_1 & 0 & e_2 \\ 0 & -e_1 & 0 & e_1 & e_3 \\ 0 & 0 & -e_1 & e_1 & e_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array}$$

$$(x - x_5\varepsilon)^3 = 0$$

$$\varepsilon = e_5 .$$

Geht in sein reciprokes System über durch

$$\overline{e_3} = -e_3 .$$

XLV.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_2 \\ 0 & e_1 & 0 & e_1 & e_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array}$$

$$(x - x_5\varepsilon)^3 = 0$$

$$\varepsilon = e_5 .$$

Geht in sein reciprokes System über durch

$$\overline{e_3} = e_4 , \quad \overline{e_4} = e_3 .$$

XLVI.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_2 \\ 0 & e_1 & 0 & 0 & e_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_1 & e_5 \end{array}$$

$$(x - x_5\varepsilon)^3 = 0$$

$$\varepsilon = e_5 .$$

Geht in sein reciprokes System über durch

$$\overline{e_3} = e_4 , \quad \overline{e_4} = e_3 .$$

XLVII.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_3 \\ 0 & 0 & \lambda e_1 & 0 & e_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array}$$

$$\lambda \neq -1$$

$$(x - x_5\varepsilon)^3 = 0$$

$$\varepsilon = e_5 .$$

Geht in sein reciprokes System über durch

$$\overline{e_3} = e_4 , \quad \overline{e_4} = e_3 .$$

XLVIII.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_2 \\ 0 & e_1 & 0 & e_1 & e_3 \\ 0 & -e_1 & -e_1 & 0 & e_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array}$$

$$(x - x_5\varepsilon)^3 = 0$$

$$\varepsilon = e_5 .$$

Geht in sein reciprokes System über durch

$$\overline{e_2} = e_3 , \quad \overline{e_3} = e_2 , \quad e_4 = -e_4 .$$

Digitized by Google

XLIX.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_2 \\ 0 & e_1 & 0 & 0 & e_3 \\ 0 & 0 & e_1 & 0 & e_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{matrix}$	$(x - x_5\varepsilon)^3 = 0$ $\varepsilon = e_5$. Geht in sein reciprokes System über durch $e_3 = e_4$, $\overline{e_4} = e_3$.

$k = 2$.

L.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_5 \end{matrix}$	$(x - x_4\varepsilon)(x - x_5\varepsilon) = 0$ $\varepsilon = e_4 + e_5$. Geht in sein reciprokes System über durch $e_4 = e_5$, $\overline{e_5} = e_4$.
LI.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & e_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_3 \\ 0 & e_2 & 0 & e_4 & 0 \\ e_1 & 0 & e_3 & 0 & e_5 \end{matrix}$	$(x - x_4\varepsilon)(x - x_5\varepsilon) = 0$ $\varepsilon = e_4 + e_5$. Geht in sein reciprokes System über durch $\overline{e_1} = e_5$, $\overline{e_3} = e_4$.
LII.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & e_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_3 \\ 0 & e_2 & e_3 & e_4 & 0 \\ e_1 & 0 & 0 & 0 & e_5 \end{matrix}$	$(x - x_4\varepsilon)(x - x_5\varepsilon) = 0$ $\varepsilon = e_4 + e_5$. Geht in sein reciprokes System über durch $\overline{e_4} = e_5$, $\overline{e_8} = e_4$.
LIII.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_3 \\ 0 & 0 & -e_1 & 0 & e_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{matrix}$	$(x - x_5\varepsilon)^2 = 0$ $\varepsilon = e_5$. Geht in sein reciprokes System über durch $\overline{e_2} = e_2$.

Digitized by Google

LIV.	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{matrix}$	$(x - x_5\varepsilon)^2 = 0$ $\varepsilon = e_5$. Commutativ und daher zu sich selbst reciprok.

Bemerkt werden muss, dass von den Typen, welche noch einen willkürlichen Parameter enthalten, wie XXXIX, XLIII und XLVII, die commutativen besonders aufgeführt worden sind. Auch musste aus der Schaar der Systeme XLVII das System $\lambda = -1$ besonders angeführt werden (unter LIII), da es ein besonderes Verhalten zeigt. —

Es ist sicher, dass man aus der Aufstellung der Systeme in fünf Einheiten ebenso wie aus der früheren aller Kegelschnittssysteme in acht Einheiten mannigfache weitere Folgerungen zu ziehen vermag. Lehrt doch schon ein Blick in die Study'sche Abhandlung »Complexe Zahlen und Transformationsgruppen«, welch' bequemes Hülfsmittel das Rechnen mit höheren complexen Zahlen namentlich für gewisse gruppentheoretische Forschungen ist. Jedoch ein Eingehen auf die Anwendungen unserer Resultate liegt ausserhalb des Rahmens dieser Abhandlung und möge späteren Arbeiten vorbehalten werden.

Nur das Eine wollen wir schliesslich noch ausdrücklich bemerken, dass mit dieser Aufstellung das Problem der Lie'schen Theorie der Transformationsgruppen erledigt ist: *Alle Typen von Paaren reciproker einfach transitiver projectiver Gruppen in einem Gebiete fünfter Stufe anzugeben*[1]).

1) Um den Litteraturnachweisen möglichste Vollständigkeit zu geben, erwähnt der Verf. noch zwei Abhandlungen, zunächst die bekannte von Schur, *Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Zahlen*, Math. Annalen XXXIII (1888) S. 49—60 und dann: Weyr, *Note sur la théorie des quantités complexes formées avec n unités principales*, Bullet. des Sc. math. XI (1887), I. part., S. 205—215.

Da sich beide Abhandlungen nicht mit dem Problem der *Berechnung* der Systeme beschäftigen, ergab sich bisher kein Anlass, sie zu citiren. Das Gewicht der ersteren Arbeit liegt in ihren gruppentheoretischen, das der letztere in ihren functionentheoretischen Beziehungen.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

Digitized by Google

BERICHTE

ÜBER DIE

83681

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH - PHYSISCHE CLASSE.

ZWEIUNDVIERZIGSTER BAND.

1890.

MIT FÜNFZEHN FIGUREN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

Digitized by Google

INHALT.

Seite

Friedrich Schur, Beweis für die Darstellbarkeit der infinitesimalen Transformationen aller transitiven endlichen Gruppen durch Quotienten beständig convergenter Potenzreihen. Vorgelegt von Herrn W. Scheibner 1

Otto Richter, Ueber die Systeme derjenigen Kegelschnitte, die eine bicirculare Curve 4. Ordnung viermal berühren. Vorgelegt von Herrn C. Neumann 8

Hermann Wiener, Die Zusammensetzung zweier endlichen Schraubungen zu einer einzigen. Vorgelegt von Herrn C. Neumann. Mit 4 Figuren 13

M. Krause, Ueber die Multiplication der doppelt periodischen Functionen zweiter Art. 24

Walter König, Ueber die Entstehung der Kundt'schen Staubfiguren. Vorgelegt von Herrn G. Wiedemann 46

M. Krause, Ueber die Differentialgleichungen, denen die doppelt periodischen Functionen zweiter Art Genüge leisten. I. . . . 55

Hermann Wiener, Zur Theorie der Umwendungen. Vorgelegt von Herrn C. Neumann. Mit 7 Figuren 74

C. Neumann, Neue Sätze über das elektrostatische und über das magnetische Potential 88

W. Scheibner, Ueber elliptische Doppelsummen 130

E. Study, Ein Reciprocitätsgesetz in der Theorie der algebraischen Functionen. Vorgelegt von Herrn A. Mayer 153

E. Study, Ueber quadratische Formen und Liniencomplexe. Vorgelegt von Herrn A. Mayer. 172

W. Ostwald, Ueber Autokatalyse 189

F. Engel, Zur Invariantentheorie der Systeme von Pfaffschen Gleichungen. (Zweite Mittheilung.) 192

Rohn, Die Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species. Erster Theil. 208

Hermann Wiener, Ueber geometrische Analysen. Vorgelegt von Herrn C. Neumann. Mit 2 Figuren 245

Seite

M. Krause, Ueber die Differentialgleichungen, denen die doppelt periodischen Functionen zweiter Art Genüge leisten. II. . . . 268

Sophus Lie, Ueber die Grundlagen der Geometrie. (Erste Abhandlung.) 284

E. Drechsel, Ueber ein Spaltungsproduct des Caseïns 322

C. Neumann, Ueber einige Fundamentalsätze der Potentialtheorie. 327

E. Study, Ueber die Bewegungen des Raumes. Vorgelegt von Herrn A. Mayer 344

Sophus Lie, Ueber die Grundlagen der Geometrie. (Zweite Abhandlung). 355

H. Ambronn, Das optische Verhalten markhaltiger und markloser Nervenfasern. Mit zwei Holzschnitten 419

M. Krause, Ueber die Differentialgleichungen, denen die doppelt periodischen Functionen zweiter Art Genüge leisten. III . . . 430

Sophus Lie, Neuer Beweis des zweiten Fundamentalsatzes in der Theorie der Transformationsgruppen. 453

Sophus Lie, Bestimmung aller r-gliedrigen transitiven Transformationsgruppen durch ausführbare Operationen 478

A. Mayer, Allgemeine integrirbare Formen von Differentialgleichungen erster Ordnung und ihre Kriterien 494

Digitized by Google

Protector der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

SEINE MAJESTÄT DER KÖNIG.

Ehrenmitglied.

Seine Excellenz der Staatsminister des Cultus und öffentlichen Unterrichts *Carl Friedrich von Gerber*.

Ordentliche einheimische Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Geheimer Hofrath *Friedrich Zarncke* in Leipzig, Secretär der philol.-histor. Classe bis Ende des Jahres 1892.
Professor *August Leskien* in Leipzig, stellvertretender Secretär der philol.-histor. Classe bis Ende des Jahres 1892.
Dr. *Hugo Berger* in Leipzig.
Geheimer Rath *Otto Böhtlingk* in Leipzig.
Professor *Friedrich Carl Brugmann* in Leipzig.
—— *Berthold Delbrück* in Jena.
—— *Alfred Fleckeisen* in Dresden.
—— *Georg Götz* in Jena.
Geheimer Hofrath *Max Heinze* in Leipzig.
Oberschulrath *Friedrich Otto Hultsch* in Dresden-Striesen.

Digitized by Google

Oberbibliothekar *Reinhold Köhler* in Weimar.
Geheimer Hofrath *Christoph Ludolf Ehrenfried Krehl* in Leipzig.
Professor *Hermann Lipsius* in Leipzig.
— *Wilhelm Maurenbrecher* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Johannes Adolph Overbeck* in Leipzig.
— — *Wilhelm Pertsch* in Gotha.
Professor *Friedrich Ratzel* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Otto Ribbeck* in Leipzig.
Geheimer Rath *Wilhelm Roscher* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Anton Springer* in Leipzig.
— — *Georg Voigt* in Leipzig.
Professor *Moritz Voigt* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Curt Wachsmuth* in Leipzig.
Professor *Ernst Windisch* in Leipzig.
— *Richard Paul Wülker* in Leipzig.

Frühere ordentliche einheimische, gegenwärtig auswärtige Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Professor *Georg Ebers* in München.
— *Hans Georg Conon von der Gabelentz* in Berlin.
— *Theodor Mommsen* in Berlin.
Geheimer Hofrath *Erwin Rohde* in Heidelberg.
Geheimer Regierungsrath *Hermann Sauppe* in Göttingen.
Kirchenrath *Eberhard Schrader* in Berlin.

Ordentliche einheimische Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Geheimer Hofrath *Carl Ludwig* in Leipzig, Secretär der mathem.-phys. Classe bis Ende des Jahres 1894.
Professor *Adolph Mayer* in Leipzig, stellvertretender Secretär der mathem.-phys. Classe bis Ende des Jahres 1894.
Professor *Rudolf Böhm* in Leipzig.
Geheimer Medicinalrath *Christian Wilhelm Braune* in Leipzig.
Professor *Heinrich Bruns* in Leipzig.
Oberbergrath *Hermann Credner* in Leipzig.

Digitized by Google

Geheimer Rath *Moritz Wilhelm Drobisch* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Hans Bruno Geinitz* in Dresden.
Professor *Paul Flechsig* in Leipzig.
Geheimer Rath *Wilhelm Gottlieb Hankel* in Leipzig.
Geheimer Medicinalrath *Wilhelm His* in Leipzig.
Professor *Johann August Ludwig Wilhelm Knop* in Leipzig.
—— *Martin Krause* in Dresden.
Geheimer Hofrath *Rudolph Leuckart* in Leipzig.
Professor *Sophus Lie* in Leipzig.
—— *Carl Neumann* in Leipzig.
—— *Wilhelm Ostwald* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Wilhelm Pfeffer* in Leipzig.
Professor *Karl Rohn* in Dresden.
—— *Wilhelm Scheibner* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *August Schenk* in Leipzig.
Geheimer Rath *Oskar Schlömilch* in Dresden.
Hofrath *Rudolf Wilhelm Schmitt* in Dresden.
Professor *Johannes Thomae* in Jena.
Geheimer Hofrath *August Töpler* in Dresden.
—— —— *Gustav Wiedemann* in Leipzig.
Oberbergrath *Clemens Winkler* in Freiberg.
Geheimer Hofrath *Johannes Wislicenus* in Leipzig.
—— —— *Wilhelm Wundt* in Leipzig.
Geheimer Rath *Gustav Anton Zeuner* in Dresden.
Geheimer Bergrath *Ferdinand Zirkel* in Leipzig.

Ausserordentliche Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Professor *Hermann Ambronn* in Leipzig.
—— *Ernst Beckmann* in Leipzig.
—— *Robert Behrend* in Leipzig.
—— *Edmund Drechsel* in Leipzig.
—— *Friedrich Engel* in Leipzig.
—— *Alfred Fischer* in Leipzig.
—— *Ernst von Meyer* in Leipzig.

Digitized by Google

Frühere ordentliche einheimische, gegenwärtig auswärtige Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Geheimer Hofrath *Carl Gegenbaur* in Heidelberg.
Professor *Felix Klein* in Göttingen.
—— *Adalbert Krüger* in Kiel.
—— *Ferdinand Freiherr von Richthofen* in Berlin.
Geheimer Hofrath *Wilhelm Weber* in Göttingen.

Archivar:

Hofrath *Joseph Heinrich Gustav Ernst Förstemann* in Leipzig.

Verstorbene Mitglieder.

Ehrenmitglieder.

Falkenstein, Johann Paul von, 1882.
Wietersheim, Karl August Wilhelm Eduard von, 1865.

Philologisch-historische Classe.

Albrecht, Eduard, 1876.
Ammon, Christoph Friedrich von, 1850.
Becker, Wilhelm Adolf, 1846.
Brockhaus, Hermann, 1877.
Bursian, Conrad, 1883.
Curtius, Georg, 1885.
Droysen, Johann Gustav, 1884.
Ebert, Adolf, 1890.
Fleischer, Heinrich Leberecht, 1888.
Flügel, Gustav, 1870.
Franke, Friedrich, 1871.
Gabelentz, Hans Conon von der, 1874.
Gersdorf, Ernst Gotthelf, 1874.
Göttling, Carl, 1869.
Gutschmid, Hermann Alfred von, 1887.
Hänel, Gustav, 1878.
Hand, Ferdinand, 1851.
Hartenstein, Gustav, 1890.
Hasse, Friedrich Christian August, 1848.
Haupt, Moritz, 1874.
Hermann, Gottfried, 1848.
Jacobs, Friedrich, 1847.
Jahn, Otto, 1869.
Lange, Ludwig, 1885.
Marquardt, Carl Joachim, 1882.
Michelsen, Andreas Ludwig Jacob, 1881.
Nipperdey, Carl, 1875.
Noorden, Carl von, 1883.
Peschel, Oscar Ferdinand, 1875.
Preller, Ludwig, 1861.
Ritschl, Friedrich Wilhelm, 1876.

Digitized by Google

Schleicher, August, 1868.
Seidler, August, 1851.
Seyffarth, Gustav, 1885.
Stark, Carl Bernhard, 1879.
Stobbe, Johann Ernst Otto, 1887.
Tuch, Friedrich, 1867.
Ukert, Friedrich August, 1851.
Wachsmuth, Wilhelm, 1866.
Wächter, Carl Georg von, 1880.
Westermann, Anton, 1869.

Mathematisch-physische Classe.

d'Arrest, Heinrich, 1875.
Baltzer, Heinrich Richard, 1887.
Bezold, Ludwig Albert Wilhelm von, 1868.
Bruhns, Carl, 1881.
Carus, Carl Gustav, 1869.
Cohnheim, Julius, 1884.
Döbereiner, Johann Wolfgang, 1849.
Erdmann, Otto Linné, 1869.
Fechner, Gustav Theodor, 1887.
Funke, Otto, 1879.
Hansen, Peter Andreas, 1874.
Harnack, Axel, 1888.
Hofmeister, Wilhelm, 1877.
Huschke, Emil, 1858.
Kolbe, Hermann, 1884.
Kunze, Gustav, 1851.
Lehmann, Carl Gotthelf, 1863.
Lindenau, Bernhard August von, 1854.
Marchand, Richard Felix, 1850.
Mettenius, Georg, 1866.
Möbius, August Ferdinand, 1868.
Naumann, Carl Friedrich, 1873.
Pöppig, Eduard, 1868.
Reich, Ferdinand, 1882.
Scheerer, Theodor, 1875.
Schleiden, Matthias Jacob, 1881.
Schweigrichen, Christian Friedrich, 1853.
Seebeck, Ludwig Friedrich Wilhelm August, 1849.
Stein, Samuel Friedrich Nathanael von, 1885.
Volkmann, Alfred Wilhelm, 1877.
Weber, Eduard Friedrich, 1871.
Weber, Ernst Heinrich, 1878.
Zöllner, Johann Carl Friedrich, 1882.

Leipzig, am 31. December 1890.

Digitized by Google

Verzeichniss

der bei der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften im Jahre 1890 eingegangenen Schriften.

---

1. Von gelehrten Gesellschaften, Universitäten und öffentlichen Behörden herausgegebene und periodische Schriften.

Deutschland.

Abhandlungen der Kgl. Akademie d. Wissensch. zu Berlin. Aus d. J. 1889. Berlin 1890.

Sitzungsberichte der Königl. Preuss. Akad. d. Wissensch. zu Berlin. 1889, No. 39—53. 1890, No. 1—40. Berlin 1889. 90.

Politische Correspondenz Friedrichs d. Gr. Bd. 18, I. Hälfte. Berlin 1890.

Fünfzigstes Programm zum Winckelmannsfeste der Archäologischen Gesellschaft. Berlin 1890.

Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. XXII, No. 17. 18. Jahrg. XXIII, No. 1—17. Berlin 1889. 90.

Die Fortschritte der Physik im J. 1883. Dargestellt von der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 39, Abth. 1—3. Berlin 1889. 90.

Verhandlungen der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin im Jahre 1889 (Jahrg. 8). Berlin 1890.

Centralblatt für Physiologie. Unter Mitwirkung der Physiologischen Gesellschaft zu Berlin herausgegeben. Jahrg. 1889, No. 20—26. Bd. 4 (Jahrg. 1890), No. 1—19. Berlin d. J.

Verhandlungen der Physiologischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 15 (1889/90), No. 2—18. Berlin 1890.

Jacobsthal, E., Rückblicke auf die baukünstlerischen Principien Schinkels und Böttichers. Rede in der Aula der Königl. Technischen Hochschule zu Berlin am 26. Januar 1890 gehalten. Berlin 1890.

Jahrbuch der Kgl. Preuss. geologischen Landesanstalt und Bergakademie zu Berlin f. d. J. 1888. Berlin 1889.

Abhandlungen zur geolog. Specialkarte von Preussen und den Thüringischen Staaten. Bd. X, H. 2. Berlin 1890. — Abhandlungen der Königl. Preuss. geologischen Landesanstalt. N. F. Heft 1. Berlin 1889.

Jahrbücher des Vereins von Alterthumsfreunden im Rheinlande. H. 88. 89. Bonn 1889. 90.

Digitized by Google

Siebenundsechzigster Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. Enthält den Generalbericht über die Arbeiten und Veränderungen der Gesellschaft im J. 1889. Breslau 1890.

Jahrbuch des Königl. Sächs. meteorologischen Institutes. Jahrg. 6 (1888), I. Hälfte (= Abth. 1, 2). II. Hälfte (= Abth. 3). Chemnitz 1889. 90. — Vorläufige Mittheilung aus den Jahrbüchern des Königl. Sächs. meteorologischen Institutes, 1 (enth. Jahrbuch 1888, Abth. 3). 2 (enth. Jahrbuch 1888, Anhang 4). Chemnitz 1890.

Decaden- u. Monatsresultate aus den meteorolog. Beobachtungen an elf Stationen II. Ordnung in Sachsen. 1889, Dec.; 1890, Jan.—August.

Schriften der naturforschenden Gesellschaft in Danzig. N. F. Bd. 7, H. 3. Danzig 1890.

Conwentz, H., Monographie der baltischen Bernsteinbäume. Mit Unterst. des Westpreuss. Prov.-Landtages hsg. v. d. Naturforschenden Gesellschaft zu Danzig. Danzig 1890.

Zeitschrift des k. sächsischen statistischen Bureaus. Redig. v. V. Böhmert. Jahrg. 35 (1889), H. 3. 4. Dresden 1890.

Katalog der Bibliothek des Kgl. Sächs. statistischen Bureaus. Dresden. 1890.

Jahresbericht der Gesellschaft für Natur- u. Heilkunde in Dresden. Sitzungsperiode 1889—90. Dresden 1890.

Sitzungsberichte und Abhandlungen der naturwissenschaftl. Gesellschaft Isis in Dresden. Jahrg. 1889, Juli—December. Dresden 1890.

Verzeichniss der Vorlesungen und Übungen an der Kgl. Sächs. Technischen Hochschule f. d. Sommersem. 1890. Für d. Wintersem. 1890/91. — Bericht über das Kgl. Polytechnikum Dresden für das Studienjahr 1888/89 und das Wintersemester 1889/90. — Statut der Kgl. Sächs. Technischen Hochschule. Dresden 1890.

Mittheilungen aus dem Kgl. mineralog.-geol. u. prähistor. Museum in Dresden. H. 9 (*Geinitz, H. B.*, Über einige Lycopodiaceen aus d. Steinkohlenformation. *Geinitz, H. B.*, Die Graptolithen des Kgl. mineralog. Museums in Dresden). Cassel 1890.

Mitteilungen der Pollichia, eines naturwissenschaftl. Vereins der Rheinpfalz. No. 1. 2 (1888 = Jahresbericht 47). 3. 4 (1889. 90 = Jahresbericht 48). Dürkheim d. J.

Mittheilungen des Vereins f. d. Geschichte u. Alterthumskunde von Erfurt. Heft 14. Erfurt 1890.

Sitzungsberichte der physikal.-medicinischen Societät in Erlangen. Heft 21 (1889). 22 (1890). München 1890.

Jahresbericht des Physikalischen Vereins zu Frankfurt a./M. f. das Rechnungsjahr 1887/88. 1888/89. Frankfurt 1889. 90.

Jahrbuch für d. Berg- und Hüttenwesen im Königreich Sachsen auf d. Jahr 1890. Freiberg 1890.

Siebenundzwanzigster Bericht der Oberhessischen Gesellschaft f. Natur- u. Heilkunde. Giessen 1890.

Verzeichniss d. Vorlesungen auf der Grossherz. Hessischen Ludwigs-Universität zu Giessen, Sommer 1890, Winter 1890/91; Personalbestand W. 1889/90, S. 1890. *Bennecke, H.*, Bemerkungen zur Kriminalstatistik d. Grossherzogthums Hessen, bes. z. Statistik des Bettels u. d. Landstreicherei (Akad. Festschrift). Giessen 1889. 24 Dissertationen vom J. 1889/90.

Neues Lausitzisches Magazin. Im Auftrag d. Oberlausitz. Gesellsch. d. Wissensch. herausgeg. von R. Jecht. Bd. 65, H. 2. Bd. 66, H. 1. Görlitz 1889. 90.

Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität aus d. J. 1889. Göttingen 1889.

Leopoldina. Amtl. Organ d. kais. Leopoldinisch-Carolinisch deutschen Akad. der Naturforscher. H. XXV, No. 23. 24. H. XXVI, No. 1—22. Halle 1890.

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Originalabhandlungen u. Berichte. Hrsg. vom Naturwiss. Verein f. Sachsen und Thüringen in Halle. 4. Folge Bd. 8, 1889 (d. ganzen Reihe 62. Bd.), H. 3—6. 5. Folge Bd. 1, 1890 (d. ganzen Reihe 63. Bd.), H. 1—5. Halle 1889. 90.

Festschrift herausgeg. von der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg anlässlich ihres 200jährigen Jubelfestes 1890. T. II (zugleich Bd. II der »Mittheilungen«). Leipzig 1890.

38. und 39. Jahresbericht der Naturhistorischen Gesellschaft zu Hannover f. d. Geschäftsjahre 1887/88 u. 1888/89. Hannover 1890.

Chronik der Universität zu Kiel f. d. J. 1889/90; Verzeichniss d. Vorles. Winter 1889/90, Sommer 1890. *Forster, R.*, Quaestiones physiognomicae (Progr.). Kiliae 1890. *Förster, R.*, Die Kunst in Schleswig-Holstein (Rede). Kiel 1890. *Karsten, G.*, Die internationale General-Konferenz f. Maass u. Gewicht in Paris 1889 (Rede). Kiel 1890. — 75 Dissertationen vom J. 1889/90.

Ergebnisse der Beobachtungsstationen an den deutschen Küsten über die physikalischen Eigenschaften der Ostsee u. Nordsee u. die Fischerei. Jahrg. 1888, H. 10—12. 1889, H. 1—9. Berlin 1890.

Publication der Kgl. Sternwarte in Kiel, hsg. v. *A. Krüger*. IV (Anh. z. d. Zonenbeobachtungen der Sterne zw. 55. u. 65. Grad nördl. Declination angestellt an d. Sternwarten z. Helsingfors u. Gotha. No. 1. 2). V (*Kloock, H.*, Tafel f. das dritte Glied der Praecession). Kiel 1890.

Schriften der physikal.-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg. Jahrg. 30 (1889). Königsberg 1890.

Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft. Jahrg. 25, H. 1. 2. Leipzig 1890.

Catalog der Astronomischen Gesellschaft. Abth. I. Catalog d. Sterne bis zur 9. Grösse zwischen 80° nördl. u. 2° südl. Declin. f. d. Aequinoctium 1875. Stück 4: Zone +55° bis +65°, beobachtet auf d. Sternwarten Helsingfors u. Gotha. Stück 14: Zone +1° bis +5°, beobachtet auf der Sternwarte Albany. Leipzig 1890.

Zeitschrift des Vereins für Lübeckische Geschichte und Alterthumskunde. Bd. 6, H. 1. Lübeck, 1890.

Jahresbericht und Abhandlungen des Naturwissenschaftlichen Vereins zu Magdeburg. 1888. 1889. Magdeburg 1889. 90.

Jahresbericht der Fürsten- u. Landesschule Meissen vom Juli 1889—Juli 1890. Meissen 1890.

Abhandlungen der histor. Classe d. k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 19 (in d. Reihe d. Denkschr. d. 62. Bd.), Abth. 1. 2. München 1889. 90.

Abhandlungen der mathem.-physikal. Cl. d. k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 17 (in d. Reihe d. Denkschr. d. 63. Bd.), Abth. 1. München 1889.

Abhandlungen d. philos.-philolog. Cl. d. k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 18 (in d. Reihe d. Denkschr. d. 61. Bd.), Abth. 3. München 1890.

Digitized by Google

Almanach der Kgl. bayer. Akademie der Wissenschaften f. d. Jahr 1890. München d. J.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. Jahrg. 1889, H. 3. Jahrg. 1890, H. 1—3. München 1890.

Sitzungsberichte der philos.-philol. u. histor. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. 1889, Bd. 2, H. 2. 1890, Bd. 1, H. 1—3. Bd. 2, H. 1. 2. München 1890.

Einunddreissigste Plenarversammlung der histor. Commission bei der kgl. bayer. Akad. d. Wissensch. Bericht des Secretariats. München 1890.

Sitzungsberichte der Gesellschaft f. Morphologie u. Physiologie in München. Bd. 5 (1889), H. 2. 3. Bd. 6 (1890), H. 1. 2. München 1889. 90.

Neue Annalen der kgl. Sternwarte in Bogenhausen b. München. Bd. 1. München 1890.

Jahresbericht d. Naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg. 1889 (Nebst Abhandl. Bd. 8, Bog. 8—13). Nürnberg 1890.

Anzeiger des Germanischen Nationalmuseums. Bd. 2, H. 3 (Jahrg. 1889). — Mittheilungen aus dem Germanischen Museum. Bd. 2, H. 3 (Jahrg. 1889). — Katalog der im Germanischen Museum vorhandenen interessanten Bucheinbände u. Teile von solchen. Nürnberg 1889.

Mittheilungen des Alterthumsvereins zu Plauen i/V. Sechste Jahresschrift auf die J. 1886—87. Siebente Jahresschrift auf die J. 1888—89. Plauen 1887. 89.

Württembergische Vierteljahrshefte für Landesgeschichte. Hsg. v. d. Kgl. Statist. Landesamt. Jahrg. 12 (1889), H. 2—4. Jahrg. 13 (1890), H. 1. 2. Stuttgart 1889. 90.

Urkunden z. Geschichte d. Pfarrkirche in Ulm, aus Anlass des Münsterfestes im Auftr. d. Vereins f. Kunst u. Alterthum in Ulm u. Oberschwaben in Auszügen mitgetheilt v. *H. Bazing* u. *G. Veesenmeyer*. Ulm 1890.

Sitzungsberichte der physikal.-medicin. Gesellschaft in Würzburg. Jahrg. 1889. Jahrg. 1890, No. 1—7. Würzburg 1889. 90.

Verhandlungen der physikal.-medicin. Gesellschaft in Würzburg. N. F. Bd. 23. 24, No. 1—5. Würzburg 1890.

Oesterreich-Ungarn.

Ljetopis Jugoslavenske Akademije znanosti i umjetnosti (Agram). Za godina 1889. (Četvrti svezak). U Zagrebu 1889.

Monumenta spectantia historiam Slavorum meridionalium. Vol. 20 (Acta historiam Confinii militaris Croatici illustrantia, T. 3). Zagrabiae 1889.

Rad Jugoslavenska Akademije znanosti i umjetnosti. Knjiga 98—101. U Zagrebu 1889. 90.

Starine, na sviet izdaje Jugoslavenska Akademija znanosti i umjetnosti. Knjiga 22. U Zagrebu 1890.

Viestnik Hrvatskoga arkeologičkoga Družtva. Godina XII, Br. 1—4. U Zagrebu 1890.

Ljubić, S., Popis arkeologičkoga odjela nar. zem. Muzeja u Zagrebu. Odsjek I, svezak 1. Odsjek II, sv. 1. U Zagrebu 1889. 90.

Magyar tudom. Akadémiai Almanach, 1890-re. Budapest 1890.

Archivum Rákóczianum. II. Rákóczi Ferencz levéltára. Osztály I. 10. Budapest 1889.

Mathematische u. naturwiss. Berichte aus Ungarn. Mit Unterstützung der Ungar. Akad. d. Wissensch. herausgeg. Bd. 7. Budapest 1890.

A Magyar tudom. Akadémia Emlékbeszédek. Köt. 5, Sz. 9. 10. Kötet 6, Sz. 1—7. Budapest 1889. 90.

Értekezések a mathematikai tudományok köréből. Kiadja a Magyar tudom. Akadémia. Kötet 14, Sz. 2. 3. Budapest 1889.

Értekezések a nyelv- és széptudomanyok köréből. Kiadja a Magyar tudom. Akadémia. Köt. 14, Sz. 11. 12. Kötet 15, Sz. 1—5. Budapest 1889. 90.

Értekezések a természettudományok köréből. Köt. 18, Sz. 6. 7. Köt. 19, Sz. 1—6. Budapest 1888—90.

Archaeologiai Értesitő. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Uj Folyam, Köt. 9, 3—5. 10, 1. 2. Budapest 1889. 90.

Mathematikai és természettudományi Értesitő. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 7, 4—9. 8, 1—5. Budapest 1889. 90.

A Magyar tudom. Akadémia Értesitője. Évfoly. 23 (1889), Sz. 2—5. Akademiai Értesitő. 1890, No. 1—5. Budapest 1889. 90.

A Magyar tudom. Akadémia Évkönyvei. Köt. 17, D. 7. Budapest 1889.

Mathematikai és természettudományi Közlemények. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 23, Sz. 4. Budapest 1889.

Nyelvtudományi Közlemények. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 21, 3—6. Budapest 1889. 90.

Monumenta Hungariae historica. Sectio III. Monumenta comitialia regni Transsylvaniae. T. 14. Budapest 1889. Monumenta comitialia regni Hungariae. T. 10. Budapest 1890.

Monumenta Hungariae jurid.-historica. Corpus statutorum Hungariae municipalium. T. II, P. 1. Budapestini 1890.

Ungarische Revue. Mit Unterst. d. Ungar. Akad. d. Wiss. herausgeg. 1889 (Jahrg. 9), H. 4—10. 1890, H. 1—4. Budapest 1889. 90.

A Magyar tud. Akadémia kiadásában megjelent munkák és folyóiratok betürendes czim- és tartalomjegyzéke. 1830—1889. Budapest 1890.

Abel, J., Magyarországi tanulók külföldön. I. Budapest 1890.

Ballagi, A., Colbert. Rész II. Budapest 1887. 90.

Csánki, D., Magyarország történelmi földrajza a Hunyadiak korában (Hunyadiak kora Magyarországon, VI.). Budapest 1890.

Demkó, K., A felsö-magyarországi városok életéről a XV—XVII században. Budapest 1890.

Kovács, F., Index alphab. Codicis diplomatici Arpadiani continuati per Gust. Wenzel editi. Jubente commissione histor. Academiae scient. Hung. concinn. Budapestini 1889.

Kúnos, J., Oszman-török népköltési gyüjtemény. Kötet 2. Budapest 1889.

Óváry, L., A Magyar tud. Akadémia történelmi bizottságának oklevél-másolatai. Füzet 1. Budapest 1890.

Simonyi, Zsigm., A Magyar határozók. Kötet I, felo 2. Budapest 1890.

Gömöri Havas, S., Budapest régiségei. I. Budapest 1890.

Verzeichnis d. öffentl. Vorlesungen an der k. k. Franz-Josefs-Universität zu Czernowitz im Sommer-Sem. 1890, Winter-Sem. 1890/91. — Uebersicht der akad. Behörden im Studienjahr 1890/91.

Zeitschrift des Ferdinandeums f. Tirol u. Vorarlberg. III. Folge, Heft 33. Innsbruck 1889.

Digitized by Google

Berichte des naturwiss.-medizin. Vereines in Innsbruck. Jahrg. 18 (1888/89). Innsbruck 1889.

Anzeiger der Akademie d. Wissenschaften in Krakau. Jahrg. 1889, No. 10. 1890, No. 1—9. Krakau 1890.

Acta historica res gestas Poloniae illustrantia (Editiones collegii historici Acad. litt. Cracov.). T. I. II, 1. 2. III—VII. VIII, 1. 2. IX, 1. 2. X—XII. Cracoviae 1878—90.

Archiwum do dziejów literatury i oświaty w Polsce (Wydawnictwo Akad. w Krakowie). T. 1—6. W Krakowie 1878—90.

Atlas geologiczny Galicyi. Zeszyt 1. 2. Atlas i Tekst. Kraków 1887. 88.

Biblijoteka pisarzów polskich (Wydanictwa Akad. umiej. w Krakowie). I—X. W Krakowie 1889—90.

Monumenta medii aevi historica res gestas Poloniae illustrantia. T. I—XI. Cracoviae 1874—88.

Pamiętnik Akademii umiejętności w Krakowie. Wydział filolog. i hist.-filozof. T. 2—8. Kraków 1875—90. — Wydział matemat.-przyrodn. T. 2—17. Kraków 1876—90.

Pamiętnik piętnastoletniej działalności Akademii umiej. w Krakowie, 1873—1888. Kraków 1889.

Starodawne prawa polskiego Pomniki. T. II—VI. VII, 1—3. VIII, 1. 2. IX. X, 1. W Krakowie 1870—89.

Rocznik zarządu Akademii umiej. w Krakowie. Rok 1874—89. W Krakowie 1875—90.

Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń Wydziału filologicznego Akademii umiejetności. T. 2—13. W Krakowie 1875—89. — Wydz. histor.-filozof., T. 3—13. 15—24. W Krakowie 1875—89. — Wydz. matemat.-przyrodn., T. 1—20. W Krakowie 1874—90.

Scriptores rerum Polonicarum. Ed. colleg. hist. Academiae litt. Cracov. T. I—VII. IX—XIV. Kraków 1872—89.

Sprawozdania komisyi do badania historyi sztuki w Polsce. T. I—III. IV, 1—3. W Krakowie 1877—89.

Sprawozdania komisyi fizyograficznéj. T. 6—24. Kraków 1872—89.

Sprawozdania komisyi językowéj Akademii umiej. T. 1—3. W Krakowie 1880—84.

Volumina legum (Wydanictwo komisyi prawn. Akademii umiej.). T. IX. Kraków 1889.

Zabytki przedhistoryczne ziem polskich, wydaw. staraniem komisyi archeolog. Akademii umiej. Ser. I: Prusy królewskie. Badał *G. Ossowski*. Zeszyt 1—4. Kraków 1879—88.

Zbiór wiadomości do antropologii krajowej, wydaw. staraniem komisyi antropolog. Akademii umiej. T. II—VIII. IX i Dodatek. X—XIV. Kraków 1878—90.

Cricius, Andr., Carmina. Edid. Cas. Morawski (Corpus antiquiss. poet. Poloniae lat. Vol. 3). Cracoviae 1888.

Franke, Jan. Nep., Jan Brożek (J. Broscius), akademik Krakowski, 1585—1652. W Krakowie 1884.

Kowalczyk, J., O sposobach wyznaczenia biegu ciał niebieskich. Kraków 1889.

Morawski, Kaz., Andrzéj Patrycy Nidecki, jego życie i dzieła. Część 1. W Krakowie 1884.

Ossowski, G., Grand kourhan de Ryżanówka, d'après les recherches faites en 1884 et 1887. Cracovie 1888.

Pauli Crosnensis atque *Joannis Visliciensis* Carmina. Edid. Br. Kruczkiewicz (Corpus antiquiss. poet. Polon. lat. Vol. 2). Cracoviae 1887.

Taczanowski, W., Ptaki krajowe. Wydanie Akad. umiej. T. 1. 2. W Krakowie 1882.

Mittheilungen des Musealvereines für Krain. Jahrg. 3. Laibach 1890.

Abhandlungen der math.-naturwiss. Classe der k. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. VII. Folge. Bd. 3. Prag 1890.

Abhandlungen der Classe f. Philos., Geschichte u. Philologie der k. böhm. Gesellschaft d. Wissenschaften. VII. Folge. Bd. 3. Prag 1890.

Codex juris Bohemici. T. II, P. 3. Impensis R. Soc. scient. Bohem. edid. *H. Jireček*. Pragae 1889.

Jahresbericht der k. böhm. Gesellschaft d. Wissenschaften für das Jahr 1889. Prag 1890.

Löwe, Joh. Hnr., Die speculative Idee der Freiheit, ihre Widersacher, ihre practische Verwertung. Hsg. v. d. K. Böhm. Ges. d. Wiss. Prag 1890.

Regesta diplomatica nec non epistolaria Bohemiae et Moraviae. P. III (1311—33). Opera *J. Emler*. Vol. 6. Pragae 1890.

Sitzungsberichte der k. böhm. Gesellschaft d. Wissenschaften. Math.-naturw. Classe. Jahrg. 1889, II. 1890, I. Prag 1890. — Philos.-histor. philolog. Classe. Jahrg. 1889. Prag 1890.

Spisův poctěných jubilejní cenou Král. Česk. Společnosti nauk v Praze. Číslo 3—5. V Praze 1890.

Jahresbericht der Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag. Vereinsjahr 1889. Prag 1890.

Magnetische und meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag im J. 1889. Jahrg. 50. Prag 1890. — Appendix zu Jahrg. 46—48, enth. Originalzeichnungen des Mondes. Hsg. v. *L. Weinek*. Prag 1890.

Personalstand der k. k. Deutschen Carl-Ferdinands-Universität in Prag zu Anfang d. Studienjahres 1890/91. — Ordnung d. Vorlesungen im Sommersem. 1890, Wintersem. 1890/91.

Bulletino di archeologia e storia dalmata. Anno 12 (1889), No. 12. Anno 13 (1890), No. 1—11. Spalato 1889. 90.

Atti del Museo civico di storia naturale di Trieste. Vol. 8 (N. Ser. Vol. 2). Trieste 1890.

Anzeiger der Kaiserl. Akad. d. Wissenschaften in Wien. Math.-phys. Cl. Jahrg. 1889, No. 25—27. Jahrg. 1890, No. 1—24.

Mittheilungen der k. u. k. geographischen Gesellschaft in Wien. 1889. Bd. 32 (N. F. Bd. 22). Wien 1889.

Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. 1889, (Bd. 39), III. u. IV. Quartal. Wien 1889.

Astronomische Arbeiten des k. k. Gradmessungs-Bureau. Bd. II. Längenbestimmungen (Publicationen f. d. internationale Erdmessung). Wien 1890.

Annalen des k. k. naturhistorischen Hofmuseums. Bd. 4, No. 4. Bd. 5, No. 1—3. Wien 1890.

Abhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Bd. 13, H. 1. Bd. 15, H. 1. 2. Wien 1889. 90.

Digitized by Google

Jahrbuch d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1889 (Bd. 39), H. 3. 4. Jahrg. 1890 (Bd. 40), H. 1. 2. Wien 1889. 90.

Verhandlungen d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1889, No. 13—18. Jahrg. 1890, No. 1—13.

Mittheilungen der Section f. Naturkunde des Oesterreichischen Touristen-Club. Jahrg. 1. Wien 1889.

Belgien.

Annales de la Société Entomologique de Belgique. T. 32. 33. Bruxelles 1888—89.

Annales de la Société R. Malacologique de Belgique. T. 11 (II. Sér. T. 1) —14. 15, Fasc. 1. T. 16—21 (IV. Sér. T. 1). 22. 23. Bruxelles 1876 —1888. — Procès-verbaux T. 17 (1888), S. 73—124. T. 18 (1889), S. 1—132.

Dänemark.

Oversigt over det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger i aaret 1889, No. 2. 3. 1890, No. 1. 2. Kjøbenhavn d. J.

Det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter. Histor. og philos. Afd. 6. Række. Bd. 1, No. 1. Bd. 2, No. 6. Bd. 3, No. 1. Kjøbenhavn 1889. 90.

Det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter. Naturvid. og mathe-mat. Afd. 6. Række. Bd. 5, No. 1—3. Bd. 6, No. 1. Bd. 7, No. 1. 2. Kjøbenhavn 1889. 90.

Aktstykker og Oplysinger til Rigsraadets og Stændermødernes Historie i Kristian IV's tid. Udg. ved *Kr. Erslev*. Bd. 1—3. Kjøbenhavn 1883 —90.

Libri memoriales Capituli Lundensis. Paa ny udgivne ved *C. Weeke*. Hefte 2. Kjöbenhavn 1889.

England.

Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 7, P. 1. 2. Cambridge 1890.

Proceedings of the R. Irish Academy. Ser. III. Vol. 1, Nr. 2. 3. Dublin 1889. 90.

The Transactions of the R. Irish Academy. Vol. 29, P. 12. 13. Dublin 1889. 90.

The scientific Proceedings of the R. Dublin Society. Vol. 6, P. 7—9. Dublin 1889. 90.

Proceedings of the R. Society of Edinburgh. Vol. 15. 16. 17, No. 1—5. Edinburgh 1889. 90.

Transactions of the R. Society of Edinburgh. Vol. 33, P. 3. Vol. 35. P. 1—4. Edinburgh 1888—90.

Proceedings of the R. Physical Society. Vol. 10, P. 1 (Session 1888/89). Edinburgh 1889.

Proceedings and Transactions of the Liverpool Biological Society. Vol. 4 (Session 1889/90). Liverpool 1890.

Proceedings of the R. Institution of Great Britain. Vol. 12, P. 3 (No. 83). London 1889.

Royal Institution of Great Britain. List of the members 1889. London, July 1889.

Digitized by Google

Catalogue of Oriental coins in the British Museum. Vol. 9 (Additions to the Oriental collection 1876—1888. P. I: Additions to Vol. 1—4). London 1889.

Proceedings of the R. Society of London. Vol. XLVI, No. 284. 5. Vol. XLVII, No. 286—291. Vol. XLVIII, No. 292—294. London 1889. 90.

Philosophical Transactions of the R. Society of London. For the year 1889. Vol. 180, A. B. London 1890. — The R. Society (List of the members) 30th Nov. 1889.

Memoirs of the R. Astronomical Society. Vol. 49, P. 2. London 1890.

Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. 20, No. 359—369. Vol. 21, No. 370—390. London 1889. 90.

Journal of the R. Microscopical Society, containing its Transactions and Proceedings. Ser. II. 1889, P. 6a. 1890, P. 1—6. London 1890.

Report on the scientific results of the exploring voyage of H. M. S. Challenger, 1873—76. Physics and chemistry, Vol. 2. London 1889.

Memoirs and Proceedings of the Literary and Philosophical Society of Manchester. IV. Ser. Vol. 3. Manchester 1890.

Frankreich.

Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. III. Série. T. 4 et Append. (*Rayet*, Observations pluviométriques, Juin 1887—Mai 1888). T. 5 Cahier 1 et Append. (*Rayet*, Observations pluviométriques, Juin 1888—Mai 1889). Paris 1888. 89.

Travaux et Mémoires des facultés de Lille. T. 1, No. 1—3. Lille 1889.

Bulletin des séances de la Société des sciences de Nancy. Année 2 (1890), No. 3—5.

Journal de l'École polytechnique, publ. p. le Conseil d'instruction de cet établissement. Cah. 59. Paris 1889.

L'Institut de France. Lois, statuts et règlements concernant les anciennes Académies et l'Institut de 1635 à 1889. Tableau des fondations. Collection publ. p. *L'Aucoc*. Paris 1889.

Bulletin de la Société mathématique de France. T. 17, No. 6. T. 18, No. 1—4. Paris 1889. 90.

Congrès international de bibliographie des sciences mathématiques, tenu à Paris 1889. Procès verbal sommaire. Paris 1889.

Griechenland.

Mittheilungen des Kaiserl. Deutschen Archäologischen Instituts, Athenische Abtheilung. Bd. 15, H. 1—3. Athen 1890.

Furtwängler, A., u. *G. Löschke*, Mykenische Thongefässe. Im Auftrag des Kaiserl. Deutschen Archäol. Instituts in Athen herausgeg. Berlin 1879.

Furtwängler, A., u. *G. Löschke*, Mykenische Vasen. Im Auftrag des Kaiserl. Deutschen Archäol. Instituts in Athen herausgeg. M. einem Atlas. Berlin 1886.

Holland.

Jaarboek van de Kon. Akad. v. Wetensch. gevestigd te Amsterdam, voor 1889.

Verhandelingen d. Kon. Akad. v. Wetenschappen. Afdeel. Natuurkunde. Deel XXVII. Amsterdam 1890.

Digitized by Google

Verslagen en Mededeelingen der Kon. Akad. v. Wetensch. Afdeel. Letterkunde. III. Reeks, Deel 6. — Afdeel. Natuurkunde. III. Reeks, Deel 6. 7. Amsterdam 1889. 90.

Oppenraaij, Rud., Carmen elegiacum Amor in certamine Hoeufftiano praemio aureo ornatum. Amstelod. 1890.

Programma certaminis poetici ab Acad. R. disciplinarum Nederlandica ex legato Hoeufftiano in annum 1891 indicti. Amstelod. 1890.

Annales de l'École Polytechnique de Delft. T. 5, Livr. 3. 4. T. 6, Livr. 1. Leide 1890.

Verhandelingen rakende den natuurlijken en geopenbaarden Godsdienst, uitgeg. door Teylers Godgeleerd Genootschap. N. Ser. Deel 12. Haarlem 1890.

Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem. T. 24, Livr. 1—3. Harlem 1890.

Archives du Musée Teyler. Sér. II. Vol. 3, P. 4. Harlem 1890.

Fondation Teyler. Catalogue de la bibliothèque, dressé p. *C. Ekama*. Vol. II, Livr. 1—3. Harlem 1889. 90.

Handelingen en Mededeelingen van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden over het jaar 1888/89. Leiden 1889.

Levensberigten der afgestorvene medeleden van de Maatschappij der Nederl. Letterkunde te Leiden. Bijlage tot de Handelingen van 1889. Leiden 1889.

Tijdschrift voor Nederlandsche taal- en letterkunde, uitgeg. vanwege de Maatsch. der Nederl. Letterkunde. Jaarg. 9 (N. R. 1), Afl. 1—4. Leiden 1890.

Annalen der Sternwarte in Leiden, hsg. v. H. G. van de Sande Bakhuyzen. Bd. 5. 6. Haag 1890.

Verslag van den staat der Sterrenwacht te Leiden, door H. G. van de Sande Bakhuyzen. 1886—88; 1888—1889. Leiden 1888. 89.

Aanteekeningen van het verhandelde in de sectië-vergaderingen van het Provinciaal Utrechtsch Genootschap van kunsten en wetensch., ter gelegenheid van de algem. vergad. gehouden d. 25. Juni 1889. Utrecht 1889.

Questions mises au concours par la Société des arts et des sciences établie à Utrecht, 1890.

Verslag van het verhandelde in de algem. vergad. van het Provinciaal Utrechtsch Genootschap van kunsten en wetensch., gehouden d. 25. Juni 1889. Utrecht 1889.

Bemmelen, J. F. van, De erfelijkheid van verworven eigenschappen. Uitgeg. d. het Prov. Utrechtsch Genootsch. v. kunsten en wetensch. 's Gravenhage 1890.

Vervolg benevens wijzigingen en toevoegsels op den Catalogus d. archaeol. verzameling van het Prov. Utrechtsch Genootsch. v. kunsten en wetensch. Utrecht 1890.

Bijdragen en Mededeelingen van het Historisch Genootschap gevestigd te Utrecht. Deel 12. Utrecht 1889.

Werken van het Historisch Genootschap gevestigd te Utrecht. N. Ser. 55. 56. Utrecht 1890.

Onderzoekingen gedaan in het Physiol. Laboratorium d. Utrechtsche Hoogeschool. IV. Reeks. I, 1. Utrecht 1890.

Italien.

Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. No. 96 (1889) e Indici foglio 1—9. No. 97 (1890) —119. Firenze 1889. 90.

Bollettino delle opere moderne straniere acquistate dalle biblioteche pubbliche governative del regno d'Italia. Vol. 4, No. 4—6. Vol. 5, No. 1—3. Roma 1889. 90.

Galilei, Galileo, Opere. Edizione nazionale sotto gli auspicii di S. M. il Rè d'Italia. Vol. I. Firenze 1890.

Bollettino della Società italiana dei Microscopisti. Vol. 1, Fasc. 3. Acireale 1890.

Pubblicazioni del R. Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze. Sezione di filosofia e filologia: *Donati, G.,* Maestri e scolari nell' India brahmanica. Firenze 1888. — Sezione di medicina e chirurgia e scuola di farmacia: Archivio della scuola d'anatomia patologica. Vol. 3. 4. Firenze 1885. 86. — Sezione di scienze fisiche e naturali: *Fano, G.,* Saggio sperimentale sul meccanismo dei movimenti volontari nella testuggine palustre. Firenze 1884. *Magrini, Fr.,* Osservazioni continue della elettricità atmosferica fatte a Firenze 1883—1886. Firenze 1888. *Pasqualini, L.,* ed *A. Roiti,* Osservazioni continue della elettricità atmosf. fatte a Firenze nel 1884. Seconda memoria. Firenze 1885.

Atti della Fondazione scientifica Cagnola dalla sua instituzione in poi. Vol. 8 (1882—88). 9 (1889). Milano 1888. 90.

Memorie del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Classe di lettere e scienze morali e polit. Vol. 17 (Ser. III, Vol. 8), Fasc. 2. Vol. 18 (Ser. III, Vol. 9), Fasc. 2. Milano 1890.

R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Ser. II, Vol. 21. 22. Milano 1888. 89.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. T. 3 (1889), Fasc. 6. T. 4 (1890), Fasc. 1—6. Palermo 1889—90. — Annuario 1890. Palermo d. J.

Atti e Rendiconti della Accademia medico-chirurgica di Perugia. Vol. 2, Fasc. 1—3. Perugia 1890.

Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa. Della Serie Vol. 12 (Scienze fis. e mat., Vol. 6). Pisa 1889.

Atti della Società Toscana di scienze naturali, residente in Pisa. Memorie Vol. 10. Pisa 1889.

Processi verbali della Società Toscana di scienze naturali residente in Pisa. Vol. 6, adunanza del 7. Luglio 1889. Vol. 7, adun. del 17. Nov. 1889, 19. Genn., 2. Marzo, 4. Maggio 1890.

Atti della R. Accademia de' Lincei. Serie IV. Memorie della Classe di scienze fisiche, matem. e naturali. Vol. 5. Roma 1888. — Rendiconti. Vol. 5, II. Sem., Fasc. 6—13. Vol. 6, I. Sem., Fasc. 1—12. II. Sem., Fasc. 1—9. Roma 1889. 1890.

Mittheilungen des Kais. Deutschen Archaeologischen Instituts. Römische Abtheilung (Bullettino dell' Imp. Istituto Archeologico Germanico. Sezione Romana). Bd. 4, H. 4. Bd. 5, H. 1. 2. Rom 1889. 90.

Atti della R. Accademia dei Fisiocritici di Siena. Ser. IV. Vol. 1, Fasc. 10. Vol. 2, Fasc. 1—8. Siena 1889. 90.

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. 25, Disp. 1—15. Torino 1889. 90.

Digitized by Google

Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino. Serie II. T. 40. Torino 1890.

Osservazioni meteorologiche fatte nell' anno 1888 all' Osservatorio della R. Università di Torino; nell' anno 1889. Torino 1890.

Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Ser. VI. T. 7, Disp. 3—10. Ser. VII. T. 1, Disp. 1—9. Venezia 1888—90.

Temi di premio proclamati dal R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti nella solenne adunanza del 25. maggio 1890.

Russland.

Meteorologische Beobachtungen angestellt in Dorpat. Bd. 5, S. 153—208 (Dorpat 1889. 90).

Schriften hsg. v. d. Naturforscher-Gesellschaft bei d. Univers. Dorpat. Bd. 5 (*Weihrauch, K.*, Fortsetzung der Neuen Untersuchungen über die Bessel'sche Formel und deren Verwendung in d. Meteorologie). Dorpat 1890.

Bidrag till kännedom af Finlands natur och folk, utg. af Finska Vetenskabs-Societeten. Häftet 48. Helsingfors 1889.

Öfversigt af Finska Vetenskabs-Societetens Förhandlingar. 31 (1888—89). Helsingfors 1889.

Fennia. Bulletins de la Société de géographie finlandaise. II. III. Helsingfors 1890.

Journal de la Société finno-ougrienne. Suomalais-ugrilaisen Seuran Aikakauskirja. T. 8. Helsingissä 1890.

Mémoires de la Société finno-ougrienne. I (*Wiklund, K. B.*, Lule-lappisches Wörterbuch). Helsingissä 1890.

Universitetskija Izvěstija. God 29 (1889), No. 11. 12. God 30 (1890), No. 1—10. Kiev 1889. 90.

Bulletin de la Société Impér. des Naturalistes de Moscou. Année 1889, No. 3. 4. 1890, No. 1. 2. Moscou 1890.

Meteorologische Beobachtungen, ausgeführt am Meteorol. Observatorium d. Landwirthschaftlichen Akademie zu Moskau. 1889, 1. Hälfte (Beilage z. Bulletin de la Soc. Imp. des Natural. de Moscou, II. Série, T. 3). Moskau 1890.

Bulletin de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg. Nouv. Série. T. 1. No. 3. 4. St.-Pétersbourg 1890.

Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg. VII. Série. T. 37, No. 2—13. T. 38, No. 1. St.-Pétersbourg 1889. 90.

Repertorium f. Meteorologie, hsg. v. d. Kais. Akad. d. Wiss., red. v. H. Wild. Bd. 12. 13. St.-Petersburg 1889. 90.

Annalen d. physikalischen Centralobservatoriums, herausg. von H. Wild. Jahrg. 1888, Th. 1. 2. 1889, Th. 1. St.-Petersburg 1889. 90.

Acta Horti Petropolitani. T. 11, Fasc. 1. Petropoli 1890.

Trudy S.-Peterburgskago Obščestva estestvoispytatelej. T. 19, Otdělenie botan. T. 20, Vyp. 5. T. 20, Otděl. geol. i mineral. T. 20, Otděl. botan. T. 20, Otděl. zool. i fiziol., Vyp. 1. T. 21, Otděl. zool. i fiziol., Vyp. 1. S.-Peterburg 1888—90.

Obozrěnie prepodavanija nauk v Imp. S.-Peterburgsk. Universitetě na vesennee polugodie 1889 goda; na ves. polug. 1890; na osennee i ves. polug. 1890/91 goda. S.-Peterburg 1888. 90.

Otčet o sostojanii Imp. S.-Peterburgsk. Universiteta za 1888 god; za 1889 god. S.-Peterburg 1889. 90.

Protokoly zasědanij sověta Imp. S.-Peterburgsk. Universiteta. No. 38—41. S.-Peterburg 1888—90.

Zapiski istoriko-philologičeskago Fakulteta Imp. S.-Peterburgsk. Universiteta. Čast 17. 18. 19, 1. 2. 22. 23. S.-Peterburg 1888—90.

Proloženie Svoda zakonov Rossijskoj Imperii. Po 31. dekabrja 1888 goda. S.-Peterburg 1889.

Ustav o obezpečenii narodnago prodovolstvija. T. 13. Izdanie 1889 goda. S.-Peterburg (1889).

Observations de Poulkova, publ. p. O. Struve. Vol. 8. St. Pétersbourg 1889.

Lindemann, Ed., Photometrische Bestimmung der Grössenclassen der Bonner Durchmusterung (Supplément II aux Observations de Poulkova). St.-Petersburg 1889.

Struve, O., Sammlung d. Beobachtungen von Sternbedeckungen während der totalen Mondfinsterniss 1888 Jan. 28. St. Petersburg 1889. — *Struve, O.*, Tabulae quantitatum Besselianarum pro annis 1890 ad 1894 computatae. Petropoli 1889.

Arbeiten des Naturforscher-Vereins zu Riga. N. F., II. 6. Riga 1889.

Correspondenzblatt des Naturforscher-Vereins zu Riga. Jahrg. 31, Nachtrag. 32. 33. Riga 1889. 90.

Meteorologische Beobachtungen des Tifliser Physikalischen Observatoriums in d. Jahren 1887—88. Hsg. v. J. Mielberg. Tiflis 1889.

Schweden und Norwegen.

Publication der Norwegischen Commission d. Europ. Gradmessung. Geodätische Arbeiten. H. 6. 7. Christiania 1888. 90.

Den Norske Nordhavs-Expedition 1876—1878. XIX. Zoologi. *Danielssen, D. C.*, Actinida. Christiania 1890.

Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania. Aar 1889. Christiania 1890.

Acta Universitatis Lundensis. Lunds Universitets Års-Skrift. T. 25 (1888/89), I—IV. Lund 1888. 89.

Kongl. Vitterhets Historie och Antiquitets Akademiens Månadsblad. Årg. 17 (1888), 18 (1889). Stockholm 1889. 90.

Antiquarisk Tidskrift för Sverige, utg. of Kongl. Vitterhets Hist. och Antiquitets Akademien genom B. E. Hildebrand. Delen 10, H. 3. Delen 11, H. 1. 2. Stockholm 1889. 90.

Entomologisk Tidskrift, på foranst. af Entomolog. Föreningen i Stockholm utg. af J. Spångberg. Årg. 10 (1889), H. 1—4. Stockholm 1889.

Nova Acta Reg. Societatis scient. Upsaliensis. Ser. III. Vol. 14, Fasc. 1. Upsaliae 1890.

Josephson, A., Catalogue méthodique des Acta et Nova Acta Reg. Societatis scient. Upsal. 1744—1889. Upsala (1890).

Bulletin mensuel de l'Observatoire météorologique de l'Universite d'Upsal. Vol. 21 (1889). Upsal 1889—90.

Schweiz.

Neue Denkschriften der Allgem. Schweizer. Gesellsch. f. d. gesammten Naturwissenschaften. Bd. 32, Abth. 1. Basel 1890.

Digitized by Google

Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft in Lugano 9.—11. Sept. 1889. 72. Jahresversammlung. Jahresbericht 1888/89. Lugano 1890.

Compte-rendu des travaux présentés à la 72. session de la Société Helv. des sciences naturelles réunie à Lugano 9—11. sept. 1889. Genève 1889.

Beiträge zur vaterländischen Geschichte. Hrsg. v. der Historischen und Antiquarischen Gesellschaft in Basel. N. F. Bd. 3 (der ganzen Reihe Bd. 13), H. 3. Basel 1890.

Basler Chroniken. Hsg. v. d. Histor. u. Antiquar. Gesellsch. zu Basel. Bd. 4, bearb. v. A. Bernoulli. Leipzig 1890.

Verhandlungen der naturforschenden Gesellschaft in Basel. Th. 8, H. 3. Th. 9, H. 1. Basel 1890.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern aus d. J. 1889 (No. 1215—1243). Bern 1890.

Jahresbericht der naturforschenden Gesellschaft Graubündens. N. F. Jahrg. 33 (Vereinsjahr 1888/89). Chur 1890.

Index lectionum quae in univers. Friburgensi per menses aest. anni 1890 habebuntur. Friburgi Helvet. 1890.

Mémoires de la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève. T. 30, P. 2. Genève 1889—90.

Vierteljahrsschrift d. naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Jahrg. 34, H. 3. 4. Jahrg. 35, H. 1. Zürich 1889. 90.

Serbien.

Srpska kralj. Akademija. Glas, 18—22. U Beograd 1889. 90.

Srpska kralj. Akademija. Godišnjak II: 1888. U Beograd 1889.

Srpska kralj. Akademija. Spomenik No. II—VI. U Beograd 1890.

Lazarević, L. K., On zna sve. *Matavul, S.*, Novo oružje. U Beograd 1890.

Spanien.

Real Academia de ciencias morales y políticas. Año de 1890. Madrid 1890.

Discursos de recepcion y de contestacion leidos ante la R. Academia de ciencias morales y políticas. T. 4. 1885—88. Madrid 1889.

R. Academia de ciencias mor. y polit. Discurso leido en sesión pública de 26. de Enero 1890 por *R. Fernández Villaverde*. Madrid 1890. — Discursos leidos en la recepcion pública de J. Sánchez de Toca; de A. Linares Rivas; de J. Salamero y Martínez. Madrid 1890.

Resúmen de las actas de la R. Academia de ciencias mor. y polit. leido en la sesión públ. de 26 de Enero 1890 por *J. García Barzanallana*. Madrid 1890.

Toreno, Conde de, y *Vizconde de Campo Grande*, Necrología de S. Ruiz Gomez. *Barzanallana, J. G.*, Necrología de F. Calderon y Collantes, marqués de Reinosa. — *Jove y Heria, Pl. de*, Necrología de F. de Borja Queipo de Llano y Gayoso, conde de Toreno. Madrid 1890.

R. Academia de ciencias mor. y polit. Programa para los concursos ordinarios de 1891.

Tamariz y Eguía, R., Estudio sobre la vagancia y la mendicidad voluntarias. Memoria premiada con accessit p. la R. Acad. de ciencias mor. y polit. en el concurso ordin. de 1888. Madrid 1890.

Digitized by Google

Nordamerika.

Transactions of the American Philological Association. Vol. 19 (1888). 20 (1889). Boston 1889. 90.

Journal of the American Oriental Society. Vol. 14. New Haven 1890.

Proceedings of the American Oriental Society, at Boston, May 1890.

Johns Hopkins University Circulars. Vol. 8, No. 75. Vol. 9, No. 76—82. Vol. 10, No. 83. Baltimore 1889. 90.

American Journal of Mathematics pure and applied. Publ. under the auspices of the Johns Hopkins University. Vol. XII, No. 1—4. Baltimore 1890. Index to Vol. I—X. Baltimore 1889.

Johns Hopkins University Studies in historical and political science. Vol. VII, 10—12. Ser. VIII, 1—4. Baltimore 1890.

Proceedings of the American Academy of arts and sciences. N. Ser. Vol. 15 (Whole Ser. Vol. 23), P. II. Vol. 16 (Whole Ser. Vol. 24). From May 1888 to May 1889. Selected from the Records. Boston 1888. 89.

Proceedings of the Boston Society of natural sciences. Vol. 24, P. I. II. Boston 1889.

Bulletin of the Museum of comparative Zoology, at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. 16 (Geological Series, Vol. 2), No. 6—9. Vol. 17, No. 6. Vol. 19, No. 1—4. Vol. 20, No. 1—3. Cambridge, Mass. 1889. 90.

Memoirs of the Museum of comparative Zoology, at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. XVI, No. 3. XVII, No. 1. Cambridge, Mass. 1889. 90.

Annual Report of the Curator of the Museum of comparative Zoology, at Harvard College, Cambridge, Mass., for 1888/89. Cambridge, Mass. 1889.

Annals of the Astronomical Observatory of Harvard College. Vol. 21, P. I. Vol. 22. Cambridge, Mass. 1889.

Journal of the Elisha Mitchell scientific Society [Chapel Hill]. 1889, P. II. Raleigh 1890.

Proceedings and Transactions of the Nova Scotian Institute of natural science of Halifax, Nova Scotia. Halifax 1889.

Annual Report of the Geological Survey of Pennsylvania for 1887. Harrisburg 1889.

Second Geological Survey of Pennsylvania. AA. Atlas Eastern middle Anthracite Field, P. III. Atlas Northern Anthracite Field, P. V. Atlas Southern Anthracite Field, P. II. — D 6: South Mountain Atlas, Sheets C, 1—4. D, 2—5. P 4: *Lesley, J. P.*, Dictionary of the fossils of Pennsylvania. Vol. 1. Harrisburg 1889.

Publications of the Washburn Observatory of the University of Wisconsin. Vol. IV, P. 1. 2. Madison 1890.

Memorias de la Sociedad cientifica »Antonio Alzate«. T. 2, Cuad. 12. T. 3, Cuad. 1—12. T. 4, Cuad. 1. 2. México 1889. 90.

Observatorio meteorologico-magnetico central de Mexico. Boletin mensual. T. 2 (1889), No. 2—12. México 1889. 90. — Drei Karten: Inundacion de la Ciudad de Lagos. Inundacion de la Ciudad de Leon. Trayectoria del ciclon de septiembre de 1888 a traves de la Isla de Cuba.

Seventh annual Report of the Board of Trustees of the Public Museum of Milwaukee (1888—89). Milwaukee 1889.

Digitized by Google

Occasional Papers of the Natural History Society of Wisconsin. Vol. 1 (*Peckham, G. W.* and *Eliz. G.*, Observations on sexual selection in spiders of the family Attidae). Milwaukee 1889.

Proceedings of the Natural History Society of Wisconsin. 1888, S. 191—234.

Bulletin of the Minnesota Academy of natural sciences. Vol. III, No. 1 (Proceedings and accompanying papers 1883—86). Minneapolis 1889.

The geological and natural history Survey of Minnesota. Bulletin No. 1. 5. St. Paul 1889.

The geological and natural history Survey of Minnesota. The 17. annual Report, for the year 1888. St. Paul 1889.

Proceedings and Transactions of the R. Society of Canada for the year 1889. Vol. 7. Montreal 1890.

The Geological and Natural History Survey of Canada. Annual Report. New Ser. Vol. III, P. 1. 2 (1887—88). And Maps to accompany Vol. III. Montreal 1889.

Reports on the observations of the total eclipse of the Sun of Jan. 1., 1889, published by the Lick Observatory (Mount Hamilton). Sacramento 1889.

Report for the year 1889/90, presented by the Board of Managers of the Observatory of Yale University to the President and Fellows. (New Haven) o. J.

Transactions of the Astronomical Observatory of Yale University. Vol. I, P. 2. New Haven 1889.

Annals of the New York Academy of sciences (late Lyceum of natural history). Vol. IV, No. 12. Vol. V, No. 1—3. New York 1889.

Transactions of the New York Academy of sciences. Vol. VIII, No. 5—8. Vol. IX, No. 1. 2. New York 1889.

Bulletin of the American Geographical Society. Vol. 21 (1889), No. 4 and Supplement. Vol. 22 (1890), No. 1—3. New York 1889. 90.

Proceedings of the Academy of natural sciences of Philadelphia. 1889, P. 2 (May—Sept.), 3 (Oct.—Dec.). 1890, P. 1 (Jan.—March). Philadelphia 1889. 90.

Transactions of the Wagner Free Institute of science of Philadelphia. Vol. 2. 3. Philadelphia 1889. 90.

Proceedings of the American Philosophical Society, held at Philadelphia, for promoting useful knowledge. Vol. XXVI, No. 130. Vol. XXVII, No. 131. Vol. XXVIII, No. 132. 133. Philadelphia 1890.

Transactions of the American Philosophical Society held at Philadelphia for promoting useful knowledge. N. Ser. Vol. 16, P. III, Philadelphia 1890.

Observatorio meteorológico del Colegio del Estado de Puebla. Resumen, 1889, Nov. Diciembre. 1890, Enero—Agosto. Puebla d. J.

Gonzalez, B. G., Ensayo de meteorognosia de la ciudad de Puebla. Puebla 1889.

Proceedings of the Californian Academy of sciences. II. Ser. Vol. 2, (1889). San Francisco 1890.

Anuario del Observatorio astronómico Nacional de Tacubaya para el año de 1890 (Año X). México 1889.

Transactions of the meetings of the Kansas Academy of science, with the reports of the Secretary. Vol. 8 (1881—82). 9 (1883—84). 11 (1887—88). Topeka, Kansas, 1883—89.

Digitized by Google

Proceedings of the Canadian Institute, Toronto, being a continuation of the Canadian Journal of science, literature and history. III. Ser. Vol. 7, Fasc. 1. 2. Toronto 1889. 90.

Annual Report of the Canadian Institute, Session 1888—89, being part of appendix L to the Report of the Minister of education, Ontario, 1889. Toronto 1889.

Memoirs of the National Academy of sciences. Vol. 4, P. 2. Washington 1889.

Bureau of education. Circular of information, 1889, No. 2. 1890, No. 1. 2. Washington 1889. 90.

Bureau of education. Report of the Commissioner of education for the year 1887/88. Washington 1889.

Fifth annual Report of the Bureau of Ethnology to the Secretary of the Smithsonian Institution, 1883/84. Sixth annual Report, 1884/85. Washington 1887. 88.

Holmes, W. H., Textile fabrics of ancient Peru. Washington 1889.

Pilling, J. C., Bibliography of the Iroquoian languages. Washington 1888.

Pilling, J. C., Bibliography of the Muskhogean languages. Washington 1889.

Thomas, C., The circular, square, and octagonal earthworks of Ohio. Washington 1889.

Thomas, C., The problems of the Ohio mounds. Washington 1889.

U. S. Department of agriculture, Division of economic ornithology and mammalogy. Bulletin 1. Washington 1889. — North American Fauna. No. 1—4. Washington 1889. 90.

Smithsonian Contributions to knowledge. Vol. 26. Washington 1890.

Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution for the year 1886, P. I. 1887, P. I. II. Washington 1889.

Bulletin of the U. S. National Museum. Nr. 33—38. Washington 1889. 90.

Proceedings of the U. S. National Museum. Vol. 10 (1887). 11 (1888). 12 (1889). Washington 1888—90.

Observations made during the year 1884 at the U. S. Naval Observatory. Washington 1889.

Washington Observations, 1884, Append. I: *Yarnall, M.*, Catalogue of stars observed at the U. S. Naval Observatory 1845—1877. 3d. ed., by *E. Frisby*. Washington 1889.

Report of the Superintendent of the U. S. Naval Observatory for the year ending June 30, 1889. Washington 1889.

Annual Report of the Chief Signal-Officer to the Secretary of war for the year 1889, P. I. II. Washington 1890.

United States Coast and Geodetic Survey. Bulletin No. 14—18 (Washington 1890).

Bulletin of the U. S. Geological Survey (Department of the Interior). No. 48—57. Washington 1889. 90.

Monographs of the U. S. Geological Survey. Vol. 13. 14. 15, P. I (Text). II (Plates). Vol. 16. Washington 1888. 89.

Seventh annual Report of the U. S. Geological Survey to the Secretary of the Interior, 1885—86, by *J. W. Powell*. Washington 1888. Eighth annual Report, 1886—87, P. I. II. Washington 1889.

Digitized by Google

Südamerika.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. T. 28, Entrega 3—6. T. 29, Entr. 1—3. 5. 6. T. 20, Entr. 1. 2 (u. Suppl.: Memoria del presidente correspond. al 18° periodo 1889/90). 3—5. Buenos Aires 1889. 90. — Indice general de las materias contenidas en los Anales Vol. 1—29 (1876—89). Buenos Aires 1890.

Actas de la Academia Nacional de ciencias en Córdoba. T. 6. Con un atlas. Buenos Aires 1889.

Boletin de la Academia Nacional de ciencias de la República Argentina. T. X, Entrega 3. Buenos Aires 1889.

Moreno, Fr. P., Le Musée de La Plata. Rapide coup d'oeil sur sa fondation et son développement (Extrait). (La Plata) 1890.

Annales de l'Observatoire de Rio de Janeiro. T. 4, P. I. II. Rio de Janeiro 1889.

Annuario publicado pelo Imp. Observatorio do Rio de Janeiro para o anno de 1888 (Anno IV); de 1889; de 1890. Rio de Janeiro d. J.

Boletins mensaes do l'Observatorio meteorologico da repartição dos telegraphos do Brazil na ilha do Governador. Vol. 1 (Anno de 1886) —3 (1888). Rio de Janeiro, o. J.

Revista do Observatorio. Publicação mensal do Observatorio do Rio de Janeiro. Anno 4 (1889), No. 10—12. Anno 5 (1890), No. 1—11. Rio de Janeiro 1889. 90.

Boletim da Commissão geographica e geologica da Provincia de S. Paulo. No. 1—3. S. Paulo 1889.

Verhandlungen des deutschen wissenschaftlichen Vereins zu Santiago. Bd. 2, H. 2. Santiago 1890.

Asien.

Notulen van de algemeene en bestuurs-vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 27 (1889), No. 2—4. Batavia 1889. 90. — Register op de Notulen der vergaderingen over de jaren 1879—88, door J. A. van der Chijs. Batavia 1889.

Tijdschrift voor Indische taal-, land- en volkenkunde, uitgeg. door het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 33, Afl. 2—6. Batavia, 's Hage 1889. 90.

Nederlandsch-Indisch Plakaatboek 1602—1811, door J. A. van der Chijs. Deel VI. 1750—54. Uitgeg. door het Batav. Genootsch. v. kunsten en wetenschappen. Batavia, 's Hage 1889.

Dagh-Register, gehouden int Casteel Batavia vant passerende daer ter plaetse als over geheel Nederlandts-India anno 1661. Uitgeg. door het Batav. Genootsch. van kunsten en wetensch., med medewerking van de Nederlandsch-Indische Regeering en onder toezicht van J. A. van der Chijs. Batavia, 's Hage 1889.

Louw, P. J. T., De derde Javaansche Successie-oorlog (1746—55). Uitgeg. door het Batav. Genootsch. v. kunsten en wetensch. Batavia, 's Hage 1889.

Observations made at the Magnetical and Meteorological Observatory at Batavia. Publ. by order of the Government of Netherlands India. Vol. 11 (1888). Batavia 1889.

Regenwaarnemingen in Nederlandsch-Indië. Jaarg. 10 (1888). Batavia 1889.

Digitized by Google

Natuurkundige Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië, uitgeg. d. de kon. Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indië. Deel 49 (VIII. Ser., D. 10). Batavia 1890.

India Museum Notes, issued by the Trustees. Vol. 1, No. 2—4. Calcutta 1889. 90.

Imperial University of Japan (Teikoku Daigaku). The Calendar for the year 1889 90. Tōkyō 1889.

Journal of the College of science, Imperial University, Japan. Vol. 3, P. 3. 4. Tōkyō 1889. 90.

Australien.

Report of the first meeting of the Australasian Association for the advancement of science held at Sydney 1888. Sydney (1889).

Proceedings of the R. Society of Victoria. New Ser., Vol. 2. Melbourne 1890.

Transactions of the R. Society of Victoria. Vol. 1, P. 2. Melbourne 1889.

Journal and Proceedings of the R. Society of New South Wales. Vol. 23 (1889), P. 1. Sydney 1889.

Catalogue of the scientific books in the library of the R. Society of New South Wales. P. 1: General Catalogue. Sydney 1889.

New South Wales. Australian Museum. Report of Trustees for the year 1889 (Sydney 1890).

Department of public instruction, technical education branch. Technical education Series, No. 6 (*Maiden, J. H.*, Wattles and wattle-barks). Sydney 1890.

2. Einzelne Schriften.

Benko, J. Frhr. v., Das Datum auf den Philippinen (Sep.-A.). Wien 1890.

Birkner, O., Die wissenschaftl. Erhebungen zur Wasserkatastrophe in der sächs. Oberlausitz am 18. Mai 1887 (Sep.-A.). 1889.

Bloomfield, Maur., Final AS before sonants in Sanskrit (Sep.-A.). Baltimore 1882.

—— On certain irregular Vedic subjunctives or Imperatives (Sep.-A.). Baltimore 1884.

—— Four etymological Notes (Sep.-A.). Baltimore 1885.

—— Seven Hymns of the Atharva-Veda (Sep.-A.). Baltimore 1886.

Cantani, A., Acireale als klimat. Cur- u. Badeort. Übs. v. Siegers. Neapel 1880.

Cayley, Arth., The collected mathematical papers. Vol. 3. Cambridge 1890.

Culin, Stewart, Chinese games with dice. Philadelphia 1889.

Engelhardt, B. v., Observations astronomiques. P. II. Dresde 1890.

Franchi, S., Anomalie della declinazione magnetica in rapporto con grandi masse serpentinose (Estratto). (Roma 1890).

Fritsche, H., On chronology and the construction of the calendar, with special regard to the Chinese computation of time compared with the European. St.-Petersburg 1886.

Digitized by Google

Ganser, Ant., Die Wahrheit. Kurze Darlegung der letzten und wahren Weltprincipien. Entwurf zu einer transcendentalen Logik. Graz 1890.

Geinitz, H. B., Nachträgliche Mittheilungen über die rothen und bunten Mergel der oberen Dyas bei Manchester (Sep.-A.). (Dresden 1890).

Geometry in religion and the exact dates in biblical history after the monuments. London 1890.

Girgas, V. Th., i Bar. *V. Rosen*, Arabskaja Chrestomatija dlja I. kursa. 2^oe izdanie. S.-Peterburg 1890.

Goppelsröder, Frdr., Über Feuerbestattung. Mülhausen i/Els. 1890.

The Kāuçika-Sūtra of the Atharva-Veda. Ed. by *M. Bloomfield* (Vol. XIV of the Journal of the American Orient. Soc.). New Haven 1890.

Marcuse, A., Resultate d. fortgesetzten Berliner Beobachtungsreihe betr. d. Veränderlichkeit der Polhöhen. Berlin 1890.

d'Ocagne, M., C. W. Borchardt et son oeuvre (Extrait). Bruxelles 1890.

Piolti, Gius., Gneiss tormalinifero di Villar Focchiardo (Val di Susa (Sep.-A.) Torino 1889.

—— I minerali del Gneiss di Borgone (Val di Susa.) (Sep.-A.). Torino 1890.

—— Sulla Cossaite del Colle di Bousson (alta valle di Susa) (Sep.-A.). Torino 1888.

Schram, Rob., Adria-Zeit (Sep.-A.) Wien 1889.

—— The actual state of the standard time question (Sep.-A.). o. O. 1890.

—— Ausländische Stimmen über die Adria-Zeit (Sep.-A.). (Wien 1890).

—— Über das Stundenzonen-System der amerikan. Eisenbahnen (Sep.-A.). Wien 1890.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

Digitized by Google

SITZUNG VOM 13. JANUAR 1890.

Friedrich Schur, *Beweis für die Darstellbarkeit der infinitesimalen Transformationen aller transitiven endlichen Gruppen durch Quotienten beständig convergenter Potenzreihen.* Vorgelegt von Herrn SCHEIBNER.

In den folgenden Zeilen will ich beweisen, dass die Componenten der infinitesimalen Transformationen jeder endlichen transitiven Transformationsgruppe sich bei Einführung geeigneter Veränderlicher als Quotienten beständig convergenter Potenzreihen darstellen lassen, dass diese Functionen also, welche bei allen Untersuchungen über Transformationsgruppen als Ausgangspunkt dienen müssen und die bisher, sofern es sich nicht um specielle Gruppen handelte, nur durch Functionenelemente definirt waren, für alle Werthe der Veränderlichen im Allgemeinen eindeutig gegeben sind. Es beruht dieser Beweis auf derjenigen analytischen Darstellung der Componenten der infinitesimalen Transformationen der Parametergruppe, welche ich am 6. Mai 1889 die Ehre hatte der Gesellschaft vorzulegen und in den Mathematischen Annalen ausführlich begründet habe[1]). Der Umstand nämlich, dass die Coefficienten der dort aufgestellten beschränkt convergenten Potenzreihen sich durch die BERNOULLI-schen Zahlen ausdrücken lassen, worauf Herr SCHEIBNER die Güte hatte mich aufmerksam zu machen, führte mich darauf, dass diese Potenzreihen gewissen linearen Gleichungen genügen, deren Coefficienten als Sinus- und Cosinus-Functionen von mehreren Veränderlichen betrachtet werden können und beständig convergente Potenzreihen sind. Für die Parametergruppen oder die einfach transitiven Gruppen war hiermit der Beweis explicite

1) F. SCHUR, Neue Begründung der Theorie der endlichen Transformationsgruppen, Math. Ann. Bd. 35.

erbracht. Was nun die transitiven Gruppen überhaupt betrifft, so gelang es mir, die Componenten ihrer infinitesimalen Transformationen rational[1]) durch die der zugehörigen Parametergruppe auszudrücken, sodass auch für diese meine Behauptung bewiesen ist. Ob dieselbe auch für die intransitiven Gruppen gilt, ist mir noch nicht gelungen zu entscheiden. Für diese Gruppen fehlt eben noch eine ähnliche explicite Darstellung ihrer infinitesimalen Transformationen; dieselbe kann füglich nur erwartet werden, sobald es gelungen sein wird, alle Untergruppen einer Gruppe analytisch auszudrücken.

I. Der von mir gegebenen analytischen Darstellung der Componenten der infinitesimalen Transformationen der Parametergruppe kann man durch Einführung gewisser ganzer Functionen eine sehr einfache Form geben. Setzt man nämlich:

$$(1)\quad \sum c^{\mathfrak{d}_1}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1} c^{\mathfrak{d}_2}_{\mathfrak{d}_1,\mathfrak{b}_2} \cdots c^{\mathfrak{d}_{m-1}}_{\mathfrak{d}_{m-2},\mathfrak{b}_{m-1}} c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{d}_{m-1},\mathfrak{b}_m} u_{\mathfrak{b}_1} u_{\mathfrak{b}_2} \cdots u_{\mathfrak{b}_m} = U^{(m)}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}},$$
$$\{\mathfrak{b}_1;\ \mathfrak{b}_2;\ \cdots;\ \mathfrak{b}_m;\ \mathfrak{d}_1;\ \mathfrak{d}_2;\ \cdots;\ \mathfrak{d}_{m-1} = 1, 2, \cdots, r\}$$

so wird:

$$(2)\quad \omega^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(u) = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m U^{(m)}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}},$$

wo

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2},\ \lambda_2 = \frac{1}{12},\ \lambda_{2q+1} = 0$$

und

$$(3)\quad (2q+1)\lambda_{2q} = -(\lambda_2\lambda_{2q-2} + \lambda_4\lambda_{2q-4} + \cdots + \lambda_{2q-2}\lambda_2).$$

Hieraus geht hervor, dass:

$$(4)\quad \lambda_{2q} = (-1)^q \frac{B_{2q-1}}{(2q)!}.$$

Denn setzt man:

$$(5)\quad f(x) = \frac{ix}{2}\cot\left(\frac{ix}{2}\right) = 1 + \sum_{q=1}^{\infty} \mu_{2q} x^{2q},$$

so genügt $f(x)$ der Differentialgleichung:

$$(6)\quad (f(x))^2 + xf'(x) - f(x) = \frac{x^2}{4},$$

[1]) Es folgt hieraus, dass das Theorem 82 der Theorie der Transformationsgruppen von Herrn LIE einer wesentlichen Reduction fähig ist.

Digitized by Google

woraus leicht folgt, dass $\mu_2 = \frac{1}{12}$ und dass die μ_{2q} ebenfalls der Recursionsformel (3) genügen; es ist also $\mu_{2q} = \lambda_{2q}$.

Die ganzen homogenen Functionen $U^{(m)}_{a,b}$ genügen nun den folgenden Identitäten:

$$(7) \qquad \sum_{b=1}^{r} U^{(m)}_{a,b}\, U^{(n)}_{b,c} = U^{(m+n)}_{a,c} \ ,$$

welche sie als gewisse Analoga der Potenz x^m erscheinen lassen. Bedenken wir daher, dass:

$$(8) \quad \left\{1 + \frac{1}{3!}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{5!}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \cdots\right\}(1 + \lambda_2 x^2 + \lambda_4 x^4 + \cdots)$$
$$= 1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \cdots \ ,$$

und setzen:

$$(9) \qquad \omega^b_a(u) + \frac{1}{2}\sum_{c=1}^{r} c^a_{b,c}\, u_c = \eta^b_a(u) + \frac{1}{2}\sum_{c=1}^{r} c^a_{c,b}\, u_c =$$

$$\tau^b_a(u) = \delta_{a,b} + \lambda_2 U^{(2)}_{a,b} + \lambda_4 U^{(4)}_{a,b} + \cdots \ ,$$

$$(10) \quad \delta_{a,b} + \frac{1}{2!}\frac{1}{2^2} U^{(2)}_{a,b} + \frac{1}{4!}\frac{1}{2^4} U^{(4)}_{a,b} + \cdots = \gamma^b_a(u) \ ,$$

$$(11) \quad \delta_{b,c} + \frac{1}{3!}\frac{1}{2^2} U^{(2)}_{b,c} + \frac{1}{5!}\frac{1}{2^4} U^{(4)}_{b,c} + \cdots = \sigma^c_b(u) \ ,$$

so findet man leicht, dass diese Functionen durch die folgenden Gleichungen verknüpft sind:

$$(12) \qquad \sum_{b=1}^{r} \tau^b_a(u)\, \sigma^c_b(u) = \gamma^c_a(u) \ .$$

Da nun die Function $U^{(m)}_{a,b}$, wenn man in derselben alle $c^c_{b,b}$ durch g, die obere Grenze der absoluten Beträge aller dieser Grössen, ersetzt, in:

$$g^m r^{m-1} (u_1 + u_2 + \cdots + u_r)^m$$

Digitized by Google

übergeht, so ist klar, dass die Functionen $\gamma_a^b(u)$ und $\sigma_b^c(u)$ durch beständig convergente Potenzreihen dargestellt sind. Halten wir nun in den Gleichungen (12) etwa a fest und geben dem c alle Werthe von 1 bis r, so erhalten wir für die $\tau_a^b(u)$ ein System von r linearen Gleichungen mit nicht identisch verschwindender Determinante. Die Gleichungen (12) enthalten demnach den vollständigen Beweis dafür, dass *die Componenten der infinitesimalen Transformationen jeder Parametergruppe, sobald dieselben in ihrer kanonischen Form vorgelegt sind, sich als Quotienten beständig convergenter Potenzreihen darstellen lassen.*

II. Um nun die in der Einleitung gemeinte Reduction der Componenten der infinitesimalen Transformationen irgend einer transitiven Gruppe auf die der zugehörigen Parametergruppe zu erhalten, gehen wir von denjenigen Voraussetzungen aus, welche ich in § 6 meiner o. a. Annalenarbeit gemacht habe. Es möge also unsere Gruppe eine $(r-n)$-gliedrige Untergruppe enthalten, welche entsteht, wenn man $u_1 = u_2 = \cdots = u_n = 0$ setzt, es sei also:

$$c_{b,c}^a = 0 \quad , \tag{13}$$

sobald $a \leqq n$ und b und $c > n$; diese Untergruppe enthalte ausserdem keine in der r-gliedrigen invariante Untergruppe, oder die Gleichungen (XIV.) a. a. O. mögen nicht erfüllbar sein. Dann, behaupte ich, *ist durch die Gleichungen:*

$$\varphi_a(x_1' \cdots x_n' 0 \cdots 0;\ \varphi(u; -x_1 \cdots -x_n 0 \cdots 0)) = 0 \tag{14}$$
$$(a = 1, 2, \cdots n)$$

eine r-gliedrige transitive Transformationsgruppe des Raumes von n Dimensionen dargestellt, wo die Functionen $\varphi_a(u; v)$ die endlichen Transformationen der Parametergruppe in ihrer kanonischen Form darstellen mögen.

Setzen wir nämlich:

$$\varphi_a(x'_1 \cdots x'_n 0 \cdots 0;\ \varphi(u; -x_1 \cdots -x_n 0 \cdots 0)) = w_a, \tag{15}$$
$$(a = n+1, \cdots, r)$$

so folgt:

Digitized by Google

$$(16)\quad \varphi_a(x_1' \cdots x_n' 0 \cdots 0;\ u) = \varphi_a(0 \cdots 0\, w_{n+1} \cdots w_r;\ x_1 \cdots x_n 0 \cdots 0) \qquad (a = 1, 2, \cdots r)$$

und hieraus:

$$(17)\quad x_a' = \varphi_a(0 \cdots 0\, w_{n+1} \cdots w_r;\ \varphi(x_1 \cdots x_n 0 \cdots 0;\ -u)), \qquad (a = 1, 2, \cdots n)$$

$$(18)\quad 0 = \varphi_a(0 \cdots 0\, w_{n+1} \cdots w_r;\ \varphi(x_1 \cdots x_n 0 \cdots 0;\ -u)), \qquad (a = n+1, \cdots, r)$$

welche die Gleichungen (14) ersetzen können.

Sei nun zweitens:

$$(19)\quad \varphi_a(x_1'' \cdots x_n'' 0 \cdots 0;\ \varphi(v;\ -x_1' \cdots -x_n' 0 \cdots 0)) = 0, \qquad (a = 1, 2, \cdots, n)$$

und bedenkt man, dass:

$$20)\quad -\varphi_a(u;\ v) = \varphi_a(-v;\ -u), \qquad (a = 1, 2, \cdots, r)$$

so folgt:

$$(21)\quad \varphi_a\{\varphi(x_1'' \cdots x_n'' 0 \cdots;\ v);\varphi(u;\ \varphi(-x_1 \cdots -x_n 0 \cdots 0;0 \cdots 0 - w_{n+1} \cdots - w_r))\} = 0, \qquad (a = 1, 2, \cdots, n)$$

oder:

$$(22)\quad \varphi_a(\varphi(x_1'' \cdots x_n'' 0 \cdots 0;v);\ \varphi(\varphi(u;-x_1 \cdots -x_n 0 \cdots 0);0 \cdots 0 - w_{n+1} \cdots - w_r)) = 0, \qquad (a = 1, 2, \cdots, n)$$

oder:

$$(23)\quad \varphi_a(z;\ 0 \cdots 0 - w_{n+1} \cdots - w_r) = 0, \qquad (a = 1, 2, \cdots, n)$$

wo:

$$(24)\quad z_a = \varphi_a(\varphi(x_1'' \cdots x_n'' 0 \cdots 0;\ v);\ \varphi(u;\ -x_1 \cdots -x_n 0 \cdots 0)). \qquad (a = 1, 2, \cdots, r).$$

Sobald also unsere Untergruppe, wie wir ja annehmen, keine in der r-gliedrigen invariante Untergruppe enthält, müssen auch die z nach (23) eine Stelle dieser Untergruppe definiren, d. h. es muss sein:

Digitized by Google

$$(25)\quad \varphi_a(\varphi(x_1''\cdots x_n''0\cdots0;\,v);\,\varphi(u;\,-x_1\cdots-x_n\,0\cdots0))=0\,,\qquad (a=1,2,\cdots n)$$

oder:

$$(26)\quad \varphi_a\{x_1''\cdots x_n''0\cdots0;\,\varphi(\varphi(v;\,u);\,-x_1\cdots-x_n\,0\cdots0)\}=0\,.\qquad (a=1,2,\cdots,n)\,.$$

Hiermit ist unsere Behauptung bewiesen, dass durch die Gleichungen (14) oder (17) und (18) eine transitive r-gliedrige Transformationsgruppe des Raumes von n Dimensionen dargestellt ist.

Beachtet man nun, dass für $u_a=0$ die Grössen w_a ebenfalls verschwinden, und setzt:

$$(27)\qquad \left(\frac{\partial w_a}{\partial u_b}\right)_{u_c=0}=\mathfrak{D}_a^b(x)\,,$$

so ergeben sich aus (17), wenn man darin $-u$ mit u vertauscht, die Componenten der infinitesimalen Transformationen unserer Gruppe in folgender Form:

$$(28)\qquad \xi_a^b(x)=\sum_{c=n+1}^{r}\eta_a^c(x_1\cdots x_n\,0\cdots0)\,\mathfrak{D}_c^b(x)+$$

$$+\sum_{c=}^{r}\left(\frac{\partial f_a(0\cdots0\,w_{n+1}\cdots w_r;\,\varphi(x_1\cdots x_n0\cdots0;\,u))}{\partial\varphi_c(x_1\cdots x_n\,0\cdots0;\,u)}\right)_{u=0}\omega_c^b(x_1\cdots x_n\,0\cdots0)\,,\qquad (a=1,2,\cdots,n)$$

also nach Formel (I.) meiner o. a. Abhandlung:

$$(29)\quad \xi_a^b(x)=\omega_a^b(x_1\cdots x_n0\cdots0)+\sum_{c=n+1}^{r}\eta_a^c(x_1\cdots x_n\,0\cdots0)\,\mathfrak{D}_c^b(x)\,,\qquad (a=1,2,\cdots,n)$$

wo die $\mathfrak{D}_c^b(x)$ ihrerseits bestimmt sind durch die Gleichungen:

$$(30)\qquad 0=\omega_a^b(x_1\cdots x_n0\cdots0)+\sum_{c=n+1}^{r}\eta_a^c(x_1\cdots x_n\,0\cdots0)\,\mathfrak{D}_c^b(x)\,.\qquad (a=n+1,\cdots,r)\,.$$

Digitized by Google

Es dürfte nicht ganz leicht sein, hieraus direct zu beweisen dass die $\xi_a^b(x)$ den Gleichungen (IV.) meiner o. a. Abhandlung genügen. Aber dies vorausgesetzt, ist es leicht zu sehen, dass die $\xi_a^b(x)$ genau die a. a. O. Satz 7 bestimmten Functionen sind. Zunächst nämlich sieht man, dass:

$$\xi_a^b(0) = \delta_{a,b} \,. \tag{31}$$

Ferner folgt aus (30):

$$\sum_{\{b=1,2\cdots n;\ c=n+1,\cdots,r\}} \eta_a^c(x_1 \cdots x_n\ 0 \cdots 0)\, \mathfrak{D}_c^b(x)\, x_b = 0 \,, \qquad (a = n+1, \cdots, r) \tag{32}$$

also auch:

$$\sum_{b=1}^{n} \mathfrak{D}_c^b(x)\, x_b = 0 \,. \tag{33}$$

Hieraus folgt:

$$\sum_{b=1}^{n} \xi_a^b(x)\, x_b = x_a \,. \tag{34}$$

Wir sehen hieraus, dass wir die infinitesimalen Transformationen jeder transitiven Gruppe unter Zugrundelegung geeigneter Veränderlicher und Parameter stets als in der Form (29) gegeben annehmen können; es ist also auch für diese unsere Behauptung bewiesen.

Digitized by Google

Otto Richter, *Ueber die Systeme derjenigen Kegelschnitte, die eine bicirculare Curve 4. Ordnung viermal berühren.* Vorgelegt von Neumann.

Die Abhandlung, von der hier die Rede sein soll, ist aus mehreren Sätzen hervorgegangen, die ich in einer kleinen Arbeit über die Kreisfusspunktcurven veröffentlicht habe[1]). Es sei mir gestattet, im Folgenden die Ergebnisse meiner Untersuchungen kurz darzulegen; dabei können freilich nur die allerhauptsächlichsten Sätze erwähnt werden.

Gegeben sei eine beliebige bicirculare Curve 4. Ordnung, die $\mathfrak{C}$ heissen mag. Unter allen den Kegelschnitten, die diese Curve $\mathfrak{C}$ viermal berühren, giebt es unendlich viele Kegelschnitte Q, die folgende zwei Eigenschaften haben:

1) *alle diese Kegelschnitte Q sind einander ähnlich*;

2) *ihre Hauptaxen schneiden sich alle in einem Punkte E, ihre Nebenaxen in einem andern Punkte F.* Aus dieser zweiten Eigenschaft folgt sofort, dass *die Mittelpunkte der Kegelschnitte Q den Kreis $\mathfrak{K}$ erfüllen, für welchen EF ein Durchmesser ist.*

Die *Gesammtheit* oder *das System dieser Kegelschnitte Q*, die jene Bedingungen erfüllen, bezeichne ich mit Σ; und jenen Kreis $\mathfrak{K}$ nenne ich den *Mittelpunktskreis des Systemes Σ*; endlich soll die Gerade EF die *Axe des Systemes Σ* heissen.

Der Mittelpunkt von $\mathfrak{K}$ ist die Mitte desjenigen Vierecks, das von den Doppelbrennpunkten der eingehüllten Curve $\mathfrak{C}$ gebildet wird. Ferner kann man in $\mathfrak{K}$ einen anderen Durchmesser $E'F'$ von solcher Beschaffenheit ziehen, dass je zwei Kegelschnitte Q

---

1) Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. XXXIV (1889), Seite 348—350.

Digitized by Google

congruent sind, sobald ihre Mittelpunkte in Bezug auf $E'F'$ *symmetrisch* liegen.

Denkt man sich Σ aus *Kegelschnittspaaren* Q, Q_1 bestehend, und zwar in solcher Art, dass je zwei Kegelschnitte Q, Q_1 einander zugeordnet werden, deren Mittelpunkte *Enden eines Durchmessers von* $\mathfrak{K}$ sind, so gelten folgende Sätze:

α) Je zwei solche Kegelschnitte Q, Q_1 sind parallelaxig. Die vier Schnittpunkte von Q, Q_1 liegen demnach auf einem Kreise. Die auf diese Weise für die einzelnen Paare Q, Q_1 sich ergebenden Kreise *fallen alle mit einander zusammen.* Und der so bestimmte Kreis soll der *Schnittpunktskreis des Systemes* Σ heissen. *Sein Mittelpunkt G liegt auf der Axe EF.*

β) Durch die 8 Punkte, in denen die gegebene Curve $\mathfrak{C}$ von einem Paare Q, Q_1 berührt wird, kann eine gleichseitige Hyperbel $\mathfrak{H}$ gelegt werden, deren Asymptoten den Axen von Q, Q_1 parallel sind. Alle diese Hyperbeln $\mathfrak{H}$ sind *concentrisch* und bilden *ein Büschel, dessen Grundpunkte Brennpunkte von* $\mathfrak{C}$ sind. Ihr Mittelpunkt H befindet sich ebenfalls auf der Axe des Systemes Σ, und zwar so, dass E, F; G, H *harmonische Punkte* sind.

In dem Systeme Σ kommen auch *zwei zerfallende*, d. h. *aus je zwei Doppeltangenten von* $\mathfrak{C}$ zusammengesetzte Kegelschnitte vor. Ihre Mittelpunkte liegen symmetrisch mit Bezug auf $E'F'$.

Da die Kegelschnitte Q des Systemes Σ einander ähnlich sind, so kann man fragen: welche Curve wird von einem *Systeme entsprechender* (»homologer«) *Punkte der Kegelschnitte* Q gebildet? Die Antwort lautet: eine bicirculare Curve 4. Ordnung Π vom Geschlechte 0, die die gegebene Curve $\mathfrak{C}$ viermal berührt. Alle *diese Curven* Π *hüllen* also ebenso wie die Kegelschnitte Q *die Curve* $\mathfrak{C}$ *ein.* Ihre Doppelpunkte erfüllen den Kreis $\mathfrak{K}$. Hinsichtlich ihrer sonstigen merkwürdigen Eigenschaften verweise ich auf die Abhandlung selbst [1]).

Ebenso kann man fragen: *Was hüllen entsprechende Tangenten der Kegelschnitte* Q *ein?* Man findet als Lösung: *einen Kegelschnitt* Q', *der* $\mathfrak{C}$ *viermal berührt. Alle diese Kegelschnitte* Q' *bilden ein System* Σ' *von derselben Art wie* Σ, *d. h. ein System*

1) Für das in der Arbeit über die Kreisfusspunktcurven vorkommende Ellipsensystem sind die Curven Π, wie aus der daselbst (l. c. S. 350) angegebenen Construction hervorgeht, wiederum *Kreisfusspunktcurven.* Ich erwähne das hier, weil dort irrtümlich gesagt ist, es seien »Curven anderer Art«.

Digitized by Google

einander ähnlicher Kegelschnitte, von denen jeder die gegebene Curve $\mathfrak{C}$ viermal berührt, und deren Berührungspunkte von einem Büschel gleichseitiger Hyperbeln bestimmt werden, dessen Grundpunkte wiederum Brennpunkte von $\mathfrak{C}$ sind. Diese 4 Brennpunkte sind solche, die mit jenen, zu Σ gehörenden, auf 2 Kreisen (Brennpunktskreisen) liegen. Das neue System Σ' enthält *dieselben 4 Doppeltangenten von $\mathfrak{C}$ wie Σ, sein Mittelpunktskreis fällt mit $\mathfrak{K}$, dem Mittelpunktskreise des Systemes Σ, zusammen, und seine Axe ist $E'F'$; je zwei Kegelschnitte Q' sind congruent, deren Mittelpunkte symmetrisch mit Bezug auf EF liegen; und ebenso, wie entsprechende Tangenten der Kegelschnitte Q je einen Kegelschnitt Q' einhüllen, ebenso hüllen umgekehrt entsprechende Tangenten der Kegelschnitte Q' je einen Kegelschnitt Q ein.* Deshalb habe ich zwei solche Systeme Σ, Σ', die sich *gegenseitig* entsprechen, ein *Systempaar* oder *zwei zu einander conjugirte Systeme* genannt.

Eine gegebene bicirculare Curve 4. Ordnung $\mathfrak{C}$ wird nun, dem Umstande gemäss, dass ihre 4 Paare von Doppeltangenten, oder, was nach den von mir bewiesenen Sätzen auf dasselbe hinauskommt, *ihre 4 Brennpunktskreise 6 Combinationen zu je zweien zulassen, von 6 Paaren conjugirter Kegelschnittssysteme eingehüllt,* oder also *von 12 einzelnen Systemen ähnlicher Kegelschnitte,* deren 6 Mittelpunktskreise concentrisch sind [1]). Dabei ergeben sich mehrere bemerkenswerthe Sätze über die Berührungspunkte und gegenseitigen Schnittpunkte der 8 Doppeltangenten, von denen einer am Schlusse dieses Berichtes genannt ist.

Es sind auch *zusammenfallende conjugirte Systeme* möglich. In dieser Hinsicht habe ich den folgenden Satz bewiesen: *Wird eine bicirculare Curve 4. Ordnung von einem Systeme Σ, das sich selbst conjugirt ist* (Doppelsystem) *eingehüllt, so zerfällt sie nothwendig in zwei Kreise. Jedes Kreispaar aber wird von zwei solchen Doppelsystemen eingehüllt.* Ueberhaupt liefert die Anwendung jener Theorie auf das *Kreispaar* eine Fülle von Sätzen, die auch schon bekannte Sätze zum Theil in neuem Lichte erscheinen lassen. Ja, selbst auf die *Kegelschnitte* lässt sie sich anwenden,

1) Doch mag ausdrücklich bemerkt sein, dass diese 12 Systeme *keineswegs alle* Kegelschnitte erschöpfen, die überhaupt die Curve $\mathfrak{C}$ viermal berühren. Vgl. die Vorbemerkungen zur Abhandlung.

Digitized by Google

wobei man z. B. sofort folgenden Satz erhält: *Gegeben sei ein Kegelschnitt und ein ihm umgeschriebenes gleichschenkliges Dreieck. Dann wird die Spitze dieses Dreieckes mit dem Berührungspunkte seiner Basis und den 4 Brennpunkten des Kegelschnittes auf einer* (gleichseitigen) *Hyperbel liegen.* Besonderes Interesse scheinen auch die Anwendungen auf die so vielfach untersuchten sogenannten *Cartesischen Curven* zu verdienen. Bei ihnen fallen nämlich 3 von den oben erwähnten 12 Systemen mit 3 von den 4 *Kreissystemen* zusammen, von denen bekanntlich jede bicirculare Curve 4. Ordnung eingehüllt wird, und die zu ihnen conjugirten 3 Systeme bestehen aus *congruenten Kegelschnitten.*

Schliesslich habe ich die Theorie noch auf die *circularen Curven 3. Ordnung* übertragen. Dabei ergiebt sich der Satz, dass eine solche Curve *von 6 Paaren conjugirter Parabelsysteme eingehüllt* wird. In jedem solchen einzelnen Systeme laufen die Axen aller Parabeln durch *einen* Punkt; es kommt darin *eine zerfallende Parabel* vor, und zwar besteht sie aus *2 von den 4 Tangenten, die an die Curve parallel ihrer reellen Asymptote gelegt werden können.* Das *conjugirte* System enthält *dieselben* beiden Tangenten, und die 6 Systempaare entsprechen den 6 Combinationen der 4 Tangenten oder der 4 Brennpunktskreise zu je zweien. Im Uebrigen obwalten Verhältnisse, die denen bei der bicircularen Curve 4. Ordnung ganz ähnlich sind.

Durch Projection lassen sich fast alle jene Sätze *auf die allgemeine Curve 4. Ordnung mit 2 Doppelpunkten* übertragen. Dabei ergeben sich mit Leichtigkeit auch Sätze, die sich auf die gegenseitigen Schnittpunkte und die Berührungspunkte der 8 Doppeltangenten einer solchen Curve beziehen, von denen hier nur einer als Beispiel erwähnt werden mag. Man denke sich in jedem der beiden Doppelpunkte die zwei Curventangenten. Diese 4 Tangenten haben 4 gegenseitige Schnittpunkte; verbindet man die letzteren kreuzweise, so erhält man einen neuen Schnittpunkt, der D heissen mag. Die Verbindungsgerade der Doppelpunkte heisse d. Von jedem Doppelpunkte gehen ferner 4 Tangenten an die Curve; und diese 8 Tangenten haben 16 gegenseitige Schnittpunkte, die bekanntlich so liegen, dass es 4 Kegelschnitte $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_4$ giebt, die durch je 4 von diesen Schnittpunkten und gleichzeitig durch die beiden Doppelpunkte laufen. Die Pole von d mit Bezug auf $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_4$ sollen

Digitized by Google

P_1, P_2, P_3, P_4 heissen. Dann gilt der Satz: Von den 28 gegenseitigen Schnittpunkten der 8 Doppeltangenten der Curve 4. Ordnung mit 2 Doppelpunkten liegen 24 zu je 4 auf 6 Kegelschnitten, die sich gegenseitig in den Doppelpunkten berühren; die übrigen 4 Schnittpunkte fallen mit P_1, P_2, P_3, P_4 zusammen. Der Schnittpunkt der beiden Tangenten an jene 6 Kegelschnitte in den Doppelpunkten, d. h. der Pol von d mit Bezug auf jeden der 6 Kegelschnitte, ist der oben erwähnte Punkt D.

Digitized by Google

Hermann Wiener, *Die Zusammensetzung zweier endlichen Schraubungen zu einer einzigen.* Vorgelegt von Neumann. Mit vier Figuren.

1. Die Lehre von der Bewegung starrer Systeme stützt sich wesentlich auf den Satz, dass ein System von starr verbundenen Punkten aus irgend einer Lage in jede beliebige andere durch eine Schraubung[1]) gebracht werden kann, woraus erhellt, dass es möglich ist, jede beliebige Bewegung ihrem Erfolg nach durch eine bestimmte Schraubung zu ersetzen. Sind *zwei* Bewegungen gegeben, so bildet ihre Folge wieder eine einzige, und es besteht demnach eine Grundaufgabe darin, zwei Schraubungen zu einer einzigen neuen zusammenzusetzen. Handelt es sich dabei um *unendlich kleine* Bewegungen, so löst man die Aufgabe ohne Schwierigkeit, indem man jede Schraubung in eine Schiebung und in eine Drehung zerlegt denkt, und die unendlich kleinen Schiebungen und die unendlich kleinen Drehungen, jede für sich, wie Strecken zusammensetzt.

Im Folgenden will ich nun zeigen, dass man mit derselben Leichtigkeit auch *endliche Schraubungen* zusammensetzen kann. Und zwar wird die Methode, in einer Verallgemeinerung derjenigen bestehen, deren man sich zur Zusammensetzung der Strecken bedient. Wie jede Strecke durch zwei Elemente, den Anfangspunkt und den Endpunkt, bestimmt ist, so wird es auch gelingen für jede Schraubung zwei solche Elemente zu finden und zwar in zwei sich kreuzenden Geraden.

---

1) Die kurzen Worte »Schiebung, Drehung, Schraubung«, statt Parallelverschiebung (Translation), Rotation, Schraubenbewegung, entnehme ich Sohncke's »Theorie der Krystallstructur«, ebenso das Wort »Umwendung« statt »halbe Umdrehung« dem »Lehrbuch der Elementargeometrie« von Henrici und Treutlein.

Digitized by Google

Die *allgemeine Lösung* der Aufgabe hat naturgemäss den Erfolg, dass damit auch alle *besonderen Fälle* erledigt sind. Waren also die Methoden, die man bisher zur Lösung der einfacheren Aufgaben verwenden musste, mancherlei, so führt jetz *ein* Weg stets zum Ziele. Da derselbe die geometrische Anschaulichkeit mit der Kürze der Rechnung verbindet, so gebe ich mich der Hoffnung hin, dass dadurch auch die Einführung in das Studium der Kinematik nicht unwesentlich erleichtert werde.

I. Die Umwendung als elementare Bewegung.

2. Als elementare Bewegung hat man bisher die Schiebung und die Drehung betrachtet, da, wie erwähnt, jede beliebige Bewegung als Folge dieser beiden angesehen werden kann[1]). Wir fassen diese schon als zusammengesetzt auf und führen eine *einheitliche* elementare Bewegung ein, durch welche dasselbe erreicht wird, nämlich die *Umwendung* d. i. die halbe Umdrehung um eine Axe. Wir werden im folgenden Abschnitt sehen, dass sowohl jede Schiebung und Drehung, wie auch jede Schraubung als die Folge zweier Umwendungen um bestimmte Geraden als Axen dargestellt werden kann. Hier seien nur die wichtigsten Eigenschaften unserer neuen elementaren Bewegung angeführt.

3. *Mit jeder Geraden des Raumes ist eine elementare Bewegung eindeutig verknüpft.* Denn sind s, t, u ... beliebige Geraden, so ist um jede derselben nur eine einzige solche elementare Bewegung möglich, wie auch umgekehrt zu jeder Umwendung eine ganz bestimmte Gerade als Axe gehört. Es führt dies zu einer einfachen Schreibweise dieser Operation, indem wir unter

$$\{s\}, \{t\}, \{u\}, \cdots$$

die Umwendung bezw. um die Gerade

$$s, t, u, \cdots$$

verstehen. Dabei fassen wir die Geraden stets als *fest im Raume liegend auf*, ganz unabhängig davon, welchen Bewegungen sonstige Punkte des Raumes unterworfen sein mögen.

---

1) Von diesem Satze werde ich in einer Fortsetzung des vorliegenden Aufsatzes einen auf denselben Grundlagen beruhenden einfachen Beweis geben, sowie eine damit zusammenhängende kurze Lösung der Aufgabe, die Schraubung zu finden, welche ein starres Dreieck aus einer Lage in eine beliebige andere bringt.

Digitized by Google

Gelangen die Punkte eines starren Systems aus den Anfangslagen $A_1, B_1, C_1, \ldots$ durch eine Umwendung um s in die Endlagen $A_2, B_2, C_2, \cdots$, so schreiben wir dies:

$$A_1\ B_1\ C_1 \cdots \{s\}\ A_2\ B_2\ C_2 \cdots$$

Wird das System ebenso nach einander den Operationen $\{s\}$, dann $\{t\}$ unterworfen, so dass:

$$A_1\ B_1\ C_1 \cdots \{s\}\ A_2\ B_2\ C_2 \cdots \{t\}\ A_3\ B_3\ C_3 \cdots ,$$

so bezeichnen wir das als die Folge $\{s, t\}$ der Operationen $\{s\}$ und $\{t\}$ und schreiben

$$A_1\ B_1\ C_1 \cdots \{s, t\}\ A_3\ B_3\ C_3 \cdots ,$$

und analog für die Folge von beliebig vielen solchen Operationen. Wegen der Starre des Systems folgen aus dieser Formel Beziehungen zwischen den Entfernungen, Winkeln, Dreiecken u. s. w. So

$$A_1 B_1 = A_3 B_3 , \quad \sphericalangle A_1 B_1 C_1 = A_3 B_3 C_3 , \quad \triangle A_1 B_1 C_1 \cong A_3 B_3 C_3$$

u. s. f.[1])

4. Die wichtigste Eigenschaft dieser elementaren Bewegung ist die, dass sie eine *involutorische* ist, *d. h. eine solche, deren einmalige Wiederholung ihren Erfolg aufhebt.* Denn erleidet ein System von Punkten eine Umwendung um s, und dann noch eine solche, so hat jeder Punkt eine ganze Umdrehung um s gemacht und ist also in seine Ausgangslage zurückgekehrt. Eine Operation, die keine Wirkung auf das von ihr betroffene Object ausübt, nennt man die *identische* und belegt sie mit dem Zeichen 1, so dass wir, wenn s eine ganz beliebige Gerade ist, stets schreiben können:

$$\{s, s\} = 1 .$$

5. Die geometrische Bedingung dafür, dass bei der Umwendung um s die beiden Stellen A_1 und A_2 des Raumes Anfangs- und Endlage eines Punktes sind, besteht darin, dass s die mittelsenkrechte Gerade von $A_1 A_2$ ist.

---

1) Die Zeichen $\{s\}$, $\{s, t\}$, $\cdots$ werden also genau so gebraucht, wie da Zeichen $\cong$ bei Dreiecken, $\overline{\wedge}$ in der projectiven Geometrie u. a.; MÖBIUS gebraucht in einer etwas allgemeineren Bedeutung das Zeichen $=$ für congruente und symmetrisch gleiche Systeme, und liest aus derartigen Gleichungen die obigen Beziehungen ab.

Digitized by Google

Anmerkung. Man kann dann auch sagen, jeder Punkt gehe aus seiner Anfangslage *durch Spiegelung an der Geraden* [1]) s in seine Endlage über, und auch, es sei an s das ganze starre System aus jener Lage in diese gespiegelt worden. Dadurch ist die Stellung ausgedrückt, welche die hier folgenden Betrachtungen in einer allgemeineren Theorie einnehmen, nämlich in der Geometrie der Spiegelungen [2]). Die Spiegelungen eines räumlichen Systems an einer Ebene und an einem Punkte haben für die Mechanik keine unmittelbare Bedeutung, weil durch sie das System nicht in ein congruentes, sondern in ein symmetrisches übergeführt wird. Und doch ist auch diese Erweiterung nicht ohne Anwendung auf Verhältnisse, die in der Natur vorkommen; die neueren Untersuchungen über die Krystallstructur zeigen die Nothwendigkeit, auch *symmetrische Systeme* mit in Betracht zu ziehen.

II. Die Folge zweier Umwendungen.

6. Im Folgenden soll nun der Hauptsatz unserer Theorie abgeleitet werden, dass jede Schraubung dasselbe leistet, wie die Umwendungen um zwei bestimmte Geraden. Wie aber eine durch Anfangs- und Endpunkt gegebene Strecke durch eine andere, ihr gleiche, ersetzt werden kann, von welcher der eine dieser beiden Punkte beliebig gewählt werden darf, so kann auch von den beiden Geraden, um welche, zur Erzielung des Erfolges einer gegebenen Schraubung, nach einander umgewandt werden muss, die eine nach gewissen Willkürlichkeiten angenommen werden, während die Lage der anderen daraus folgt. Es ergibt sich hier also die wichtige Frage nach der *Ersetzbarkeit* (Aequivalenz) der Umwendungen um zwei Geraden durch diejenigen um zwei andere, d. i. die Frage, wann rufen zwei Geraden s, t dieselbe Lagenveränderung eines Systems hervor, wie zwei andere Geraden s', t'? Formal drücken wir die Ersetzbarkeit zweier Bewegungen durch das Gleichheitszeichen aus, schreiben also:

$$\{s, t\} = \{s', t'\} .$$

7. Um zu zeigen, dass eine Bewegung denselben Erfolg hat,

---

1) Der Begriff »Spiegelung an einer Geraden« gestattet nicht nur eine leichtere Ausdrucksweise, sondern ist, wie ich meine, auch anschaulicher als der der Umwendung. Doch glaubte ich auf diese Vortheile verzichten zu müssen, um selbst den Schein eines der Mechanik fremden Begriffs zu vermeiden.

2) Die Grundlagen der allgemeinen geometrischen Theorie der Spiegelungen werde ich demnächst in einer grösseren Arbeit auseinandersetzen.

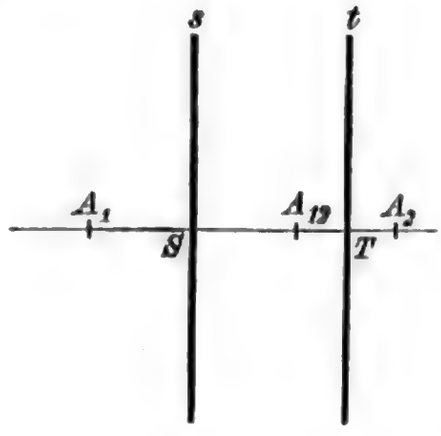
Digitized by Google

wie eine zweite, haben wir stets nur nachzuweisen, dass die drei Eckpunkte eines Dreiecks durch beide Bewegungen aus ihrer Anfangslage in dieselbe Endlage übergeführt werden. Denn in der Kinematik starrer Systeme gilt der

Grundsatz. *Die Lage eines Systems starr verbundener Punkte im Raume ist vollkommen bestimmt, wenn die Lage der drei Eckpunkte eines dem System angehörenden Dreiecks bekannt ist.*

8. Wir untersuchen zuerst, was geschieht mit einem System, welches den Umwendungen *um zwei parallele Geraden* s und t unterworfen ist, d. h. was bedeutet die Operation

$$\{s, t\} \quad \text{wenn} \quad s \parallel t \ ?$$



Ein Punkt, der vor der Bewegung in der Ebene der beiden Geraden in A_1 liegt, gelangt durch die erste Umwendung (um s) in die Lage A_{12}, und von da durch die zweite Umwendung (um t) nach A_2. Dabei liegen, wie A_1, auch A_{12} und A_2 in der Ebene der beiden Geraden, und weil die aus A_1 auf s errichtete Senkrechte auch auf t senkrecht steht, alle drei in einer Geraden, welche von s und t in S und T geschnitten werden möge.

Dann gilt die Streckengleichung (wie auch A_1 in der Ebene liegen mag):

$$\overline{A_1 A_2} = \overline{A_1 S} + \overline{S A_{12}} + \overline{A_{12} T} + \overline{T A_2} \ .$$

Da aber

$$\overline{A_1 S} = \overline{S A_{12}} \ ; \ \overline{A_{12} T} = \overline{T A_2}$$

(nach 5) so wird

$$\overline{A_1 A_2} = \overline{2 S A_{12}} + 2\overline{A_{12} T} = 2\overline{S T} \ .$$

Da die Strecke $\overline{S T}$ der Abstand der Geraden s und t ist [1]), so erfährt jener Punkt eine Schiebung um den doppelten Abstand dieser Geraden, und dasselbe geschieht auch mit jedem anderen Punkt der Ebene.

---

1) Als den *Abstand* zweier Elemente s, t bezeichne ich stets eine (nach Grösse, Richtung und Sinn bestimmte) *Strecke*, die vom ersten Element s nach dem zweiten t hin gerichtet ist.

Denken wir uns nun ein Dreieck der Ebene von s, t, das die Anfangslage $A_1 B_1 C_1$ hat, in dem bewegten starren System enthalten, so geht dasselbe sowohl durch die Schiebung um $2\overline{ST}$, wie auch durch $\{s, t\}$ in die Endlage $A_2 B_2 C_2$ über, und demnach (7.) ist die erste dieser Bewegungen durch die andere ersetzbar. Dies giebt den

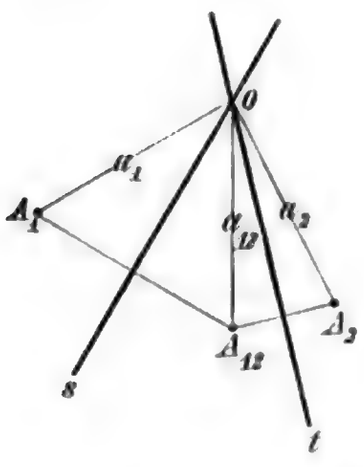
Satz. *Die Folge der Umwendungen um zwei parallele Geraden ist ersetzbar durch eine Schiebung um ihren doppelten Abstand.*

Umkehrung. *Jede Schiebung eines Systems starr verbundener Punkte ist ersetzbar durch Umwendungen um zwei Geraden, von welchen die eine senkrecht zur Schiebungsrichtung, sonst aber beliebig, angenommen werden darf.*

Denn dann kann man eine andere zu jener parallele Gerade so annehmen, dass ihr Abstand der halben Strecke, um welche verschoben wird, gleich ist. Die durch sie erzeugte Bewegung ist dann nach dem »Satze« durch die Schiebung ersetzbar.

Zusatz. *Die Umwendungen um zwei parallele Geraden s, t sind durch diejenigen um zwei andere Geraden s', t' ersetzbar, wenn diese ebenfalls parallel sind, und ihr Abstand*[1]) *dem der ersten gleich ist.*

9. Wir gehen zu dem Falle über, dass *die beiden Geraden s und t sich schneiden*, etwa im Punkte O. Ein Punkt, der vor der Bewegung in der Ebene der beiden Geraden in A_1 liegt, gelangt durch die erste Umwendung (um s) in die Lage A_{12} und von da durch die zweite Umwendung (um t) nach A_2, und es liegen auch A_{12} und A_2 in jener Ebene. Da O bei jeder dieser Bewegungen an seiner Stelle bleibt, so ist:



$$OA_1\{s\}\,OA_{12}\{t\}\,OA_2\ ,$$

also

$$OA_1 = OA_{12} = OA_2$$

d. h. A_1 und A_2 liegen auf demselben Kreise mit dem Mittelpunkt O.

Ferner gilt, wie auch A_1 in seiner Ebene gelegen sein mag, die Winkelgleichung (wenn $OA_1 = a$, $OA_{12} = a_{12}$, $OA_2 = a_2$ gesetzt ist:

1) Vergleiche die vorige Fussnote.

Digitized by Google

$$\measuredangle (a_1 a_2) = (a_1 s) + (s a_{12}) + (a_{12} t) + (t a_2)$$

(abgesehen von Vielfachen einer vollen Umdrehung), und da

$$\measuredangle (a_1 s) = (s a_{12}) \; ; \quad \measuredangle (a_{12} t) = (t a_2) \; ,$$

so wird:

$$\measuredangle (a_1 a_2) = 2(s a_{12}) + 2(a_{12} t) = 2(s t) \; .$$

Daraus folgt, dass jeder Punkt der Ebene durch $\{s, t\}$ eine Drehung um den Punkt O um den Winkel $2(st)$ erfährt, oder was dasselbe heisst, eine Drehung um eine in O auf der Ebene errichtete senkrechte Axe um diesen Winkel. Denken wir uns also ein in jener Ebene gelegenes Dreieck in dem starren System enthalten, so wird dasselbe sowohl durch die Bewegung $\{s, t\}$, wie auch durch die Drehung um jene Axe in die gleiche Endlage gebracht, und wir haben daher (nach 7.) den

Satz. *Die Folge der Umwendungen um zwei sich schneidende Geraden lässt sich ersetzen durch eine Drehung um ihren doppelten Winkel um eine in ihrem Schnittpunkt auf ihrer Ebene senkrecht stehende Axe.*

Umkehrung. *Jede Drehung um eine Axe kann durch Umwendungen um zwei Geraden s, t ersetzt werden, von welchen die eine, jene Axe senkrecht schneidend, sonst aber beliebig, angenommen werden darf.*

Denn nimmt man die andere so an, dass sie die Axe in demselben Punkt senkrecht trifft, und dass der Winkel (st) gleich dem halben Drehwinkel ist, so ist nach dem »Satze« die Bewegung $\{s, t\}$ durch jene Drehung ersetzbar.

Zusatz I. *Die Umwendungen um zwei sich schneidende Geraden s, t sind durch diejenigen um zwei andere sich schneidende Geraden s', t' ersetzbar, wenn alle vier eine Gerade senkrecht treffen, und $\measuredangle (st) = (s' t')$ ist.*

Denn dann ist nach dem »Satze« $\{s, t\}$ und $\{s', t'\}$ durch dieselbe Drehung ersetzbar.

Zusatz II. *Die Umwendungen um zwei einander senkrecht schneidende Geraden sind durch eine einzige zu ersetzen um eine Gerade, welche jene beiden senkrecht trifft.*

Denn nach dem »Satze« beträgt der Drehwinkel zwei Rechte.

Sind also s, t, u drei einander senkrecht treffende Geraden, so ist

$$\{s, t\} = \{u\} \; .$$

Digitized by Google

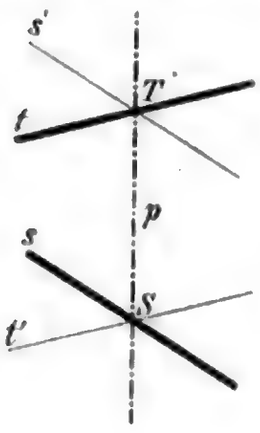
Fügt man dieser Bewegung noch eine Umwendung um u hinzu, so wird:

$$\{s, t, u\} = \{u, u\} = 1 ,$$

d. h.:

Die Umwendungen um drei einander senkrecht schneidende Geraden führen ein System in seine Ausgangslage zurück.

10. Es seien endlich s und t *zwei sich kreuzende Geraden.* Wir suchen dann ihren Abstand, er sei die Strecke $\overline{ST}$, während mit p die Gerade desselben bezeichnet sei. Legen wir nun



durch S die Gerade $t' \parallel t$,

durch T die Gerade $s' \parallel s$,

so wird

$$\{s, t\} = \{s, s', s', t\} = \{(s, s'), (s', t)\}$$

und auch

$$\{s, t\} = \{s, t', t', t\} = \{(s, t'), (t', t)\} ,$$

da ja

$$\{s', s'\} = 1$$

und $$\{t', t'\} = 1 \quad \text{ist.}$$

$\{s, s'\} = \{t', t\}$ bedeutet eine Schiebung um die Strecke $2\,\overline{ST}$, $\{s', t\} = \{s, t'\}$ eine Drehung um die Axe p um den Winkel

$$2\,(s't) = 2\,(st') = 2\,(st) ;$$

$\{s, t\}$ bedeutet also eine Schiebung um die Strecke $2\,\overline{ST}$, verbunden mit einer Drehung um den Winkel $2\,(st)$, oder was dasselbe ist, die umgekehrte Folge dieser beiden Bewegungen, d. i. eine Schraubung um die Axe p, deren Höhe $2\,\overline{ST}$ und deren Winkel $2\,(st)$ beträgt.

Satz. *Die Folge der Umwendungen um zwei sich kreuzende Geraden ist ersetzbar durch eine Schraubung, deren Winkel dem doppelten Winkel, und deren Höhe dem doppelten Abstand der beiden Geraden gleich ist, während die Schraubenaxe mit der Linie dieses Abstandes zusammenfällt.*

Umkehrung. *Jede Schraubung kann durch die Umwendungen um zwei Geraden s, t ersetzt werden, von denen die eine, die Schraubenaxe senkrecht schneidend, sonst aber beliebig angenommen werden darf.*

Denn nimmt man dann die andere Gerade so an, dass sie die Schraubenaxe ebenfalls senkrecht trifft, und dass der Abstand der beiden Geraden gleich der halben Schraubungshöhe, ihr

Digitized by Google

Winkel gleich dem halben Schraubungswinkel ist, so ist nach dem »Satze« $\{s, t\}$ durch die Schraubung ersetzbar.

Zusatz. *Die Umwendungen um zwei sich kreuzende Geraden s, t sind durch diejenigen um zwei andere Geraden s', t' ersetzbar, wenn alle vier dieselbe Gerade senkrecht treffen, und wenn der Abstand und der Winkel von s und t gleich denen von s' und t' ist.*

Denn nach dem »Satze« ist dann $\{s, t\}$, und $\{s', t'\}$ durch dieselbe Schraubung ersetzbar.

Einen *besonderen Fall* bekommen wir hier wieder, wenn dieser Winkel ein rechter ist, der Winkel der Schraubung also zwei Rechte. Wir nennen dann die Bewegung eine *halbe Umschraubung.*

Auch die früheren Elementarbewegungen *Schiebung* und *Drehung* können als besondere Fälle der Schraubung betrachtet werden, sofern entweder der Schraubungswinkel, oder die Schraubungshöhe Null wird.

III. Die Zusammensetzung zweier Schraubungen.

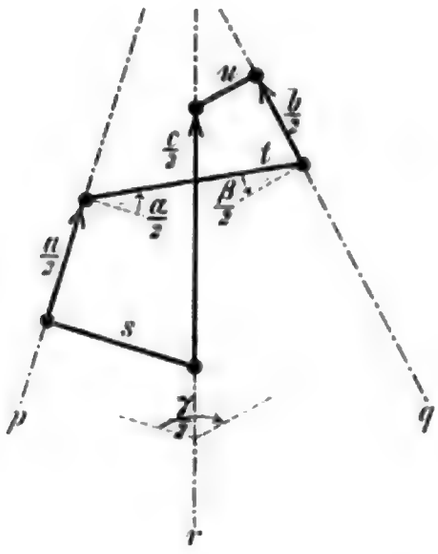
11. Die Zusammensetzung zweier Strecken a und b geschieht so, dass man irgend einen Punkt des Raumes — er heisse T — wählt, und ihn zum Endpunkt und zum Anfangspunkt je einer Strecke macht, von denen die erste gleich a, die zweite gleich b ist. Dann setzt man die Strecken $\overline{ST}$ und $\overline{TU}$ einfach zusammen, indem man den gemeinsam vorkommenden Punkt T weglässt, und S als Anfangspunkt, T als Endpunkt einer neuen Strecke $\overline{S\,T}$ betrachtet, welche die gesuchte ist.

Ganz analog verfahren wir bei der Zusammensetzung zweier Schraubungen. Es giebt stets eine Gerade — sie heisse t — welche gleichzeitig zur Darstellung zweier gegebenen Schraubungen benutzt werden kann, es ist das diejenige (10., Umkehrung), welche die beiden Schraubenaxen gleichzeitig senkrecht trifft. (Artet die eine Schraubung zur Schiebung aus, so giebt es sogar unendlich viele, von denen irgend eine t sei. Diese Gerade t wählen wir als *zweite* des Geradenpaares welches die erste Schraubung ersetzt, und als *erste* desjenigen das die zweite ersetzt, so dass die erste durch $\{s, t\}$, die zweite durch $\{t, u\}$ ausgedrückt werden kann, wo s und u eindeutig bestimmte Geraden sind (10., Umkehrung). Statt die Folge der

Digitized by Google

beiden Schraubungen auszuführen, kann man also erst eine Umwendung um s und eine zweite um t, hierauf wieder eine Umwendung um t und eine weitere um u ausführen. Da aber eine zweimal hinter einander erfolgte Umwendung um t keine Lagenveränderung hervorbringt, so ist durch $\{s,u\}$ eine Schraubung bestimmt, welche die Folge der beiden gegebenen ersetzt. D. h.

Aufgabe. *Es seien zwei Schraubungen durch Axe, Höhe*[1] *und Winkel, p, a, α bezw. q, b, β gegeben, es sind diese Stücke r, c, γ für diejenige Schraubung zu suchen, welche dieselbe Lagenveränderung hervorbringt, wie die Folge der gegebenen.*



Lösung. Man bestimme die Gerade t, welche zugleich p und q senkrecht schneidet, lege dann eine Gerade s so, dass sie p senkrecht trifft, und dass Abstand und Winkel der beiden Geraden s und t gleich $\frac{1}{2}a$ und $\frac{1}{2}\alpha$ ist, ebenso die Gerade u so, dass sie q senkrecht trifft, und dass Abstand und Winkel der Geraden t und u gleich $\frac{1}{2}b$ und $\frac{1}{2}\beta$ ist.

Dann ist die Gerade r, welche s und u senkrecht trifft, die gesuchte Schraubenaxe; Abstand und Winkel der Geraden s und u sind die halbe Höhe und der halbe Winkel der gesuchten Schraubung, $\frac{1}{2}c$ und $\frac{1}{2}\gamma$.

Beweis. Nach 10., Umkehrung ist die erste Schraubung durch $\{s, t\}$, die zweite durch $\{t, u\}$ zu ersetzen, ihre Folge also durch

$$\{s, t, t, u\} = \{s, u\}$$

(nach 4.).

Zusatz I. *Die halbe gesuchte Schraubungshöhe ist gleich der Projection der Streckensumme, gebildet aus den halben gegebenen Schraubungshöhen und dem kürzesten Abstand der ersten gegebenen Schraubenaxe von der zweiten, auf die gesuchte Schraubenaxe.*

Denn diese Streckensumme ist gleich der Strecke, die ihren

---

1) Die Höhen a, b, c sind Strecken von bestimmtem Sinn, wie auch den Winkeln α, β, γ ein Sinn zukommt, der stets von der ersten Geraden nach der zweiten geht.

Digitized by

Anfangspunkt im Schnittpunkt von s und p, ihren Endpunkt im Schnittpunkt von q und u hat. Und da jener Punkt durch s, dieser durch u auf r projicirt wird, so ist $\frac{1}{2}c$ die Projection der Streckensumme auf r.[1])

Zusatz II. *Der gesuchte Schraubungswinkel und die Richtung der gesuchten Schraubenaxe ist gleich denjenigen einer Drehung, welche man durch Zusammensetzung zweier Drehungen um sich schneidende Axen erhält, deren Axenrichtungen und Drehwinkel denen der gegebenen Schraubungen gleich sind.*

Denn setzt man a und b gleich Null, und verschiebt p und q so, dass sie sich in einem Punkte O treffen, so gehen bei Verwendung derselben Winkel α und β die Geraden s, t, u, parallel zu ihrer früheren Lage, durch O, und $\{s, u\}$ stellt eine Drehung dar, deren Axe zu r parallel durch O geht, und deren Winkel gleich γ ist (9.).

Dadurch haben wir zugleich den Satz erhalten:

Zwei Drehungen, deren Axen sich in einem Punkte treffen, sind durch eine einzige zu ersetzen, deren Axe durch denselben Punkt geht.

In gleicher Weise lassen sich die übrigen bekannten Sätze über Zusammensetzung besonderer Bewegungen aus der allgemeinen Construction ablesen.

---

1) Der Zusatz I ist nur für den besonderen Fall der Zusammensetzung zweier *Drehungen* ($a = 0$, $b = 0$) bekannt. Man vergleiche SCHELL: »Theorie der Bewegung und der Kräfte« 2. Auflage, I. Bd., S. 180—182.

M. Krause, *Ueber die Multiplication der doppelt periodischen Functionen zweiter Art.*

Im Folgenden soll die Multiplication der doppelt periodischen Functionen zweiter Art behandelt werden. Soweit dem Verfasser bekannt, ist dieses Thema nur in einer Arbeit von Herrn Frobenius im 92ten Bande des Kronecker'schen Journals behandelt. Die Art, in welcher Herr Frobenius das genannte Thema auffasst, ist aber von der folgenden so verschieden, dass von seinen Betrachtungen für den vorliegenden Zweck füglich abgesehen werden kann.

Es soll nun das genannte Thema nach doppelter Richtung hin untersucht werden. Erstens sollen die Ausdrücke

$$\frac{\vartheta_\alpha(nv - na)}{\vartheta_\beta(nv)}$$

durch die entsprechenden ursprünglichen und durch die elliptischen Functionen mit den Argumenten w und a ausgedrückt werden, zweitens soll dasselbe Problem für die Function:

$$\frac{\vartheta_\alpha(nv + a)}{\vartheta_\beta(nv)}$$

gelöst werden. In beiden Fällen wird die Form der Lösung auf Grund des Hermite'schen Transformationsprincipes festgestellt und zwar auf zweierlei Arten. Für die zu bestimmenden Coefficienten wird eine Reihe von Relationen entwickelt, dann aber Differentialgleichungen aufgestellt, mit deren Hülfe dieselben gefunden werden können. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf specielle Indices und zwar die Indices $\alpha = 0, \beta = 0$. Im allgemeinen Falle können die Resultate theils aus den gefundenen entwickelt werden, theils auf analogem Wege hergestellt werden.

Digitized by Google

§ 1.

Untersuchung der Function $\vartheta_0(nv - na):\vartheta_0(nv)$.

Nehmen wir zunächst an, dass n eine gerade Zahl sei und verstehen unter $a_0, a_1, \ldots a_{n^2}$ ebenso viele willkürliche Constanten, so ist die Function:

$$\vartheta_0(nv-na)(a_0\cdot\vartheta_0^{2n^2}(v)+a_1\cdot\vartheta_0^{2n^2-2}(v)\cdot\vartheta_1^2(v)+\cdots a_{n^2}\cdot\vartheta_1^{2n^2}(v))$$

eine doppelt periodische Function dritter Art, von der Ordnungszahl $3n^2$ und der Charakteristik 0, 0, die überdies schon n^2+1 Constanten linear in sich enthält. Hieraus folgt die Darstellung derselben in der Form:

$$\vartheta_0(v-a)^{n^2}\{b_0\cdot\vartheta_0^{2n^2}(v)+\cdots b_{n^2}\cdot\vartheta_1^{2n^2}(v)+\vartheta_1(v)\cdot\vartheta_2(v)\cdot\vartheta_3(v)\cdot\vartheta_0(v)$$

$$\cdot(b_0'\cdot\vartheta_0^{2n^2-4}(v)+\cdots b'_{n^2-2}\cdot\vartheta_1^{2n^2-4}(v))\}\ .$$

Führen wir die elliptischen Functionen mit den Argumenten:

$$w=\pi\cdot\vartheta_3^2\cdot v\ ,\quad \alpha=\pi\cdot\vartheta_3^2\cdot a$$

ein, so erhalten wir jedenfalls eine Gleichung von der Form:

$$(1)\qquad \vartheta_0^{n^2-1}\cdot\vartheta_0(nv-na)\cdot\sum_0^{n^2}{}_r\ a_r\cdot\mathrm{sn}^{2r}(w)=$$

$$\vartheta_0(v-a)^{n^2}\cdot\left[\sum_0^{n^2}{}_r b_r\cdot\mathrm{sn}^{2r}(w)+\mathrm{sn}\,w\cdot\mathrm{cn}\,w\cdot\mathrm{dn}\,w\sum_0^{n^2-2}{}_r b_r'\cdot\mathrm{sn}^{2r}(w)\right],$$

wobei unter den Constanten a, b, b' jetzt andere Grössen wie vorher zu verstehen sind.

Die rechte Seite wird n^2 mal Null, wenn $v=a+\frac{\tau}{2}$ gesetzt wird, die linke also auch, und da $\vartheta_0(nv-na)$ für den genannten Werth von Null verschieden ist, so folgt, dass:

$$\sum_0^{n^2}{}_r\ a_r\cdot\mathrm{sn}^{2r}(w)$$

für $\mathrm{sn}\,w=\frac{1}{\varkappa\,\mathrm{sn}\,\alpha}$ n^2 mal der Null gleich werden muss.

Hieraus folgt, dass wir schreiben können:

Digitized by Google

$$(2)\qquad \vartheta_0^{\,n^2-1}\cdot\vartheta_0(nv-na)\,(1-k^2\,\mathrm{sn}^2 w\cdot\mathrm{sn}^2\alpha)^{n^2}=$$

$$\vartheta_0(v-a)^{n^2}\Big[\sum_0^{n^2}{}_r\, b_r\cdot\mathrm{sn}^{2r}w+\mathrm{sn}\,w\cdot\mathrm{cn}\,w\cdot\mathrm{dn}\,w\sum_0^{n^2-2}{}_r\, b_r'\,\mathrm{sn}^{2r}w\Big],$$

wobei unter den Constanten b und b' wieder andere Grössen wie vorhin zu verstehen sind.

Es hätte dieses Resultat auch aus der gewöhnlichen Theorie der Multiplication der Thetafunctionen unter Zuhülfenahme des Additionstheoremes der elliptischen Functionen abgeleitet werden können. Vermöge der ersteren Theorie ist ferner:

$$(3)\qquad \vartheta_0^{\,n^2-1}\cdot\vartheta_0(nv,n\tau)=\vartheta_0(v)^{n^2}\sum_0^{\frac{n^2}{2}}{}_r\, c_r\cdot\mathrm{sn}^{2r}(w)\ .$$

Durch Division ergiebt sich die Form:

$$(4)\qquad \frac{\vartheta_0(nv-na)}{\vartheta_0(nv)}=\frac{\vartheta_0(v-a)^{n^2}}{\vartheta_0(v)^{n^2}}\cdot\frac{f_1(x)+\mathrm{sn}\,w\cdot\mathrm{cn}\,w\cdot\mathrm{dn}\,w\cdot f_2(x)}{(1-k^2\cdot\mathrm{sn}^2 w\cdot\mathrm{sn}^2\alpha)^{n^2}\cdot f_3(x)},$$

wenn unter $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ ganze Functionen der Veränderlichen

$$x=\mathrm{sn}^2 w$$

von den resp. Graden n^2, n^2-2, $\frac{n^2}{2}$ verstanden sind.

Für ein ungerades n ergiebt sich analog die Form:

$$(5)\qquad \frac{\vartheta_0(nv-na)}{\vartheta_0(nv)}=\frac{\vartheta_0(v-a)^{n^2}}{\vartheta_0(v)^{n^2}}\cdot\frac{\varphi_1(x)+\mathrm{sn}\,w\cdot\mathrm{cn}\,w\cdot\mathrm{dn}\,w\cdot\varphi_2(x)}{(1-k^2\cdot\mathrm{sn}^2 w\cdot\mathrm{sn}^2\alpha)^{n^2-1}\cdot\varphi_3(x)},$$

wobei unter $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ ganze Functionen von x von den resp. Graden n^2-1, n^2-3, $\frac{n^2-1}{2}$ zu verstehen sind.

Die Coefficienten können aus den Formeln (2) und (3) und den entsprechenden für ungerade n durch Reihenentwickelungen bestimmt werden. Hierbei bemerken wir, dass die Function:

$$\frac{\vartheta_0^{\,n^2-1}\cdot\vartheta_0(nv-na)}{\vartheta_0(v-a)^{n^2}}$$

Digitized by Google

sich nach Potenzen von w entwickeln lässt, so zwar, dass die Coefficienten sich rational aus den elliptischen Functionen mit dem Argumente α und der Grösse k^2 darstellen lassen. Aus denselben Grössen setzen sich demnach die Coefficienten in den Functionen f und φ rational zusammen.

Diese Bestimmung durch Reihenentwickelungen ist aber eine sehr complicirte, und es dürfte sich daher empfehlen, vermöge anderer Betrachtungen entweder Relationen zwischen den Coefficienten herzustellen oder andere Methoden der Coefficientenbestimmung zu geben. Hierbei sehen wir von dem Nenner ab, indem wir in Bezug auf ihn auf die Arbeiten über die Multiplication der Theta- resp. elliptischen Functionen verweisen.

Zunächst erhalten wir einige Relationen mit Hülfe der Substitution halber Perioden.

Wir hatten für ein gerades n die Formel gefunden:

$$\vartheta_0(nv - na)\cdot\vartheta_0^{n^2-1}\cdot(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha\cdot\mathrm{sn}^2 w)^{n^2} = \vartheta_0(v-a)^{n^2}\cdot F\,,$$

$$F = \sum_0^{n^2} r\; b_r\cdot\mathrm{sn}^{2r} w + \mathrm{sn}\,w\cdot\mathrm{cn}\,w\cdot\mathrm{dn}\,w\sum_0^{n^2-2} r\; b_r'\cdot\mathrm{sn}^{2r} w\,.$$

Wir wollen nun gleichzeitig v und a um $\frac{\tau}{2}$ vermehren. Dann bleibt sowohl $\vartheta_0(v-a)$ als auch $\vartheta_0(nv-na)$ ungeändert, ferner gehen die Ausdrücke:

$$\mathrm{sn}\,w\,,\quad \mathrm{cn}\,w\cdot\mathrm{dn}\,w\,,\quad \mathrm{sn}\,\alpha\,,\quad \mathrm{cn}\,\alpha\cdot\mathrm{dn}\,\alpha$$

resp. über in:

$$\frac{1}{k\cdot\mathrm{sn}\,w}\,,\quad -\frac{\mathrm{cn}\,w\cdot\mathrm{dn}\,w}{k\cdot\mathrm{sn}^2 w}\,,\quad \frac{1}{k\cdot\mathrm{sn}\,\alpha}\,,\quad -\frac{\mathrm{cn}\,\alpha\cdot\mathrm{dn}\,\alpha}{k\cdot\mathrm{sn}^2\alpha}\,.$$

Die neuen Coefficienten b und b' auf der rechten Seite wollen wir durch die entsprechenden griechischen Buchstaben β bezeichnen.

Dann wird

$$(6)\qquad \vartheta_0(nv-na)\cdot\vartheta_0^{n^2-1}(1-k^2\cdot\mathrm{sn}^2\alpha\cdot\mathrm{sn}^2 w)^{n^2} = (k^2\cdot\mathrm{sn}^2\alpha)^{n^2}\,\vartheta_0(v-a)^{n^2}\cdot F_1\,,$$

$$F_1 = \sum_0^{n^2} r\;\frac{\beta_r}{k^{2r}}\cdot\mathrm{sn}^{2n^2-2r} w - \frac{\mathrm{sn}\,w\cdot\mathrm{cn}\,w\cdot\mathrm{dn}\,w}{k^2}\sum_0^{n^2-2} r\;\frac{\beta_r'}{k^{2r}}\cdot\mathrm{sn}^{2n^2-2r-4} w\,.$$

Digitized by Google

Mithin erhalten wir durch Coefficientenvergleichung:

$$(7) \qquad b_0 = \beta_{n^2} \cdot \mathrm{sn}^{2n^2}\alpha\,, \quad b_1 = \beta_{n^2-1} \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^{2n^2}\alpha\,, \quad \cdots$$

$$b_{n^2} = \beta_0 \cdot k^{2n^2} \cdot \mathrm{sn}^{2n^2}\alpha\,,$$

$$b_0' = -\beta'_{n^2-2} \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^{2n^2}\alpha\,, \quad b_1' = -\beta'_{n^2-3} \cdot k^4 \cdot \mathrm{sn}^{2n^2}\alpha\,, \cdots$$

$$b_{n^2-2} = \beta_0' k^{2n^2-2} \cdot \mathrm{sn}^{2n^2}\alpha\,.$$

Da nun das Gesetz, mit dessen Hülfe die Grössen β aus den Grössen b entstanden sind, unmittelbar gegeben ist, so folgt, dass nur n^2+1 Coefficienten wirklich berechnet zu werden brauchen. Die übrigen ergeben sich aus ihnen vermöge der soeben hingeschriebenen Relationen.

Weitere Relationen ergeben sich auf Grund der linearen Transformation der Thetafunctionen und zwar, indem wir die Transformationszahlen a_0, a_1, b_0, b_1 resp. setzen gleich 1, 1, 0, 1.

Dann folgt, dass der Ausdruck für:

$$\frac{\vartheta_0(nv - na)\cdot \vartheta_0^{\,n^2-1}}{\vartheta_0(v-a)^{n^2}}$$

ungeändert bleibt, wenn wir an Stelle von:

$$k\,,\ \mathrm{sn}\,w\,,\ \mathrm{sn}\,\alpha\,,\ \mathrm{cn}\,w\,,\ \mathrm{cn}\,\alpha\,,\ \mathrm{dn}\,w\,,\ \mathrm{dn}\,\alpha$$

resp. setzen:

$$\frac{1}{k}\,,\ k\cdot\mathrm{sn}\,w\,,\ k\cdot\mathrm{sn}\,\alpha\,,\ \mathrm{dn}\,w\,,\ \mathrm{dn}\,\alpha\,,\ \mathrm{cn}\,w\,,\ \mathrm{cn}\,\alpha\,.$$

Nehmen wir als Beispiel $n=2$.

Wir können den Ansatz machen:

$$(8) \qquad \vartheta_0(2v-2a)\cdot\vartheta_0^3\cdot(1-k^2\cdot\mathrm{sn}^2\alpha\cdot\mathrm{sn}^2 w)^4 = \vartheta_0(v-a)^4\cdot F\,,$$

$$F = b_0 + b_1\cdot\mathrm{sn}^2 w + b_2\cdot\mathrm{sn}^4 w + b_3\cdot\mathrm{sn}^6 w + b_4\cdot\mathrm{sn}^8 w +$$
$$\mathrm{sn}\,w\cdot\mathrm{cn}\,w\cdot\mathrm{dn}\,w\,(b_0' + b_1'\cdot\mathrm{sn}^2 w + b_2'\cdot\mathrm{sn}^4 w)\,.$$

Es genügt dann, die Grössen $b_0, b_1, b_2, b_0', b_1'$ zu kennen, um auch die Grössen b_3, b_4, b_2' zu kennen. Die ersteren ergeben sich leicht etwa mit Hülfe der Multiplication der Thetafunctionen.

$$b_0 = 1 - k^2\cdot\mathrm{sn}^4\alpha\,,$$

$$b_1 = k^2(-10\cdot\mathrm{sn}^2\alpha + 8(1+k^2)\mathrm{sn}^4\alpha - 6k^2\cdot\mathrm{sn}^6\alpha)\,,$$

Digitized by Google

$$b_2 = k^2 \cdot \mathrm{sn}^4\alpha\,(-k^2 + 8k^2(1+k^2)\mathrm{sn}^2\alpha - (8+14k^2+8k^4)k^2 \cdot \mathrm{sn}^4\alpha + 8k^4(1+k^2)\,\mathrm{sn}^6\alpha - k^6 \cdot \mathrm{sn}^8\alpha)\,,$$

$$b_0' = -4k^2 \cdot \mathrm{sn}^3\alpha \cdot \mathrm{cn}\alpha \cdot \mathrm{dn}\alpha\,,$$

$$b_1' = -4k^2 \cdot \mathrm{sn}\alpha \cdot \mathrm{cn}\alpha \cdot \mathrm{dn}\alpha\,(1 - 2(1+k^2)\,\mathrm{sn}^2\alpha + k^2 \cdot \mathrm{sn}^4\alpha)\,.$$

Daraus folgt dann sofort:

$$b_3 = k^2(-6k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\alpha + 8k^2(1+k^2)\,\mathrm{sn}^4\alpha - 10k^4 \cdot \mathrm{sn}^6\alpha)\,,$$

$$b_4 = k^6 \cdot \mathrm{sn}^4\alpha\,(k^4 \cdot \mathrm{sn}^4\alpha - 1)\,,$$

$$b_2' = -4k^4 \cdot \mathrm{sn}^3\alpha \cdot \mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha\,.$$

Dass hierbei die Relationen der linearen Transformationen erfüllt sind, folgt sofort.

Genau so ist der Fall des ungeraden n zu behandeln.

Die soeben entwickelten Sätze lassen aber noch immer eine Reihe von Coefficienten unbestimmt.

Wir werden später zeigen, wie man dieselben mit Hülfe einer Differentialgleichung berechnen kann. Vorher aber geben wir noch eine zweite Darstellung des ursprünglichen Problems.

Sei n eine gerade Zahl, so können wir setzen:

$$\vartheta_0(nv - na)\{a_0 \cdot \vartheta_0(v)^{n^2+1} + \cdots$$

$$a_{\frac{n^2}{2}} \cdot \vartheta_0(v) \cdot \vartheta_1(v)^{n^2} + \vartheta_1(v) \cdot \vartheta_2(v) \cdot \vartheta_3(v)(a_0' \cdot \vartheta_0(v)^{n^2-2} + \cdots$$

$$a'_{\frac{n^2}{2}-1} \cdot \vartheta_1(v)^{n^2-2})\} =$$

$$\vartheta_0(v-a)^{n^2}\{b_0 \cdot \vartheta_0(v)^{n^2+1} + \cdots$$

$$b_{\frac{n^2}{2}} \cdot \vartheta_0(v) \cdot \vartheta_1(v)^{n^2} + \vartheta_1(v) \cdot \vartheta_2(v) \cdot \vartheta_3(v)\,(b_0' \cdot \vartheta_0(v)^{n^2-2} + \cdots$$

$$b'_{\frac{n^2}{2}-1} \cdot \vartheta_1(v)^{n^2-2})\}\,,$$

wobei die Grössen a, a', b, b' zu bestimmende Constanten bedeuten.

Hieraus folgt, wenn wir unter a, a', b, b' andere Constanten wie soeben verstehen, dass wir setzen können:

Digitized by Google

$$(9)\quad \vartheta_0(nv-na)\cdot\vartheta_0^{n^2-1}\left(\sum_0^{\frac{n^2}{2}} r\, a_r\cdot \mathrm{sn}^{2r} w+\mathrm{sn}w\cdot\mathrm{cn}w\cdot\mathrm{dn}w\sum_0^{\frac{n^2}{2}-1} r\, a_r'\cdot\mathrm{sn}^{2r} w\right)=$$

$$\vartheta_0(v-a)^{n^2}\left(\sum_0^{\frac{n^2}{2}} r\, b_r\cdot\mathrm{sn}^{2r} w+\mathrm{sn}w\cdot\mathrm{cn}w\cdot\mathrm{dn}w\sum_0^{\frac{n^2}{2}-1} r\, b_r'\cdot\mathrm{sn}^{2r} w\right).$$

Hieraus folgt:

$$(10)\qquad \frac{\vartheta_0(nv-na)}{\vartheta_0(nv)}=$$

$$\frac{\vartheta_0(v-a)^{n^2}}{\vartheta_0(v)^{n^2}}\cdot\frac{\varphi_1(x)+\mathrm{sn}\,w\cdot\mathrm{cn}\,w\cdot\mathrm{dn}\,w\cdot\varphi_2(x)}{(\varphi_3(x)+\mathrm{sn}\,w\cdot\mathrm{cn}\,w\cdot\mathrm{dn}\,w\cdot\varphi_4(x))\,\varphi_5(x)},$$

wobei die Functionen $\varphi_1(x)$, $\varphi_3(x)$, $\varphi_5(x)$ ganze Functionen von $x=\mathrm{sn}^2 w$ vom Grade $\frac{n^2}{2}$, die Functionen $\varphi_2(x)$ und $\varphi_4(x)$ vom Grade $\frac{n^2}{2}-1$ sind. Die Coefficienten setzen sich rational aus den elliptischen Functionen mit dem Argumente a und k^2 zusammen.

Wir haben also eine zweite Darstellung desselben Quotienten für gerade n erhalten. Die Grade der Functionen, die bei dieser zweiten Form auftreten, sind niedriger als bei der ersten. Auf die Gründe hiervon möge bei dieser Gelegenheit nicht näher eingegangen werden. Wir verweisen in Bezug auf derartige Betrachtungen auf einige Arbeiten von Herrn KRONECKER über die Multiplication der elliptischen Functionen, die sich in den Berichten der Berliner Akademie befinden.

Ganz analog ist der Fall eines ungeraden n zu behandeln. Wir wollen bei der Berechnung der einzelnen Coefficienten von der Substitution halber Perioden und der linearen Transformation absehen und beschränken uns auf die folgenden Bemerkungen.

Wir legen die Gleichung zu Grunde — n wieder als gerade vorausgesetzt —:

Digitized by Google

$$\vartheta_0(nv-na)\cdot\vartheta_0^{n^2-1}\left(\sum_0^{\frac{n^2}{2}} a_r\cdot \mathrm{sn}^{2r} w+\mathrm{sn}\,w\cdot\mathrm{cn}\,w\cdot\mathrm{dn}\,w\sum_0^{\frac{n^2}{2}-1} a_r'\cdot\mathrm{sn}^{2r} w\right)=$$

$$\vartheta_0(v-a)^{n^2}\left(\sum_0^{\frac{n^2}{2}} b_r\cdot\mathrm{sn}^{2r} w+\mathrm{sn}\,w\cdot\mathrm{cn}\,w\cdot\mathrm{dn}\,w\sum_0^{\frac{n^2}{2}-1} b_r'\cdot\mathrm{sn}^{2r} w\right).$$

Die Constanten a und a' sind dann durch die Bedingung zu bestimmen, dass:

$$\sum_0^{\frac{n^2}{2}} a_r\cdot\mathrm{sn}^{2r} w+\mathrm{sn}\cdot w\cdot\mathrm{cn}\cdot w\cdot\mathrm{dn}\,w\sum_0^{\frac{n^2}{2}-1} a_r'\cdot\mathrm{sn}^{2r} w$$

für $v=a+\frac{\tau}{2}n^2$ mal der Null gleich wird.

Setzen wir an Stelle von v: $v+\frac{\tau}{2}$, so geht der letzte Ausdruck von einer Potenz von $\mathrm{sn}\,w$ abgesehen über in:

$$\mathrm{sn}\,w\sum_0^{\frac{n^2}{2}} a_r\cdot\frac{\mathrm{sn}^{n^2-2r} w}{k^{2r}}-\frac{\mathrm{cn}\,w\cdot\mathrm{dn}\,w}{k^2}\sum_0^{\frac{n^2}{2}-1} a_r'\cdot\frac{\mathrm{sn}^{n^2-2r-2} w}{k^{2r}},$$

und dieser müsste für $w=\alpha$ n^2mal der Null gleich sein. Daraus folgt, dass wir ihn jedenfalls in die Form bringen können:

$$c_1(\mathrm{sn}^2 w-\mathrm{sn}^2\alpha)^{\frac{n^2}{2}}\mathrm{sn}\,w+$$

$$c_2(\mathrm{sn}^2 w-\mathrm{sn}^2\alpha)^{\frac{n^2}{2}-1}(\mathrm{sn}\alpha\cdot\mathrm{cn}\,w\cdot\mathrm{dn}\,w-\mathrm{sn}\,w\cdot\mathrm{cn}\,\alpha\cdot\mathrm{dn}\,\alpha)+$$

$$c_3(\mathrm{sn}^2 w-\mathrm{sn}^2\alpha)^{\frac{n^2}{2}-2}(\mathrm{sn}\,\alpha\cdot\mathrm{cn}\,w\cdot\mathrm{dn}\,w-\mathrm{sn}w\cdot\mathrm{cn}\,\alpha\cdot\mathrm{dn}\,\alpha)^2\,\mathrm{sn}\,w+$$

$$c_{\frac{n^2}{2}+1}(\mathrm{sn}\,\alpha\cdot\mathrm{cn}\,w\cdot\mathrm{dn}\,w-\mathrm{sn}\,w\ \mathrm{cn}\,\alpha\cdot\mathrm{dn}\,\alpha)^{\frac{n^2}{2}}\mathrm{sn}\,w.$$

In der That, dieser Ausdruck hat die verlangte Form, wird $\frac{n^2}{2}$ mal gleich Null für $w=\alpha$ und erhält $\frac{n^2}{2}+1$ weitere Constanten in sich.

Auf diesem Wege ist die Zahl der zu bestimmenden Constanten um $\frac{n^2}{2}$ verringert worden.

Nehmen wir den Fall $n = 2$, so haben wir zu setzen:

$$(11)\quad \vartheta_0(2v-2a)\cdot\vartheta_0^3(a_0+a_1\cdot\mathrm{sn}^2w+a_2\cdot\mathrm{sn}^4w+\mathrm{sn}w\cdot\mathrm{cn}w\cdot\mathrm{dn}w(a_0'+a_1'\cdot\mathrm{sn}^2w))=$$
$$\vartheta_0(v-a)^4(b_0+b_1\cdot\mathrm{sn}^2w+b_2\cdot\mathrm{sn}^4w+\mathrm{sn}w\cdot\mathrm{cn}w\cdot\mathrm{dn}w(b_0'+b_1'\cdot\mathrm{sn}^2w)).$$

Um die Constanten auf der linken Seite zu finden, haben wir die Constanten c so zu bestimmen, dass der Ausdruck:

$$c_1(\mathrm{sn}^2w-\mathrm{sn}^2\alpha)^2\,\mathrm{sn}\,w+$$
$$c_2(\mathrm{sn}^2w-\mathrm{sn}^2\alpha)(\mathrm{sn}\alpha\cdot\mathrm{cn}w\cdot\mathrm{dn}w-\mathrm{sn}w\cdot\mathrm{cn}\alpha\cdot\mathrm{dn}\alpha)+$$
$$c_3(\mathrm{sn}\alpha\cdot\mathrm{cn}w\cdot\mathrm{dn}w-\mathrm{sn}w\cdot\mathrm{cn}\alpha\cdot\mathrm{dn}\alpha)^2\,\mathrm{sn}w$$

viermal für $w=\alpha$ der Null gleich wird.

Wir setzen:

$$f_1=\mathrm{sn}^2w-\mathrm{sn}^2\alpha\,,$$
$$f_2=\mathrm{sn}\alpha\cdot\mathrm{cn}w\cdot\mathrm{dn}w-\mathrm{sn}w\cdot\mathrm{cn}\alpha\cdot\mathrm{dn}\alpha\,,$$

so können wir unseren Ausdruck schreiben:

$$c_1f_1^2\cdot\mathrm{sn}\,w+c_2f_1\cdot f_2+c_3f_2^2\cdot\mathrm{sn}\,w\,.$$

Die Constanten sind aus den Gleichungen bestimmt:

$$(12)\quad c_1\cdot\mathrm{sn}\alpha\cdot\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2+c_2\cdot\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)+c_3\cdot\mathrm{sn}\,\alpha\cdot\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2=0\,,$$
$$2c_1\left[\mathrm{sn}\alpha\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\right)+\mathrm{cn}\,\alpha\cdot\mathrm{dn}\,\alpha\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2\right]+$$
$$c_2\left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\right)\right]+$$
$$2c_3\left[\mathrm{sn}\,\alpha\cdot\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}\right)+\mathrm{cn}\,\alpha\cdot\mathrm{dn}\,\alpha\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2\right]=0\,,$$

wobei $x=\mathrm{sn}\,w$ gesetzt ist, und die Klammern bedeuten, dass die Differentialquotienten für den Punkt $x=\mathrm{sn}\,\alpha$ zu bilden sind.

Daraus folgt:

$$c_1:c_2:c_3=D_1:D_2:D_3\,,$$

wenn gesetzt ist:

Digitized by Google

$$D_1 = \operatorname{sn}\alpha\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2\left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\right)\right] + 2\operatorname{cn}\alpha\cdot\operatorname{dn}\alpha\cdot\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^3,$$

$$D_2 = -2\operatorname{sn}^2\alpha\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)\left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\right)\right];$$

$$D_3 = \operatorname{sn}\alpha\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2\left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\right)\right] - 2\operatorname{cn}\alpha\cdot\operatorname{dn}\alpha\cdot\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^3\cdot\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right).$$

Nun ist:

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right) = 2\operatorname{sn}\alpha\cdot\operatorname{cn}\alpha\cdot\operatorname{dn}\alpha,$$

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right) = -1 + k^2\operatorname{sn}^4\alpha,$$

$$\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\right) = 2 - 4(1+k^2)\operatorname{sn}^2\alpha + 6k^2\operatorname{sn}^4\alpha,$$

$$\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}\right) = 4k^2\operatorname{sn}^3\alpha\cdot\operatorname{cn}\alpha\cdot\operatorname{dn}\alpha.$$

Mithin folgt:

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\right) =$$

$$2 - 4(1+k^2)\operatorname{sn}^2\alpha + 12k^2\operatorname{sn}^4\alpha - 4k^2(1+k^2)\operatorname{sn}^6\alpha + 2k^4\operatorname{sn}^8\alpha.$$

Hieraus sind dann die Grössen c bestimmt, wenn wir noch hinzunehmen, dass eine derselbe willkürlich angenommen werden kann. Aus den Grössen c folgen unmittelbar die Grössen a und a'. Es bleibt nur übrig, die Grössen b und b' zu bestimmen. Setzen wir $w = 0$, so folgt:

$$\frac{\vartheta_0^3\cdot\vartheta_0(2a)}{\vartheta_0(a)^4}a_0 = b_0$$

oder also:

$$b_0 = a_0(1 - k^2\operatorname{sn}^4\alpha).$$

Ferner folgt durch Vermehrung von v um $\frac{\tau}{2}$ die Gleichung:

Digitized by Google

$$-\vartheta_0^3\cdot\vartheta_0(2v-2a)\left[a_0\cdot\mathrm{sn}^3 w+\frac{a_1}{k^2}\cdot\mathrm{sn}^3 w+\frac{a_2}{k^4}\cdot\mathrm{sn}\,w-\frac{\mathrm{cn}\,w\cdot\mathrm{dn}\,w}{k^2}\left(a_0'\cdot\mathrm{sn}^2 w+\frac{a_1'}{k^2}\right)\right]=$$

$$\vartheta_1(v-a)^4\left[b_0\cdot\mathrm{sn}^5 w+\frac{b_1}{k^2}\cdot\mathrm{sn}^3 w+\frac{b_2}{k^4}\cdot\mathrm{sn}\,w-\frac{\mathrm{cn}\,w\cdot\mathrm{dn}\,w}{k^2}\left(b_0'\cdot\mathrm{sn}^2 w+\frac{b_1'}{k^2}\right)\right].$$

Also ergiebt sich:

$$\frac{-\vartheta_0^3\cdot\vartheta_0(2a)}{\vartheta_1(a)^4}a_1'=b_1'$$

oder also:

$$b_1'=a_1'\left(1-\frac{1}{k^2\,\mathrm{sn}^4\alpha}\right).$$

Ferner folgt durch Vergleichung der Coefficienten von w links und rechts:

$$b_0'=-4a_0\cdot k^2\,\mathrm{sn}^3\alpha\cdot\mathrm{cn}\,\alpha\cdot\mathrm{dn}\,\alpha+a_0'(1-k^2\cdot\mathrm{sn}^4\alpha),$$

$$b_2=a_2\left(1-\frac{1}{k^2\,\mathrm{sn}^4\alpha}\right)+4a_1'\cdot\frac{\mathrm{cn}\,\alpha\cdot\mathrm{dn}\,\alpha}{k^2\,\mathrm{sn}^5\alpha}.$$

Endlich ist b_1 durch Vergleichung der Factoren von w^2 links und rechts bestimmt.

Diese Bestimmungsarten haben im allgemeinen Falle grosse Schwierigkeiten. Wir wollen nun zeigen, dass in beiden bisher behandelten Fällen die nämliche Differentialgleichung aufgestellt werden kann, aus der dann weitere Gleichungen abgeleitet werden können, mit deren Hülfe die Coefficienten zu bestimmen sind.

Mit andern Worten, es soll jetzt eine Differentialgleichung bestimmt werden, welcher die Grösse:

$$V=\frac{\vartheta_0(nv+na)}{\vartheta_0(v+a)^{n^2}}\cdot\vartheta_0^{\,n^2-1}$$

Genüge leistet. Wir haben uns dabei der grösseren Symmetrie wegen des Zeichens $+a$ statt des früheren $-a$ bedient.

Dazu setzen wir:

$$\sigma_0(w)=\frac{\vartheta_0(v)}{\vartheta_0}\cdot e^{-\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\cdot\frac{v^2}{2}}$$

Digitized by Google

und definiren in ähnlicher Weise die übrigen σ-Functionen, dann leistet der Quotient:

$$V = \frac{\vartheta_0(nv + na)}{\vartheta_0(v + a)^{n^2}} \cdot \vartheta_0^{n^2-1} = \frac{\sigma_0(nw + n\alpha)}{\sigma_0(w + \alpha)^{n^2}}$$

der Differentialgleichung Genüge:

$$(13)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial w^2} + 2n^2\left(\frac{\partial \log \sigma_0(w+\alpha)}{\partial w} + k^2 \cdot (w + \alpha)\right)\frac{\partial V}{\partial w} +$$

$$2n^2 \cdot k \cdot k_1^2 \cdot \frac{\partial V}{\partial k} + n^2(n^2 - 1)\, k^2 \cdot \mathrm{sn}^2(w + \alpha) \cdot V = 0 .$$

Es möge in Bezug hierauf u. a. auf das Lehrbuch von BRIOT und BOUQUET über elliptische Functionen verwiesen werden.

Wir setzen ferner, ähnlich wie es am angegebenen Orte geschieht:

$$(14)\qquad y = \sqrt{k} \cdot \mathrm{sn}\, w , \quad \eta = \sqrt{k}\, \mathrm{sn}\, \alpha ,$$

dann können wir V als Function von k, $\mathrm{sn}\, w$, $\mathrm{sn}\, \alpha$ ansehen und demgemäss setzen:

$$\frac{\partial V}{\partial w} = \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial w} , \quad \frac{\partial^2 V}{\partial w^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial w^2} ,$$

$$\frac{\partial V}{\partial k} = \left(\frac{\partial V}{\partial k}\right) + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial k} + \frac{\partial V}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial k} .$$

Setzen wir das ein, so nimmt die Gleichung die Gestalt an:

$$(14)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left[\frac{\partial^2 y}{\partial w^2} + 2n^2\left(\frac{\partial \log \sigma_0(w+\alpha)}{\partial w} + k^2(w+\alpha)\right)\frac{\partial y}{\partial w}\right.$$

$$\left. + 2n^2 \cdot k \cdot k_1^2 \cdot \frac{\partial y}{\partial k}\right]\frac{\partial V}{\partial y} + 2n^2 \cdot k \cdot k_1^2 \cdot \frac{\partial V}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial k}$$

$$+ 2n^2 \cdot k \cdot k_1^2 \cdot \frac{\partial V}{\partial k} + n^2(n^2 - 1)\, k^2 \cdot \mathrm{sn}^2(w + \alpha)\, V = 0 .$$

Nun bestehen aber die Gleichungen:

$$(15)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 y}{\partial w^2} + 2\left(\frac{\partial \log \sigma_0(w)}{\partial w} + k^2 \cdot w\right)\frac{\partial y}{\partial w} + 2k \cdot k_1^2 \frac{\partial y}{\partial k} = 0 , \\ &\frac{\partial^2 \eta}{\partial \alpha^2} + 2\left(\frac{\partial \log \sigma_0(\alpha)}{\partial \alpha} + k^2 \cdot \alpha\right)\frac{\partial \eta}{\partial \alpha} + 2k \cdot k_1^2 \cdot \frac{\partial \eta}{\partial k} = 0 . \end{aligned}$$

Digitized by Google

Berücksichtigen wir dieselben, so nimmt unsere Gleichung die Form an:

$$(16)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2+\frac{\partial V}{\partial y}\left[(1-n^2)\frac{\partial^2 y}{\partial w^2}+2n^2\left(\frac{\partial \log\sigma_0(w+\alpha)}{\partial w}-\frac{\partial \log\sigma_0(w)}{\partial w}+k^2\cdot\alpha\right)\frac{\partial y}{\partial w}\right]+2n^2\cdot k\cdot k_1^2\cdot\frac{\partial V}{\partial K}$$

$$+n^2(n^2-1)k^2\cdot\mathrm{sn}^2(w+\alpha)\cdot V-n^2\cdot\frac{\partial V}{\partial \eta}\left[\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\left(2\frac{\partial\log\sigma_0(\alpha)}{\partial\alpha}+k^2\cdot\alpha\right)\right]=0\,,$$

oder da die Relation besteht:

$$(17)\qquad \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial w}=\frac{\partial V}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\,,$$

$$(18)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2+\frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial w^2}-n^2\left(\frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial w^2}+\frac{\partial V}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha^2}\right)+$$

$$2n^2\frac{\partial V}{\partial y}\left(\frac{\partial\log\sigma_0(w+\alpha)}{\partial w}-\frac{\partial\log\sigma_0(w)}{\partial w}-\frac{\partial\log\sigma_0(\alpha)}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial y}{\partial w}+$$

$$+2n^2\cdot k\cdot k_1^2\cdot\frac{\partial V}{\partial k}+n^2(n^2-1)k^2\cdot\mathrm{sn}^2(w+\alpha)\cdot V=0\,.$$

Die Symmetrie in Bezug auf w und α, die ja von vorneherein klar war, geht aus dieser Formel unmittelbar hervor.

Führen wir endlich die beiden Grössen x und ξ ein, die durch die Gleichungen definirt sind:

$$y=\sqrt{k}\cdot x\,,\quad \eta=\sqrt{k}\cdot\xi$$

oder also:

$$(19)\qquad x=\mathrm{sn}\,w\,,\quad \xi=\mathrm{sn}\,\alpha\,,$$

so nimmt die Differentialgleichung die Form an:

$$(20)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2+\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial w^2}-n^2\left(\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial w^2}+\frac{\partial V}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial\alpha^2}\right)+$$

$$2n^2\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial w}\left(\frac{\partial\log\sigma_0(w+\alpha)}{\partial w}-\frac{\partial\log\sigma_0(w)}{\partial w}-\frac{\partial\log\sigma_0(\alpha)}{\partial\alpha}\right.$$

$$\left.+2n^2\cdot k\cdot k_1^2\cdot\frac{\partial V}{\partial k}+n^2(n^2-1)k^2\cdot\mathrm{sn}^2(w+\alpha)\cdot V\right.$$

$$\left.-n^2k_1^2\left(\frac{\partial V}{\partial x}\cdot x+\frac{\partial V}{\partial\xi}\cdot\xi\right)=0\,.\right.$$

Digitized by Google

Berücksichtigen wir endlich die Relation:

$$\frac{\partial \log \sigma_0(w+\alpha)}{\partial w} - \frac{\partial \log \sigma_0(w)}{\partial w} - \frac{\partial \log \sigma_0(\alpha)}{\partial \alpha} =$$
$$-k^2 \operatorname{sn} w \cdot \operatorname{sn} \alpha \cdot \operatorname{sn}(w+\alpha),$$

so ergiebt sich nach einigen Reductionen die Differentialgleichung:

$$(21)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial w^2} + \frac{2n^2\cdot k^2\cdot \operatorname{cn}^2\alpha\cdot\operatorname{cn}^2 w}{\operatorname{cn}\alpha\cdot\operatorname{dn}\alpha}\operatorname{sn}(w+\alpha)\frac{\partial V}{\partial x}$$
$$+ 2n^2\cdot k\cdot k_1^2\cdot\frac{\partial V}{\partial k} + n^2(n^2-1)k^2\cdot\operatorname{sn}^2(w+\alpha)\cdot V = 0,$$

wobei zu bemerken ist, dass die Beziehungen stattfinden:

$$\frac{\partial x}{\partial w} = \operatorname{cn} w\cdot\operatorname{dn} w,$$
$$\frac{\partial^2 x}{\partial w^2} = -(1+k^2)\operatorname{sn} w + 2k^2\cdot\operatorname{sn}^3 w.$$

Hierbei bleiben wir stehen, wenngleich in dieser Form die Differentialgleichung nicht unmittelbar zu verwerthen ist. Es müssen dazu noch die folgenden leichten Operationen vorgenommen werden. Die Function V stellt sich in beiden Fällen als Quotient zweier Functionen dar. Der Nenner ist im ersten Falle bekannt, gleich einer Potenz von $1-k^2.\operatorname{sn}^2 w.\operatorname{sn}^2\alpha$, im zweiten Falle denken wir ihn vermöge seiner Nullpunkte berechnet. Setzen wir dann diese Ausdrücke ein, so erhalten wir nach leichten Reductionen eine Differentialgleichung, welcher der Zähler allein Genüge leistet, und welche zur Berechnung seiner Coefficienten dienen kann. Es ist klar, dass diese Methode vor Allem im ersten Falle mit Erfolg angewandt werden kann.

§ 2.

Untersuchung der Function $\vartheta_0(nv+a):\vartheta_0(nv)$.

Wir nehmen jetzt den zweiten Fall der Multiplication, bei welchem es sich lediglich um eine Multiplication des Arguments v handelt. Derselbe soll kürzer als der vorige durchgeführt werden.

Nehmen wir an, dass n eine gerade Zahl sei, so leistet die Function:

Digitized by Google

$$\vartheta_0(nv+a)$$

den Gleichungen Genüge:

$$\vartheta_0(n(v+1)+a) = \vartheta_0(nv+a)\,,$$

$$\vartheta_0(n(v+\tau)+a) = e^{-n\pi i(2nv+2a+n\tau)}\cdot\vartheta_0(nv+a)\,.$$

Denselben Gleichungen leisten dann die Grössen Genüge:

$$\vartheta_0(nv+a)\cdot\vartheta_0(v)^{2n-2r}\,\vartheta_1(v)^{2r}\,.$$

Es folgt dann ganz analog wie im vorigen Paragraphen die Existenz einer Gleichung von der Form:

$$(1)\qquad \frac{\vartheta_0(nv+a)\cdot\vartheta_0(a)^{n-1}\cdot\vartheta_0{}^{n^2-n}}{\vartheta_0(v)^{n^2-n}\cdot\vartheta_0(v+a)^n}\sum_0^n{}_r\, a_r\cdot \mathrm{sn}^{2r}(w) =$$

$$\sum_0^{\frac{n^2+n}{2}}{}_r\, b_r\cdot\mathrm{sn}^{2r}(w) + \mathrm{sn}\,w\cdot\mathrm{cn}\,w\cdot\mathrm{dn}\,w\sum_0^{\frac{n^2+n}{2}-2}{}_r\, b_r'\cdot\mathrm{sn}^{2r}(w)\,,$$

wobei die Grössen a, b, b' unbekannte Constanten bedeuten. Die Grössen a_r sind sofort durch die Bemerkung bestimmt, dass

$$\sum_0^n a_r\cdot\mathrm{sn}^{2r}(w)$$

für $v = -a+\frac{\tau}{2}$ $n$mal der Null gleich sein muss. Verstehen wir daher unter b und b' andere Grössen wie vorhin, so können wir setzen:

$$(2)\qquad \frac{\vartheta_0(nv+a)\cdot\vartheta_0(a)^{n-1}\cdot\vartheta_0{}^{n^2-n}}{\vartheta_0(v)^{n^2-n}\cdot\vartheta_0(v+a)^n}(1-k^2\cdot\mathrm{sn}^2\alpha\cdot\mathrm{sn}^2 w)^n =$$

$$\sum_0^{\frac{n^2+n}{2}}{}_r\, b_r\cdot\mathrm{sn}^{2r}w + \mathrm{sn}\,w\cdot\mathrm{cn}\,w\cdot\mathrm{dn}\,w\sum_0^{\frac{n^2+n}{2}-2}{}_r\, b_r'\cdot\mathrm{sn}^{2r}w\,.$$

Die Coefficienten setzen sich rational aus k^2 und den elliptischen Functionen mit dem Argumente α zusammen. Nehmen wir den einfachsten Fall $n=2$, so werden wir ansetzen können:

Digitized by Google

$$(3)\qquad \frac{\vartheta_0(2v+a)\cdot\vartheta_0(a)\cdot\vartheta_0^2}{\vartheta_0(v)^2\cdot\vartheta_0(v+a)^2}(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha\cdot\mathrm{sn}^2 w)^2 =$$

$$b_0+b_1\cdot\mathrm{sn}^2 w+b_2\cdot\mathrm{sn}^4 w+b_3\cdot\mathrm{sn}^6 w+\mathrm{sn}w\cdot\mathrm{cn}w\cdot\mathrm{dn}w\,(b_1'+b_2'\cdot\mathrm{sn}^2 w)\ .$$

Die Coefficienten bestimmen sich in diesem Falle am einfachsten mit Hülfe des Additionstheorems der Thetafunctionen.

In der That, vermöge desselben ist:

$$\frac{\vartheta_0(2v+a)\cdot\vartheta_0(a)\cdot\vartheta_0^2}{\vartheta_0(a)^2\cdot\vartheta_0(v+a)^2} = 1-k^2\cdot\mathrm{sn}^2 w\cdot\mathrm{sn}^2(w+a)$$

oder also:

$$(4)\qquad \frac{\vartheta_0(2v+a)\cdot\vartheta_0(a)\cdot\vartheta_0^2}{\vartheta_0(a)^2\cdot\vartheta_0(v+a)^2}(1-k^2\cdot\mathrm{sn}^2\alpha\cdot\mathrm{sn}^2 w)^2 =$$

$$1-3k^2\cdot\mathrm{sn}^2\alpha\cdot\mathrm{sn}^2 w-k^2(1-2(1+k^2)\mathrm{sn}^2\alpha)\mathrm{sn}^4 w-k^4\cdot\mathrm{sn}^2\alpha\cdot\mathrm{sn}^6 w$$
$$-2k^2\cdot\mathrm{sn}\alpha\cdot\mathrm{sn}^3 w\cdot\mathrm{cn}\alpha\cdot\mathrm{cn}\cdot w\cdot\mathrm{dn}\cdot\alpha\cdot\mathrm{dn}\,w\ .$$

Der Fall eines ungeraden n ist analog zu behandeln.

Wir können aber auch hier eine zweite Darstellung geben.

Sei n gerade, so folgt:

$$(5)\qquad \frac{\vartheta_0(nv+a)\cdot\vartheta_0(a)^{n-1}\cdot\vartheta_0^{n^2-n}}{\vartheta_0(v+a)^n\cdot\vartheta_0(v)^{n^2-n}}\ .$$

$$\left(\sum_0^{\frac{n}{2}}{}_r\, a_r\cdot\mathrm{sn}^{2r} w+\mathrm{sn}w\cdot\mathrm{cn}w\cdot\mathrm{dn}w\sum_0^{\frac{n}{2}-1}{}_r\, a_r'\,\mathrm{sn}^{2r} w\right) =$$

$$\sum_0^{\frac{n^2}{2}}{}_r\, b_r\cdot\mathrm{sn}^{2r} w+\mathrm{sn}w\cdot\mathrm{cn}w\cdot\mathrm{dn}w\sum_0^{\frac{n^2}{2}-1}{}_r\, b_r'\cdot\mathrm{sn}^{2r} w\ .$$

In dieser Gleichung sind dann die Constanten a und a' vermöge der Bedingung zu bestimmen, dass der Ausdruck:

$$\sum_0^{\frac{n}{2}}{}_r\, a_r\cdot\mathrm{sn}^{2r} w+\mathrm{sn}w\cdot\mathrm{cn}w\cdot\mathrm{dn}w\sum_0^{\frac{n}{2}-1}{}_r\, a_r'\cdot\mathrm{sn}^{2r} w$$

für $v=-a+\frac{\tau}{2}n$ mal der Null gleich sein muss. Hierbei können dann dieselben Bemerkungen, wie im ersten Paragraphen gemacht werden.

Nehmen wir z. B. den Fall $n = 2$, so würde der gesuchte Ausdruck lauten:

$$(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 \alpha)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha \cdot \operatorname{sn}^2 w) - 2k^2 \cdot \operatorname{sn}^2 \alpha \cdot \operatorname{cn} \alpha \cdot \operatorname{dn} \alpha \cdot \operatorname{sn} w \cdot (\operatorname{sn} \alpha \cdot \operatorname{cn} w \cdot \operatorname{dn} w + \operatorname{cn} \alpha \cdot \operatorname{dn} \alpha \operatorname{sn} w).$$

Die Anwendung der linearen Transformation und der Substitution halber Perioden ergiebt auch hier einige brauchbare Resultate, indessen möge davon abgesehen werden.

Dagegen möge die folgende Bemerkung stattfinden. Bei den Formeln des ersten Paragraphen war Alles symmetrisch in Bezug auf w und α. Das fällt hier fort, indessen ist es nicht schwer, die entsprechende Beziehung aufzustellen.

In der That, setzen wir:

$$V = \frac{\vartheta_0(nv + a) \cdot \vartheta_0(a)^{n-1} \cdot \vartheta_0^{\,n^2-n}}{\vartheta_0(v + a)^n \cdot \vartheta_0(v)^{n^2-n}}$$

so folgt:

$$\frac{\partial \log V}{\partial w} = \frac{\partial \log \vartheta_0(nv+a)}{\partial w} - n \cdot \frac{\partial \log \vartheta_0(v+a)}{\partial w} - (n^2 - n) \frac{\partial \log \vartheta_0 v)}{\partial v},$$

$$\frac{\partial \log V}{\partial \alpha} = \frac{\partial \log \vartheta_0(nv+a)}{\partial \alpha} - n \cdot \frac{\partial \log \vartheta_0(v+a)}{\partial \alpha} + (n-1) \frac{\partial \log \vartheta_0(a)}{\partial \alpha},$$

oder auch:

$$\frac{\partial \log V}{\partial w} - n \frac{\partial \log V}{\partial \alpha} = n \cdot (n-1) \frac{\partial \log \vartheta_0(v+a)}{\partial w} - (n^2 - n) \left(\frac{\partial \log \vartheta_0(v)}{\partial w} + \frac{\partial \log \vartheta_0(a)}{\partial \alpha} \right)$$

oder:

$$(6) \quad \frac{\partial \log V}{\partial w} - n \cdot \frac{\partial \log V}{\partial \alpha} = -n(n-1)k^2 \cdot \operatorname{sn} w \cdot \operatorname{sn} \alpha \cdot \operatorname{sn}(w + \alpha).$$

Es ist dieses die entsprechende Relation.

Aus dem Vorangegangenen folgen nun zwei Darstellungen für die Function:

Digitized by Google

$$\frac{\vartheta_0(nv+a)}{\vartheta_0(nv)} \cdot \vartheta_0(a)^{n-1} .$$

Derselbe stellt sich in beiden Fällen als Product von

$$\frac{\vartheta_0(v+a)^n}{\vartheta_0(v)^n}$$

und einer Grösse F dar. Dieselbe hat im ersten Falle die Form

$$\frac{f_1(x)+\operatorname{sn} w \cdot \operatorname{cn} w \cdot \operatorname{dn} w f_2(x)}{(1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 w)^n \cdot f_3(x)} ,$$

wobei die Grössen $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ ganze Functionen von $x = \operatorname{sn}^2 w$ von den resp. Graden $\frac{n^2+n}{2}$, $\frac{n^2+n}{2} - 2$, $\frac{n^2}{2}$ sind, im zweiten Falle die Form:

$$\frac{\varphi_1(x) + \operatorname{sn} w \cdot \operatorname{cn} w \cdot \operatorname{dn} w \cdot \varphi_2(x)}{(\varphi_3(x) + \operatorname{sn} w \cdot \operatorname{cn} w \cdot \operatorname{dn} w \cdot \varphi_4(x))\varphi_5(x)} ,$$

wobei die Grössen $\varphi_1(x) \ldots \varphi_5(x)$ ganze Functionen von $x = \operatorname{sn}^2 w$ von den resp. Graden $\frac{n^2}{2}$, $\frac{n^2}{2} - 1$, $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{2} - 1$, $\frac{n^2}{2}$ sind. Hierbei ist n gerade vorausgesetzt. Ist n ungerade, so gilt ein ganz analoger Satz.

Schliesslich wollen wir aber auch hier zeigen, dass V einer Differentialgleichung zweiter Ordnung Genüge leistet.

Wir wollen setzen:

$$U = \sigma_0(nw+\alpha) , \quad u_1 = \sigma_0(w+\alpha) ,$$
$$u_2 = \sigma_0(w) , \qquad u_3 = \sigma_0(\alpha) ,$$

so ist:

$$(7) \qquad U = \frac{V \cdot u_1^{\,n} u_2^{\,n^2-n}}{u_3^{\,n-1}}$$

und es finden die Gleichungen statt:

$$\frac{\partial^2 \log U}{\partial w^2} + \left(\frac{\partial \log U}{\partial w}\right)^2 + 2n \cdot k^2 (nw+\alpha) \frac{\partial \log U}{\partial w} +$$

$$2n^2 \cdot k \cdot k_1^2 \frac{\partial \log U}{\partial K} + n^2 \cdot k^2 (nw+\alpha)^2 = 0 ,$$

Digitized by Google

$$\frac{\partial^2 \log u_1}{\partial w^2} + \left(\frac{\partial \log u_1}{\partial w}\right)^2 + 2k^2(w+\alpha)\frac{\partial \log u_1}{\partial w} +$$

$$2k \cdot k_1^2 \frac{\partial \log u_1}{\partial k} + k^2(w+\alpha)^2 = 0 ,$$

(8)

$$\frac{\partial^2 \log u_2}{\partial w^2} + \left(\frac{\partial \log u_2}{\partial w}\right)^2 + 2k^2 \cdot w \frac{\partial \log u_2}{\partial w} +$$

$$2k \cdot k_1^2 \frac{\partial \log u_2}{\partial k} + k^2 \cdot w^2 = 0 .$$

Führen wir in der ersten dieser drei Gleichungen an Stelle von U die Grösse V ein und eliminiren die Quadrate der ersten Differentialquotienten von $\log u_1$ und $\log u_2$, so erhalten wir die Relation:

$$(9)\quad \frac{\partial^2 \log V}{\partial w^2} + \left(\frac{\partial \log V}{\partial w}\right)^2 + 2n\frac{\partial \log V}{\partial w}\left[\frac{\partial \log u_1}{\partial w} + (n-1)\frac{\partial \log u_2}{\partial w} + k^2(nw+\alpha)\right] + 2n^2 \cdot k \cdot k_1^2 \cdot \frac{\partial \log V}{\partial k} + n(1-n)\frac{\partial^2 \log u_1}{\partial w^2}$$

$$+ n(n-1)(1+n-n^2)\frac{\partial \log u_2}{\partial w^2} + 2n^2(n-1)\left[k^2 \cdot \frac{\partial \log u_1}{\partial w} \cdot w + k \cdot k_1^2 \frac{\partial \log u_1}{\partial k} + k^2 \cdot \frac{\partial \log u_2}{\partial w}(w+\alpha) + k \cdot k_1^2 \cdot \frac{\partial \log u_2}{\partial k} - k \cdot k_1^2 \cdot \frac{\partial \log u_3}{\partial k} + \frac{\partial \log u_1}{\partial w} \cdot \frac{\partial \log u_2}{\partial w} + k^2 w(w+\alpha)\right] = 0 .$$

Andrerseits können wir aber auch die Gleichungen zu Grunde legen:

$$\frac{\partial^2 \log U}{\partial \alpha^2} + \left(\frac{\partial \log U}{\partial \alpha}\right)^2 + 2k^2(nw+\alpha)\frac{\partial \log U}{\partial \alpha} +$$

$$2k \cdot k_1^2 \cdot \frac{\partial \log U}{\partial k} + k^2(nw+\alpha)^2 = 0 ,$$

$$(10)\quad \frac{\partial \log u_1}{\partial \alpha^2} + \left(\frac{\partial \log u_1}{\partial \alpha}\right)^2 + 2k^2(w+\alpha)\frac{\partial \log u_1}{\partial \alpha} +$$

$$2k \cdot k_1^2 \cdot \frac{\partial \log u_1}{\partial k} + k^2(w+\alpha)^2 = 0 ,$$

$$\frac{\partial^2 \log u_3}{\partial \alpha^2} + \left(\frac{\partial \log u_3}{\partial \alpha}\right)^2 + 2k^2 \cdot \alpha \cdot \frac{\partial \log u_3}{\partial \alpha} +$$

$$2k \cdot k_1^2 \cdot \frac{\partial \log u_3}{\partial k} + k^2\alpha^2 = 0 .$$

Digitized by Google

Dann ergiebt sich analog:

$$(11)\quad n\cdot\frac{\partial^2\log V}{\partial\alpha^2}+n\left(\frac{\partial\log V}{\partial\alpha}\right)^2+2n\frac{\partial\log V}{\partial\alpha}\Big[n\cdot\frac{\partial\log u_1}{\partial\alpha}-$$

$$\cdot\ (n-1)\frac{\partial\log u_3}{\partial\alpha}+k^2(nw+\alpha)\Big]+2n\cdot k\cdot k_1^2\frac{\partial\log V}{\partial k}+$$

$$n^2(1-n)\frac{\partial^2\log u_1}{\partial\alpha^2}+n^2(1-n)\frac{\partial^2\log u_3}{\partial\alpha^2}-2n^2(n-1)\Big[k^2\cdot\frac{\partial\log u_1}{\partial\alpha}\cdot\alpha$$

$$+k\cdot k_1^2\cdot\frac{\partial\log u_1}{\partial k}+k^2\cdot\frac{\partial\log u_3}{\partial\alpha}(w+\alpha)+k\cdot k_1^2\cdot\frac{\partial\log u_3}{\partial k}$$

$$-k\cdot k_1^2\cdot\frac{\partial\log u_2}{\partial k}+\frac{\partial\log u_1}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\log u_3}{\partial\alpha}+k^2\cdot\alpha(w+\alpha)\Big]=0\ .$$

Wir subtrahiren die beiden Gleichungen von einander, so erhalten wir:

$$(12)\quad \frac{\partial^2\log V}{\partial w^2}-n\frac{\partial^2\log V}{\partial\alpha^2}+\left(\frac{\partial\log V}{\partial w}\right)^2-n\left(\frac{\partial\log V}{\partial\alpha}\right)^2+$$

$$2n\cdot\frac{\partial\log V}{\partial w}\Big[\frac{\partial\log u_1}{\partial w}+(n-1)\frac{\partial\log u_2}{\partial w}+k^2(nw+\alpha)\Big]-$$

$$2n\cdot\frac{\partial\log V}{\partial\alpha}\Big[n\cdot\frac{\partial\log u_1}{\partial\alpha}-(n-1)\frac{\partial\log u_3}{\partial\alpha}+k^2(nw+\alpha)\Big]+$$

$$2n(n-1)k\cdot k_1^2\cdot\frac{\partial\log V}{\partial k}+n(1-n)^2\frac{\partial^2\log u_1}{\partial w^2}+$$

$$n(n-1)(1+n-n^2)\frac{\partial^2\log u_2}{\partial w^2}-n^2(1-n)\frac{\partial^2\log u_3}{\partial\alpha^2}+$$

$$2n^2(n-1)\Big[k^2\cdot\frac{\partial\log u_1}{\partial w}(w+\alpha)+2k\cdot k_1^2\frac{\partial\log u_1}{\partial k}+$$

$$k^2\cdot\frac{\partial\log u_2}{\partial w}(w+\alpha)+k^2\cdot\frac{\partial\log u_3}{\partial\alpha}(w+\alpha)+\frac{\partial\log u_1}{\partial w}$$

$$\left(\frac{\partial\log u_2}{\partial w}+\frac{\partial\log u_3}{\partial\alpha}\right)+k^2(w+\alpha)^2\Big]=0\ .$$

Die letzte Klammer können wir einfacher schreiben. In der That, es ist:

$$\frac{\partial\log u_2}{\partial w}+\frac{\partial\log u_3}{\partial\alpha}=\frac{\partial\log u_1}{\partial w}+k^2\,\mathrm{sn}\,\alpha\cdot\mathrm{sn}\,w\cdot\mathrm{sn}\,(w+\alpha)\ .$$

Digitized by Google

Hieraus folgt dann als Werth derselben unter Berücksichtigung der Differentialgleichung für u_1:

$$-\frac{\partial^2 \log u_1}{\partial w^2} + k^2 \operatorname{sn} w \cdot \operatorname{sn} \alpha \cdot \operatorname{sn}(w+\alpha)\left(\frac{\partial \log u_1}{\partial w} + k^2 (w+\alpha)\right) .$$

Demgemäss können wir die ganze Gleichung schreiben, wenn wir noch die schon entwickelte Differentialbeziehung von V mit hinzunehmen:

$$(13) \quad \frac{\partial^2 \log V}{\partial w^2} - n\frac{\partial^2 \log V}{\partial \alpha^2} + \left(\frac{\partial \log V}{\partial w}\right)^2 - n\left(\frac{\partial \log V}{\partial \alpha}\right)^2 +$$

$$2n(n-1)\frac{\partial \log V}{\partial w}\left(\frac{\partial \log u_2}{\partial w} + k^2 \cdot w\right) + 2n(n-1)\frac{\partial \log V}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \log u_3}{\partial \alpha} + k^2 \cdot \alpha\right)$$

$$+ 2n(n-1)k \cdot k_1^2 \cdot \frac{\partial \log V}{\partial k} + n \cdot (1-n^2)\frac{\partial^2 \log u_1}{\partial w^2} +$$

$$n(n-1)(1+n-n^2)\frac{\partial^2 \log u_2}{\partial w^2} - n^2(1-n)\frac{\partial^2 \log u_3}{\partial \alpha^2} = 0 .$$

Jetzt bleiben die Schlüsse völlig wie im ersten Paragraphen und mögen daher nur angedeutet werden.

Wir sehen V an als Function von y, η und k, wenn y und η gesetzt sind gleich:

$$y = \sqrt{k}\ \operatorname{sn} w , \quad \eta = \sqrt{k}\ \operatorname{sn} \alpha .$$

Dann folgt:

$$\frac{\partial V}{\partial w} = \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial w}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial w^2} = \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial w^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 ,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \frac{\partial V}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} = \frac{\partial V}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial \alpha}\right)^2 ,$$

$$\frac{\partial V}{\partial k} = \left(\frac{\partial V}{\partial k}\right) + \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial k} + \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial k} .$$

Setzen wir diese Werthe ein, so können wir die Gleichung schreiben:

$$(14) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial w^2} - n\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial \alpha}\right)^2 + \frac{\partial V}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial \alpha^2}\right)$$

$$+ 2n(n-1)\frac{\partial V}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial \log u_2}{\partial w} + k^2 \cdot w\right)\frac{\partial y}{\partial w} + k \cdot k_1^2 \cdot \frac{\partial y}{\partial k}\right]$$

$$+ 2n(n-1)\frac{\partial V}{\partial \eta}\left[\left(\frac{\partial \log u_3}{\partial \alpha} + k^2 \cdot \alpha\right)\frac{\partial \eta}{\partial \alpha} + k \cdot k_1^2 \cdot \frac{\partial \eta}{\partial k}\right]$$

$$+ 2n(n-1)k \cdot k_1^2 \cdot \frac{\partial V}{\partial k} + V \cdot V_1 = 0 ,$$

Digitized by Google

wenn gesetzt ist:

$$V_1 = V\left(n(1-n^2)\frac{\partial^2 \log u_1}{\partial w^2} + n(n-1)(1+n-n^2)\frac{\partial^2 \log u_2}{\partial w^2} - n^2(1-n)\frac{\partial^2 \log u_3}{\partial \alpha^2}\right).$$

Hieraus folgt:

$$(15)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial w^2} - n\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial \alpha}\right)^2 + \frac{\partial V}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial \alpha^2}\right) -$$

$$n(n-1)\left(\frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial w^2} + \frac{\partial V}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial \alpha^2}\right) + 2n(n-1)k\cdot k_1^2\cdot\frac{\partial V}{\partial k} + V\cdot V_1 = 0.$$

Hierbei bleiben wir stehen. Alle anderen Formen folgen aus der soeben entwickelten durch Transformation der einfachsten Art.

Digitized by Google

SITZUNG VOM 10. FEBRUAR 1890.

Walter König, *Ueber die Entstehung der Kundt'schen Staubfiguren.* Vorgelegt von dem ord. Mitgliede Wiedemann.

I.

Im Jahre 1866 hat Herr Kundt jene eigenthümlichen akustischen Staubfiguren beschrieben[1]), welche heute nach ihm benannt zu werden pflegen, und welche als ein ebenso sicheres wie bequemes Mittel zur indirecten Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in Gasen und Flüssigkeiten zur allgemeinen Kenntniss und Anwendung gelangt sind. Ueber die Entstehung dieser Staubfiguren ist seit jener Zeit mancherlei geschrieben worden. Aber gerade der Umstand, dass verschiedene Erklärungsversuche aufgestellt worden sind, weist darauf hin, dass bis jetzt keiner von ihnen als durchschlagend zu betrachten ist. Herr Kundt selbst hat über die Entstehung dieser Figuren keine bestimmte Ansicht geäussert; er hat vielmehr — in der zweiten der diesen Gegenstand behandelnden Arbeiten[2]) — aus seinen Beobachtungen nur folgenden allgemeinen Schluss gezogen: »Die Ursache für das Zustandekommen der Rippen muss im ganzen Querschnitt der Röhre vorhanden sein. Die ausserordentliche Schärfe und Regelmässigkeit der Erscheinung bei Kieselsäure lässt auch keinen Zweifel, dass dieselbe durch eine eigenthümliche complicirte Bewegung der Luft bedingt sein muss und nicht durch ein Mitnehmen der Theilchen des Staubes beim einfachen, pendelartigen Hin- und Hergang der Luft erzeugt werden kann.« Eine solche

1) A. Kundt, Pogg. Ann. 127. pag. 497—523. 1866.
2) A. Kundt, Pogg. Ann. 128. pag. 337—355. 1866.

Digitized by Google

complicirte Luftbewegung hat dann später Herr Bourget[1]) zur Erklärung der Rippenbildung aus der Annahme herzuleiten versucht, dass der die Schwingungen erzeugende Grundton von Obertönen begleitet sei; es sollten zwischen je zwei Knoten so viele Rippen liegen, wie der Ordnungszahl des mitschwingenden Obertones entspricht. Aber dann müssten die Abstände der Rippen überall gleich sein, während es eine leicht zu bestätigende Thatsache ist, dass die Abstände der Rippen in der Mitte des Wellenbauches am grössten sind und nach den Knoten zu kleiner werden. Ausserdem giebt diese Auffassung über die eigentliche Mechanik der Bewegung des Staubes keinerlei Aufschluss. Dem gegenüber geht die Erklärung Dvorak's von der Annahme aus, dass der Staub durch das schwingende Mittel direct in Bewegung gesetzt werde[2]). »Der Staub wird dort, wo er locker ist und nicht so fest aufliegt, durch die Bewegung des schwingenden Mittels mitgenommen und so an die compacteren in Ruhe gebliebenen Partien des Staubes geworfen, wo er sich verfängt und hängen bleibt.« Das Aufrichten der Rippen wird durch eine Stauung des schwingenden Mediums an beiden Seiten der Rippe erklärt. Aehnlich hat Herr Stefan die Entstehung der Rippungen aufgefasst, welche er beobachtete, als Wasser in einer Glasröhre, deren Boden mit Staub bedeckt war, in eine hin- und herschwingende Bewegung versetzt wurde[3]). Herr Stefan meint, die Ursache der Rippenbildung liege darin, dass einige der Pulvertheilchen von dem bewegten Wasser leichter nach der einen als nach der anderen Seite mitgerissen werden, und dafür gäbe es zwei Gründe, erstens die grössere Geschwindigkeit der Bewegung der Wassertheilchen in der einen als in der umgekehrten Richtung und zweitens die ungleiche Beschaffenheit der Oberfläche der Theilchen auf den beiden entgegengesetzten Seiten. Auf den gleichen Gesichtspunkten beruht endlich die Anschauung, welche die Herren Schellbach und Böhm über die von ihnen beobachtete mechanische Wirkung von Schallwellen aufgestellt haben[4]); die Welle soll wie ein Windstoss wirken; sie schiebt, indem sie über eine mit feinem Pulver bestreute glatte Fläche

---

1) Vgl. Neesen, Wied. Ann. 30. pag. 432. 1887.
2) Dvorak, Pogg. Ann. 151. pag. 634—639. 1874.
3) J. Stefan, Wien. Sitzungsber. 65. pag. 424—427. 1872.
4) Schellbach und Böhm, Wied. Ann. 7. pag. 1—11. 1879.

Digitized by Google

dahinschreitet, den Staub vor sich her; ist sie nicht mehr im Stande ihn zu bewegen, so schreitet sie über den angehäuften Ring fort, und der Vorgang wiederholt sich, solange die Welle Intensität genug besitzt.

Die von STEFAN und von SCHELLBACH und BÖHM beobachteten Erscheinungen stimmen mit den KUNDT'schen Staubfiguren sowie mit den Klangfiguren, welche in Platten von elastischen oder tropfbaren Flüssigkeiten durch feste tönende Platten erzeugt werden, offenbar darin überein, dass in allen Fällen der Staub sich in parallelen Rippen ordnet, welche auf der Bewegungsrichtung des umgebenden Mediums senkrecht stehen. Herr KUNDT hat diese Thatsache bei seiner Untersuchung der zuletzt genannten Klangfiguren[1]) schon in ihrer ganzen Allgemeinheit ausgesprochen. Aber gerade die Allgemeinheit dieser Thatsache und die Regelmässigkeit der ganzen Erscheinung lassen die angeführten Erklärungsversuche, die mehr oder weniger auf die zufälligen Ungleichheiten der Theilchen oder ihrer Vertheilung zurückgehen, wenig befriedigend erscheinen, ganz abgesehen davon, dass eine Luftbewegung, wie sie Herr DVORAK annehmen muss, um die Bildung der hohen Querwände bei der Kieselsäure oder anderen geeigneten Materialien zu erklären, mir durchaus nicht vorstellbar erscheint. Ich glaube im Gegensatz hierzu, dass man zu einer vollständigen, ganz allgemeinen und principiellen Erklärung der Rippenbildung gelangen kann einfach dadurch, dass man den ganzen Vorgang als das nimmt, was er in Wahrheit ist, nämlich als eine Bewegung fester Körper in einer Flüssigkeit oder richtiger als die Bewegung einer Flüssigkeit um feste, in ihr befindliche Körper herum. Von diesem Gesichtspunkte aus lassen sich die bekannten Grundsätze der Hydrodynamik auf diese Erscheinungen anwenden, und es soll gezeigt werden, dass die Ergebnisse, zu denen man auf diesem Wege gelangt, mit den Thatsachen in vollkommener Uebereinstimmung stehen.

II.

Wenn die Luft oder die Flüssigkeit, in der sich die Staubtheilchen befinden, in Bewegung gesetzt wird, so wird sie auf die Staubtheilchen Wirkungen von zweifacher Art ausüben.

---

1) A. KUNDT, Pogg. Ann. 140. pag. 297—305. 1870.

Digitized by Google

Erstens wird sie dieselben mit sich fortzuführen suchen. Sodann aber müssen sich in dem Maasse, als die Staubtheilchen hinter der Flüssigkeitsströmung zurückbleiben, Bewegungsformen dieser letzteren entwickeln, wie sie der Bewegung starrer Körper in einer Flüssigkeit entsprechen. In Folge dieser relativen Bewegungen der Flüssigkeitstheilchen gegen die Staubtheilchen werden Druckkräfte von Seiten der Flüssigkeit auf die festen Theilchen ausgeübt werden, welche die Hydrodynamik für gewisse einfache Fälle zu berechnen gestattet. Wir wollen, um den einfachsten Fall zu erhalten, annehmen, dass unsere Theilchen kugelförmig wären. Dann können wir der Hydrodynamik folgenden Satz entlehnen: Bewegen sich zwei Kugeln in einer Flüssigkeit mit constanten gleichen Geschwindigkeiten in parallelen Graden, so sind die Resultanten der von der Flüssigkeit auf sie ausgeübten Druckkräfte so beschaffen, als ob zwischen den Kugeln Anziehungs- bez. Abstossungskräfte wirksam wären von derselben Form, aber von entgegengesetzter Richtung, wie die Anziehungs- bez. Abstossungskräfte zwischen zwei magnetischen Molekülen, die mit gleichgerichteten, der Bewegungsrichtung parallelen Axen in den Kugelcentren liegend zu denken sind [1]). In unserem Falle bewegen sich nicht die Kugeln in der ruhenden Flüssigkeit, sondern umgekehrt die Flüssigkeit gegen die ruhenden Kugeln; da aber die genannten Kräfte nur durch die relativen Bewegungen beider bedingt sind, so werden sie in letzterem Falle die gleichen sein wie in ersterem. Ferner ist in unserem Falle die Bewegung der Flüssigkeit keine constante, sondern eine periodisch hin- und hergehende. Dass auch in diesem Falle die beschriebenen Kräfte bestehen, natürlich ebenfalls periodisch in ihrer Grösse, hat Bjerknes bewiesen. Es ist wichtig zu bemerken, dass sie periodisch wechselnd nur in ihrer Grösse, aber nicht in ihrer Richtung sind. Die Kräfte dagegen, welche die Theilchen fortzuführen suchen, wechseln ihre Richtung zugleich mit der Bewegung der Flüssigkeit. Daraus ist ersichtlich, dass bei schwingender Bewegung der Flüssigkeitsmasse die rein hydrodynamischen Wirkungen viel deutlicher zur Erscheinung kommen müssen, als bei fortschreitender Bewegung.

Die geschilderten Wirkungen hat Bjerknes zuerst experimentell mit Hülfe eines geistreich ersonnenen Apparates an zwei

1) Kirchhoff, Mechanik. 2. Aufl. pag. 251.

Digitized by Google

in Wasser oscillirenden Kugeln nachgewiesen. Dass Kräfte der gleichen Art zwischen zwei Kugeln in einer schwingenden Luftmasse bestehen, lässt sich mit Hülfe eines sehr einfachen Versuches zeigen. Man führe in eine KUNDT'sche Röhre von beträchtlichem Durchmesser einen steifen Draht ein, von dem aus an möglichst feinen Coconfäden zwei kleine Kugeln aus Kork oder Hollundermark bis in die Mitte des Röhrenquerschnittes herabhängen. Die Kugeln werden so justirt, dass sie sich sehr dicht bei einander befinden, ohne sich jedoch zu berühren, und dass sie eine Stelle in der Röhre einnehmen, an der beim Tönen ein Schwingungsbauch entsteht. Bringt man dann die Luft in der Röhre in bekannter Weise zum Tönen, so sieht man deutlich, dass sich die Kugeln abstossen, wenn ihre Mittelpunkte in der Richtung der Röhrenaxe, d. h. der Schwingungsrichtung hinter einander liegen, dass sie sich dagegen anziehen, wenn die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte auf der Röhrenaxe senkrecht steht.

Aus der Existenz dieser Kräfte folgt unmittelbar die eigenthümliche Anordnung der Staubtheilchen in einer schwingenden Luft- oder Flüssigkeitsmasse. Nach dem Gesagten verhalten sich nämlich unsere kugelförmigen Staubtheilchen in der schwingenden Flüssigkeit gerade entgegengesetzt wie Eisenfeilspähne in einem Magnetfelde, dessen Kraftlinien den Strömungslinien der Flüssigkeit entsprechen. Die Eisenfeilspähne ziehen sich an in der Richtung der Kraftlinien und stossen sich ab in allen Richtungen senkrecht dazu; sie reihen sich daher in Linien an einander, die längs der Kraftrichtung des Magnetfeldes verlaufen. Unsere Kugeln dagegen stossen sich in dieser Richtung ab und ziehen sich in allen dazu senkrechten Richtungen an; sie werden sich also in Flächen anordnen müssen, welche auf den Strömungslinien der Flüssigkeit senkrecht stehen. Das ist aber gerade diejenige Erscheinung, welche man bei den KUNDT-schen Staubfiguren beobachtet. Die Bildung der Rippen und Querwände ist also der Entstehung der bekannten magnetischen Curven vergleichbar, aber complementär dazu, wenn der Ausdruck in dem hier vorliegenden Sinne gestattet ist. Damit scheint mir trotz des complicirten Bewegungsvorganges in der Flüssigkeit die Erklärung der KUNDT'schen Staubfiguren in einer einfachen und anschaulichen Form gegeben zu sein.

Man könnte gegen diese Anwendung hydrodynamischer

Digitized by Google

Principien vielleicht den Einwand erheben, dass man es bei unseren Schallschwingungen weder mit einer incompressiblen noch mit einer reibungslosen Flüssigkeit zu thun hat. Doch zeigt die Betrachtung der für ein elastisches Medium geltenden Formeln [1]), dass die Compressibilität, selbst im Falle eines Gases, ausser Acht gelassen werden kann, so lange die Dimensionen der Kugeln und ihre Abstände von einander klein sind gegen die Strecke, um welche sich eine Verdichtung oder Verdünnung während der Zeitdauer einer Schwingung fortpflanzt; diese Bedingung ist bei den Kundt'schen Staubfiguren stets erfüllt, da die Staubtheilchen und ihre Abstände immer klein sind gegen die Wellenlänge des Tones, der die Figuren erzeugt. Ebenso kann in erster Annäherung der Einfluss der Reibung vernachlässigt werden; die Reibung wird die hydrodynamischen Bewegungsformen allerdings etwas abändern, wird aber ihren Charakter nicht vollständig verkehren, wie das schon daraus hervorgeht, dass Bjerknes die Resultate seiner Theorie bei Versuchen in Wasser wenigstens qualitativ bestätigt gefunden hat.

Da die Kräfte, auf welche wir die Entstehung der Rippen zurückgeführt haben, dem Quadrat der Geschwindigkeit der Luftbewegung proportional sind, so haben sie ihren grössten Werth im Schwingungsbauch, wo die Excursionen der Lufttheilchen am weitesten sind. Daher haben die Rippen und Querwände von Staub im Schwingungsbauch ihre schärfste Ausbildung und ihre grössten Abstände; nach den Knoten zu werden sie schwächer und rücken enger zusammen.

Im Gegensatz zu den älteren Erklärungsversuchen, welche das Hauptgewicht auf das Mitschwingen der Staubtheilchen legten, geht die vorliegende Theorie von der Voraussetzung aus, dass die Staubtheilchen nicht mitschwingen oder zum mindesten hinter den Excursionen der Lufttheilchen erheblich zurückbleiben. Pulver, welche so fein sind, dass sie in der Luft schweben und deren Bewegungen fast vollständig mitmachen, wie Rauch oder Salmiaknebel, zeigen daher keine Rippungen. Auf der anderen Seite lagert ein Pulver, welches specifisch sehr schwer ist, zu dicht und fest an der Wandung der Röhre, um durch die immerhin schwachen Kräfte, um die es sich hier handelt, bewegt zu werden. Es ist daraus ersichtlich, dass das Pulver in Bezug auf

1) G. Kirchhoff, Mechanik. 2. Aufl. pag. 321.

Digitized by Google

sein specifisches Gewicht und die Feinheit seiner Zertheilung gewissen einschränkenden Bedingungen unterworfen ist, um für die besprochenen Versuche geeignet zu sein. Bei verschiedenen Pulvern können die Erscheinungen sehr verschieden an Schönheit und Deutlichkeit ihrer Gestaltung ausfallen. Sind die Theilchen des Pulvers verschieden in ihrer Beweglichkeit, so werden die schwerer beweglichen in Folge ihrer grösseren Geschwindigkeitsdifferenz gegen die Flüssigkeitstheilchen gleichsam zu Centren stärkerer Kraftäusserungen; an ihnen sammeln sich die leichter beweglichen, und sie werden dadurch zu Ausgangspunkten der Rippenbildung. In diesem Punkte berühren sich unsere Ausführungen mit den oben erwähnten, älteren Erklärungsversuchen. Aber wir sehen, dass unsere Betrachtungsweise zugleich die hydrodynamische Begründung für jenen Satz ergiebt, von dem z. B. die DVORAK'sche Erklärung ohne weitere Begründung ausging. Es muss gegenüber jenen früheren Erklärungen aber noch einmal darauf hingewiesen werden, dass nach der hier auseinandergesetzten Theorie die ungleiche Beweglichkeit der Staubtheilchen durchaus kein unbedingtes Erforderniss für die Entstehung der Rippenbildung ist.

III.

Wir haben bisher die Kugelgestalt als erste Annäherung an die Gestalt der Pulvertheilchen unseren Betrachtungen zu Grunde gelegt. Sind die Pulvertheilchen keine Kugeln, so bestehen ausser den Kräften, welche die verschiedenen Theilchen auf einander ausüben oder richtiger auszuüben scheinen, noch Drehungsmomente, welche jedes Theilchen für sich von Seiten der bewegten Flüssigkeit erfährt. Um von der Art dieser Drehungsmomente eine Anschauung zu gewinnen, nehmen wir die Theilchen in erster Annäherung als Rotationskörper an. Von solchen beweisen THOMSON und TAIT in ihrer theoretischen Physik[1]), dass sie stets das Bestreben haben müssen, wenn sie sich in einer Flüssigkeit bewegen oder eine Flüssigkeit um sie herumströmt, sich mit ihrer Längsdimension quer gegen die Flüssigkeitsströmung zu legen. THOMSON und TAIT führen eine Reihe von Vorgängen an, in denen

1) THOMSON und TAIT, Theoretische Physik. Braunschweig 1874. 1. Theil. pag. 299—303.

Digitized by Google

dieses Gesetz in der Natur zum Ausdruck kommt. Ist die Bewegung der Flüssigkeitsmasse keine einfache Strömung in einer Richtung, sondern ein geradliniges Hin- und Zurückströmen, wie im Schwingungsbauche einer tönenden Luftsäule, so ist der Sinn des Drehungsmomentes, das ein in der Flüssigkeit ruhender Rotationskörper erfährt, in allen Phasen der Bewegung der gleiche, und daher muss ein solcher Körper auch in einer hin- und herschwingenden Flüssigkeit bei freier Beweglichkeit sich mit seiner Breitseite quer gegen die Schwingungsrichtung einstellen. Auf diesem Ergebniss der Theorie beruht die Erklärung der Beobachtung, welche Lord Rayleigh gemacht hat, und welche von ihm und später von Herrn Grimsehl zur Schallstärkemessung verwandt worden ist[1]), der Beobachtung nämlich, dass eine Scheibe, die leicht beweglich im Schwingungsbauche einer Kundt'schen Röhre aufgehängt wird, sich beim Tönen der Luftsäule mit ihrer flachen Seite senkrecht zur Röhrenaxe, d. h. zur Schwingungsrichtung einstellt. Es hat keine Schwierigkeit, für einfache Fälle, etwa für ein verlängertes oder abgeplattetes Rotationsellipsoid, die Grösse des besagten Drehungsmomentes zu berechnen; darüber sollen weitere Mittheilungen an einer anderen Stelle gemacht werden. Bei den Kundt'schen Staubfiguren spielt diese Erscheinung insofern eine Rolle, als sie dazu beitragen wird, die entstehenden Rippen und Querwände noch schärfer und flacher zu gestalten. Denn wenn die Staubtheilchen nicht kugelförmig gestaltet sind, so werden sie sich nicht blos zusammen in Flächen, die auf der Bewegungsrichtung senkrecht stehen, anordnen, sondern ein jedes Theilchen wird sich auch noch mit seiner Längserstreckung in diese Fläche legen. Man kann diesen Vorgang deutlich beobachten, wenn man z. B. Korkfeilicht benutzt, dessen Theilchen meist sehr unregelmässig gestaltet sind.

Die behandelten beiden Fälle können als die Grundtypen der bei den akustischen Bewegungserscheinungen vorkommenden Kraftwirkungen hingestellt werden. Von dem Gesichtspunkte aus, der unserer Behandlung dieser Fälle zu Grunde liegt, werden auch alle übrigen durch Schallschwingungen erzeugten Be-

---

1) Rayleigh, Proc. Cambr. Phil. Soc. Nov. 1880; Proc. Royal Soc. 5. Mai 1881. pag. 110; Phil. Mag. (5) 14. pag. 186—187. 1882. Vgl. Beyme, Inaug.-Diss. Zürich 1884; Grimsehl, Wied. Ann. 34. pag. 1028—1038 (1888).

Digitized by Google

wegungserscheinungen, wie sie von Dvorak, Neesen u. A. beobachtet worden sind, behandelt werden können und müssen; immer handelt es sich um das Vorhandensein fremder Massen in der bewegten Flüssigkeit, und so kann man sagen, dass der Schlüssel zur Erklärung aller dieser Erscheinungen in den hydrodynamischen Arbeiten von Kirchhoff, C. Neumann, Beltrami, Bjerknes, Leahy u. A. gegeben ist. Die Schwierigkeiten einer vollkommenen Erklärung werden daher nicht im Ansatz, sondern nur in der Durchführung der Berechnung liegen. Die hier untersuchten beiden Fälle werden genügen, um die Anwendbarkeit dieser Principien darzuthun.

Digitized by Google

SITZUNG VOM 3. MÄRZ 1890.

Martin Krause, *Ueber die Differentialgleichungen, denen die doppelt periodischen Functionen zweiter Art Genüge leisten.*

In diesen Berichten[1]) ist eine Methode angegeben worden, mit deren Hülfe unendlich viele Differentialgleichungen aufgestellt werden können, denen doppelt periodische Functionen zweiter Art Genüge leisten.

Dieselbe soll im Folgenden dazu angewandt werden, um zwei der bekanntesten Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die Lamé'sche und die Picard'sche, zu integriren. Die Lamé'sche Differentialgleichung ist in einer grösseren Reihe von Arbeiten behandelt worden und zwar auf mannigfache Weisen. Wir wollen hier nur eine der letzten Arbeiten herausgreifen, in welchen dieselbe untersucht wird, eine Arbeit von Herrn Sparre, die sich im 3. Bande der Acta mathematica findet. In derselben wird die Lamé'sche Differentialgleichung als specieller Fall einer viel allgemeineren Gleichung behandelt.

Die Picard'sche Gleichung,[2]) die eine Verallgemeinerung einer zuerst von Herrn Gyldén[3]) aufgestellten Gleichung ist, bietet zwei wesentlich von einander verschiedene Fälle dar, je nachdem die in derselben vorkommende Grösse n eine gerade oder ungerade Zahl ist. Herr Picard hat in beiden Fällen die Formen der Lösungen als Summen gewisser einfacher Functionen kurz charakterisirt, ohne aber die Gleichungen wirklich anzugeben, die zur Coefficientenbestimmung dienen können. Auf die zweite Darstellung der Integrale als Producte periodischer Functionen wird überhaupt nicht eingegangen.

---

1) 4. März 1889.
2) Comptes rendus tome 89 pag. 74.
3) Comptes rendus tome 88 pag. 850 et 963.

Digitized by Google

Für gerade Werthe von n — im Sinne von Herrn PICARD — fällt die PICARD'sche Gleichung unter die von Herrn SPARRE behandelte allgemeine Gleichung und ist von Letzterem in ausführlicher Weise untersucht worden, für ungerade Werthe von n dagegen nicht. Es liegt das daran, dass Herr SPARRE die bei ihm auftretenden Grössen α nur in ihrer allgemeinen Form betrachtet, ohne irgend welche specielle Bedingungen über dieselben anzunehmen. Insbesondere sieht er davon ab, dass einige der Grössen α vom Zeichen abgesehen einander gleich werden können. Sowie diese Annahme zugelassen wird, modificiren sich sämmtliche Resultate. Es zeigt sich nun, dass gerade diese Annahme für die Lösung der PICARD'schen Gleichung für den Fall eines ungeraden n von massgebender Bedeutung ist und unmittelbar zur Integration führt.

Im Folgenden sollen nun die LAMÉ'sche und die PICARD'sche Differentialgleichung unter demselben Gesichtspunkte betrachtet werden und zwar soll die Lösung der ersteren und des ersten Falles der zweiten so weit geführt werden, bis sich dieselben Resultate, wie in der SPARRE'schen Arbeit ergeben. Der zweite Fall der PICARD'schen Differentialgleichung soll dann ausführlicher behandelt werden.

Den Betrachungen legen wir die Function zu Grunde:

$$q(w) = \frac{\vartheta_1(v+a_1)\cdots\vartheta_1(v+a_n)}{\vartheta_0(v)^n}\, e^{-\sum_1^n \frac{\vartheta_0'(a_r)}{\vartheta_0(a_r)} v}.$$

Es ist dieses nicht die allgemeinste Function zweiter Art, indessen handelt es sich für uns zunächst auch nicht um die Behandlung der allgemeinsten Fälle, sondern darum, die Brauchbarkeit der Methode an einigen besonders wichtigen Beispielen darzuthun.

§ 1.

Integration der Lamé'schen Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Wir legen den Betrachtungen die Function zu Grunde:

$$(1) \qquad q(w) = \frac{\vartheta_1(v+a_1)\cdots\vartheta_1(v+a_n)}{\vartheta_0(v)^n}\, e^{-\sum \frac{\vartheta_0'(a_r)}{\vartheta_0(a_r)} \cdot v}.$$

Digitized by Google

v und die Grössen a_r sind Argumente von Thetafunctionen, w und α_r die Argumente der entsprechenden elliptischen Functionen.

Mit ihrer Hülfe bilden wir die ganzen transcendenten Functionen:

$$\vartheta_0(v)^{3n-1} \cdot \frac{d^2\varphi(w)}{dw^2}, \quad \vartheta_0(v)^{n+1} \cdot \vartheta_1(v)^{2k} \cdot \vartheta_0(v)^{2n-2k-2} \cdot \frac{d\varphi(w)}{dw},$$

$$\vartheta_0(v)^n \cdot \vartheta_1(v)^{2k} \cdot \vartheta_0(v)^{2n-2k-1} \cdot \varphi(w),$$

$$\vartheta_0(v)^n \cdot \vartheta_1(v) \cdot \vartheta_2(v) \cdot \vartheta_3(v) \cdot \vartheta_1(v)^{2l} \cdot \vartheta_0(v)^{2n-2l-1} \cdot \varphi(w),$$

wobei k alle Werthe $0, 1, \ldots n-1$, l alle Werthe $0, 1, \ldots n-2$ annehmen kann. Sämmtliche Functionen besitzen dieselbe Ordnungszahl und Charakteristik. Die Zahl derselben ist $3n$. Daraus folgt leicht, dass sich die erste von ihnen linear durch die übrigen ausdrücken lassen muss. n ist hierbei grösser als 1 vorausgesetzt.

Führen wir an Stelle der Thetafunctionen die elliptischen Funtionen ein, so folgt die Existenz der Gleichung:

$$(2) \qquad \frac{d^2\varphi(w)}{dw^2} + \sum_0^{n-1}{}_k\, b_k \cdot \mathrm{sn}^{2k}(w)\, \frac{d\varphi(w)}{dw} =$$

$$\varphi(w)\left[\sum_0^{n-1}{}_k\, c_k \cdot \mathrm{sn}^{2k}(w) + \mathrm{sn}\, w \cdot \mathrm{cn}\, w \cdot \mathrm{dn}\, w \sum_0^{n-2}{}_l\, c_l'\, \mathrm{sn}^{2l}(w)\right].$$

Die Coefficienten sind nach bekannten Regeln zu bestimmen, insbesondere werden die Grössen $b_0, \ldots b_{n-1}$ bestimmt, indem w der Reihe nach gleich $-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n$ gesetzt wird.

Für diese Werthe wird die rechte Seite Null und wir erhalten:

$$\sum b_k \cdot \mathrm{sn}^{2k}(\alpha_r) \left(\frac{d\varphi}{dw}\right)_{w=-\alpha_r} = -\left(\frac{d^2\varphi}{dw^2}\right)_{w=-\alpha_r}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist leicht zu bilden. In der That, setzen wir:

$$\varphi_k(w) = \frac{\vartheta_1(v+a_k)}{\vartheta_0(v)} \cdot e^{-\frac{\vartheta_0'(a_k)}{\vartheta_0(a_k)} v},$$

Digitized by Google

so ist:

$$\varphi(w) = \prod_{1}^{n}{}_{k} \varphi_k(w) ,$$

also:

$$\frac{d^2\varphi(w)}{dw^2} = \varphi(w)\sum \frac{1}{\varphi_k(w)} \cdot \frac{d^2\varphi_k(w)}{dw^2} + 2\varphi(w)\sum \frac{1}{\varphi_k(w)\cdot\varphi_l(w)} \frac{d\varphi_k(w)}{dw} \cdot \frac{d\varphi_l(w)}{dw} ,$$

wo die Summen in einfacher nicht näher anzugebender Weise zu erstrecken sind.

Die erste Summe verschwindet, wenn wir $w = -\alpha_r$ setzen, denn es ist bekanntlich:

$$\frac{d^2\varphi_k(w)}{dw^2} = \varphi_k(w)\,(2k^2 \cdot \mathrm{sn}^2 w - 1 - k^2 + k^2 \cdot \mathrm{sn}^2 \alpha) .$$

Es bleibt also nur die zweite Summe zu betrachten übrig. Aus ihr sind alle diejenigen Glieder herauszugreifen, bei denen ein Factor den Index $k = r$ hat, da die übrigen verschwinden, mit anderen Worten, wir erhalten den Ausdruck:

$$\frac{2\varphi(w)}{\varphi_r(w)} \cdot \frac{d\varphi_r(w)}{dw} \sum{}' \frac{d\varphi_l(w)}{dw} \cdot \frac{1}{\varphi_l(w)} ,$$

wo der Strich an der Summe bedeutet, dass dieselbe über alle l von 1 bis n zu nehmen ist, mit Ausnahme von $l = r$, wo ferner an Stelle von w zu setzen ist $-\alpha_r$.

Nun ist, von einem Exponentialfactor abgesehen:

$$\left(\frac{d\varphi_l(w)}{dw}\right)_{w=-\alpha_r} =$$

$$-\frac{\vartheta_1(a_l - a_r)}{\vartheta_0(a_r)} \left[\frac{d\log\vartheta_0(a_l)}{da_l} - \frac{d\log\vartheta_0(a_r)}{da_r} - \frac{d\log\vartheta_1(a_l - a_r)}{da_l}\right].$$

Mithin erhalten wir das Gleichungssystem:

$$\sum_{0}^{n-1}{}_{k} b_k \cdot \mathrm{sn}^{2k}\alpha_r = 2\sum{}'_l \left[\frac{d\log\vartheta_1(a_r - a_l)}{da_r} - \frac{d\log\vartheta_0(a_r)}{da_r} + \frac{d\log\vartheta_0(a_l)}{da_l}\right],$$

wobei die Summe auf der rechten Seite über l in der vorhin angegebenen Weise zu erstrecken ist. Hieraus ergiebt sich aber, wie aus bekannten Relationen folgt:

Digitized by Google

$$\sum_0^{n-1}{}_k\, b_k \cdot \mathrm{sn}^{2k}\alpha_r = 2\sum_l{}' \frac{\mathrm{sn}\,\alpha_l \cdot \mathrm{cn}\,\alpha_l \cdot \mathrm{dn}\,\alpha_l + \mathrm{sn}\,\alpha_r \cdot \mathrm{cn}\,\alpha_r \cdot \mathrm{dn}\,\alpha_r}{\mathrm{sn}^2\alpha_r - \mathrm{sn}^2\alpha_l},$$

oder wenn wir setzen:

$$(3)\qquad \begin{aligned} x_k &= \mathrm{sn}^2\alpha_k\,, \\ u_k &= \mathrm{sn}\,\alpha_k \cdot \mathrm{cn}\,\alpha_k \cdot \mathrm{dn}\,\alpha_k\,, \end{aligned}$$

$$(4)\qquad \sum_0^{n-1}{}_k\, b_k \cdot \mathrm{sn}^{2k}\alpha_r = 2\sum_l{}' \frac{u_l + u_r}{x_r - x_l}\,.$$

Diese Gleichungen können noch in eine andere Form gebracht werden. Dazu denken wir uns die Gleichung gebildet, deren Wurzeln die Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind. Dieselbe möge lauten:

$$(5)\qquad f(x) = x^n + p_1 \cdot x^{n-1} + p_2 \cdot x^{n-2} + \cdots p_n = 0\,.$$

Ferner setzen wir:

$$(6)\qquad \frac{f(x)}{x - x_k} = f_k(x)\,.$$

Unter diesen Annahmen können wir unser Gleichungssystem schreiben:

$$(7)\qquad f'(x_r) \cdot \sum_0^{n-1}{}_k\, b_k \cdot \mathrm{sn}^{2k}\alpha_r = 2\sum_1^n{}_l\, u_l \cdot f_l'(x_r)\,.$$

Aus diesem Gleichungssystem sind die Grössen b_k bestimmt. Die Grössen c_k und c_l' auf der rechten Seite der Gleichung (2) sind dann mit Hülfe von Reihenentwickelungen zu berechnen.

Bei diesen Betrachtungen ist über die Grössen $a_1, a_2, \ldots a_n$ keinerlei Annahme gemacht worden. Wir können nun auf mannigfache Weise über dieselben verfügen, so dass die Coefficienten besonders einfache Werthe annehmen. Eine diese Specialisirungen ergiebt die LAMÉ'sche Differentialgleichung.

In der That, wir wollen die Grössen a_k jetzt so bestimmen, dass die Coefficienten b_k sämmtlich gleich Null werden. Die hinreichenden und nothwendigen Bedingungen hierfür lauten:

$$(8)\qquad \sum_1^n{}_l\, u_l \cdot f_l'(x_r) = 0\,, \qquad r = 1, 2, \ldots n\,.$$

Digitized by Google

Bei dieser Annahme nimmt dann auch die rechte Seite eine besonders einfache Form an. Denken wir uns nämlich die linke und rechte Seite der Differentialgleichung nach Potenzen von $\left(w + \frac{\tau}{2}\right)$ entwickelt, so ist die kleinste negative Potenz auf der linken Seite die $-(n+2)^{\text{te}}$. Daraus folgt, dass auf der rechten Seite jedenfalls nur die Glieder stehen bleiben können:

$$\varphi(w)\,(c_0 + c_1 \cdot \mathrm{sn}^2 w + c_0' \cdot \mathrm{sn}\, w \cdot \mathrm{cn}\, w \cdot \mathrm{dn}\, w)\,.$$

Nnn folgt aber auf der linken Seite auf die $-(n+2)^{\text{te}}$ Potenz sofort die $-n^{\text{te}}$, daher muss auch $c_0' = 0$ sein, oder also wir erhalten die Gleichung:

$$\frac{d^2\varphi(w)}{dw^2} = \varphi(w)\,(c_0 + c_1 \cdot \mathrm{sn}^2 w)\,.$$

Das ist aber die LAMÉ'sche Differentialgleichung, wenn wir noch hinzunehmen, dass, wie unmittelbar folgt:

$$c_1 = n(n+1)\,k^2 \quad \text{ist.}$$

Es kommt also das ganze Problem, die LAMÉ'sche Differentialgleichung zu integriren, darauf hinaus, das Gleichungssystem aufzulösen:

$$\sum_0^n{}^l u_l \cdot f_l'(x_r) = 0\,.$$

Nun haben wir gesetzt:

$$f_l(x) = x^{n-1} + (p_1 + x_l)\,x^{n-2} + (p_2 + p_1 x_l + x_l^2)\,x^{n-3} + \\ + \cdots p_{n-1} + p_{n-2} \cdot x_l + \cdots x_l^{n-1}\,,$$

also folgt:

$$f_l'(x_r) = (n-1)\,x_r^{n-2} + (n-2)\,(p_1 + x_l)\,x_r^{n-3} + \cdots p_{n-2} + \\ + p_{n-3} \cdot x_l + \cdots x_l^{n-2}\,.$$

Setzen wir diese Ausdrücke ein, so erhalten wir ein bekanntes Gleichungssystem der Algebra. Es folgt:

$$u_1 \cdot f'(x_1) = u_2 \cdot f'(x_2) \cdots = u_n \cdot f'(x_n)\,.$$

Digitized by Google

Das ist aber dasselbe Gleichungssystem, welches Herr SPARRE in seiner Arbeit aufstellt, so dass wir hiermit die Theorie der LAMÉschen Differentialgleichung abschliessen können.

§ 2.

Ableitung der Picard'schen Differentialgleichung zweiter Ordnung für den Fall eines ungeraden n.

Wir legen denselben Ausdruck wie vorhin zu Grunde:

$$(1) \quad q(w) = \frac{\vartheta_1(v+a_1)\cdot\cdots\cdot\vartheta_1(v+a_n)}{\vartheta_0(v)^n}\cdot e^{-\sum\frac{\vartheta_0'(a_r)}{\vartheta_0(a_r)}\cdot v} .$$

und bilden die Ausdrücke:

$$\vartheta_3(v)\cdot\vartheta_0(v)^{3n-3}\frac{d^2\varphi(w)}{dw^2} ,$$

$$\vartheta_3(v)\cdot\vartheta_0(v)^{n+1}\cdot\vartheta_0(v)^{2n-2k-4}\cdot\vartheta_1(v)^{2k}\cdot\frac{d\varphi(w)}{dw} ,$$

$$\vartheta_1(v)\cdot\vartheta_2(v)\cdot\vartheta_0(v)^{3n-4}\frac{d\varphi(w)}{dw} ,$$

$$\vartheta_3(v)\cdot\vartheta_0(v)^{n+1}\cdot\vartheta_0(v)^{2n-2k-4}\cdot\vartheta_1(v)^{2k}\cdot\varphi(w) ,$$

$$\vartheta_1(v)\cdot\vartheta_2(v)\cdot\vartheta_0(v)^{n}\cdot\vartheta_0(v)^{2n-2k-4}\cdot\vartheta_1(v)^{2k}\cdot\varphi(w) .$$

In diesen Ausdrücken kann k der Reihe nach die Werthe annehmen: $0, 1, \cdots n-2$.

Dieselben sind sämmtlich Functionen dritter Art von der Ordnungszahl $3n-2$, die denselben Bedingungsgleichungen Genüge leisten. Ihre Zahl ist gleich $3n-1$. Daraus folgt leicht, dass sich die erste derselben linear durch die übrigen darstellen lassen muss. Führen wir wiederum die elliptischen Functionen ein, so folgt die Existenz der Gleichung:

$$(2) \quad \frac{d^2\varphi(w)}{dw^2} + \left(b_0 + b_1\cdot\mathrm{sn}^2 w + \cdots b_{n-2}\cdot\mathrm{sn}^{2n-4}w + b_{n-1}\cdot k^2\cdot\frac{\mathrm{sn}\,w\cdot\mathrm{cn}\,w}{\mathrm{dn}\,w}\right)\frac{d\varphi(w)}{dw} =$$

$$= \varphi(w)\left[\sum_0^{n-2} c_k\,\mathrm{sn}^{2n-2k}w + \frac{\mathrm{sn}\,w\cdot\mathrm{cn}\,w}{\mathrm{dn}\,w}\sum_0^{n-2} c_k'\cdot\mathrm{sn}^{2n-2k}w\right] .$$

Digitized by Google

Die Constanten $b_0, \cdots b_{n-1}$ sind dadurch bestimmt, dass die rechte Seite für $w = -\alpha_r$ verschwindet, die linke also auch. Die Bestimmungsgleichungen lauten:

$$(3)\quad b_0 + b_1 \operatorname{sn}^2\alpha_r + \cdots b_{n-2}\cdot \operatorname{sn}^{2n-4}\alpha_r - b_{n-1}\cdot k^2 \cdot \frac{\operatorname{sn}\alpha_r \cdot \operatorname{cn}\alpha_r}{\operatorname{dn}\alpha_r} =$$

$$= 2\sum{}' \frac{u_r + u_l}{x_r - x_l}\ .$$

Die Coefficienten auf der rechten Seite sind durch Reihenentwickelungen bestimmt.

Das gilt allgemein. Nun wollen wir specialisiren und untersuchen, ob wir nicht die Grössen $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ so bestimmen können, dass die Constanten $b_0, b_1, \cdots b_{n-2}$ verschwinden. Es folgt dann ähnlich wie im ersten Paragraphen, dass die resultirende Differentialgleichung die Form annehmen würde:

$$(4)\quad \frac{d^2\varphi(w)}{dw^2} + b_{n-1}\cdot k^2 \cdot \frac{\operatorname{sn} w \cdot \operatorname{cn} w}{\operatorname{dn} w}\cdot \frac{d\varphi(w)}{dw} = \varphi(w)\,(c_0 + c_1 \operatorname{sn}^2 w)\ .$$

Setzen wir nun:

$$(5)\qquad y_r = \operatorname{dn}^2\alpha_r\ ,$$

so können die Bedingungsgleichungen für die Grössen α_r geschrieben werden:

$$(6)\qquad \frac{b_{n-1}}{2}\cdot u_r = \sum{}' \frac{u_r + u_l}{y_r - y_l}\ .$$

Wir würden zu den Bedingungsgleichungen des vorigen Paragraphen gelangen, wenn wir $b_{n-1} = 0$ setzen. Wir multipliciren nun im *allgemeinen* Falle die Gleichungen der Reihe nach mit y_1^k, $y_2^k \cdots y_n^k$ und addiren. Das Resultat nimmt die Form an:

$$(7)\quad \frac{b_{n-1}}{2}\sum u_r \cdot y_r^{k-1} = n-k \sum u_r \cdot y_r^{k-1} + s_1 \cdot \sum u_r \cdot y_r^{k-2} + \cdots s_{k-1}\cdot \sum u_r\ ,$$

wobei die Grössen s die entsprechenden Potenzsummen der Grössen y bedeuten. Diese Gleichung gilt für $k = 1, 2, \cdots$.

Daraus folgt, dass wenn $\frac{b_{n-1}}{2}$ keine der Zahlen $1, 2, \cdots n-1$ ist, dass dann jedenfalls sein müsste:

Digitized by Google

$$\sum u_r \cdot y_r^{\,k} = 0$$

für $k = 0, 1, \cdots n-2$. Das aber führt ohne weitere Annahme zu einem Widerspruch, denn dann würde ja folgen $b_{n-1} = 0$. Wir haben uns also, wenn keine Specialisirung vorgenommen wird, auf die soeben definirten Werthe von b_{n-1} zu beschränken. Für diese lautet die entsprechende Differentialgleichung, wenn wir $b_{n-1} = 2(\nu+1)$ setzen:

$$\frac{d^2\varphi(w)}{dw^2} + 2(\nu+1)k^2 \frac{\mathrm{sn}w \cdot \mathrm{cn}w}{\mathrm{dn}w} \cdot \frac{d\varphi(w)}{dw} = \varphi(w)(c_0 + n(n-2\nu-1)\mathrm{sn}^2 w)\,.^1)$$

Es hat keine Schwierigkeit, diesen soeben definirten Fall weiter zu untersuchen. Wir wollen aber weiter specialisiren.

Im Falle n eine *ungerade* Zahl bedeutet, können wir nämlich ν so specialisiren, dass wir zu der PICARD'schen Gleichung gelangen. In der That, die PICARD'sche Gleichung erhalten wir, wenn $c_1 = 0$ ist oder also:

$$b_{n-1} = n+1$$

oder wenn wir $n = 2\mu + 1$ setzen:

$$\frac{b_{n-1}}{2} = \mu + 1\,. \tag{8}$$

Diesen Werth von b_{n-1} wollen wir in der Folge allein in Betracht ziehen. Für denselben können wir unser Gleichungssystem schreiben:

$$\begin{aligned}
&\sum_1^n u_r \cdot y_r^{\,k} = 0\,, \qquad k = 0, 1, \cdots \mu - 2\,,\\
&\sum_1^n u_r [-y_r^{\,\mu} + s_1 \cdot y_r^{\,\mu-1}] = 0\,,\\
&\sum_1^n u_r [-2y_r^{\,\mu+1} + s_1 \cdot y_r^{\,\mu} + s_2 \cdot y_r^{\,\mu-1}] = 0\,, \qquad (9)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\sum_1^n u_r [-(\mu+1)y_r^{\,2\mu} + s_1 \cdot y_r^{\,2\mu-1} + \cdots s_{\mu+1} \cdot y_r^{\,\mu-1}] = 0\,.
\end{aligned}$$

1) In Bezug auf diese Differentialgleichung möge auch noch u. a. auf zwei Noten von Herrn GYLDÉN verwiesen werden, die sich im 90. Bande der Comptes rendus befinden, pag. 208 und 304.

Digitized by Google

Es kann dieses Gleichungssystem leicht direct aufgelöst werden; wir ziehen es aber vor, es in eine noch übersichtlichere Form zu bringen, indem wir die Gleichung einführen, welcher die Grössen $y_1 \cdots y_n$ Genüge leisten.

Dieselbe möge lauten:

$$F(y) = y^n + p_1' \cdot y_1^{n-1} + \cdots p_n' = 0 ,$$

dann können wir das Gleichungssystem schreiben:

$$\sum u_r \cdot y_r^k = 0 , \qquad k = 0, 1, \cdots \mu - 2 ,$$

$$\sum u_r [y_r^\mu + p_1' \cdot y_r^{\mu-1}] = 0 , \tag{10}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum u_r [y_r^{2\mu} + p_1' \cdot y_r^{2\mu-1} + \cdots p_{\mu+1}' \cdot y_r^{\mu-1}] = 0 .$$

Setzen wir hierin:

$$u_r = v_r \cdot y_r^{\mu+1} , \tag{11}$$

so leistet v_r den Gleichungen Genüge:

$$\sum v_r \cdot y_r^{k+\mu+1} = 0 , \qquad k = 0, 1, \cdots \mu - 2 ,$$

$$\sum v_r [y_r^n + p_1' \cdot y_r^{n-1}] = 0 , \tag{12}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum v_r [y_r^{n+\mu} + p_1' \cdot y_r^{n+\mu-1} + \cdots p_{\mu+1}' \cdot y_r^{n-1}] = 0 .$$

Das ist aber wieder ein bekanntes Gleichungssystem der Algebra. Ihm leisten die Functionen Genüge:

$$v_r = \frac{1}{F(y_r)} . \tag{13}$$

Dass diese Werthe auch dem ursprünglichen Gleichungssystem Genüge leisten, braucht nicht näher auseinandergesetzt zu werden. Hiermit sind wir wiederum zu den Resultaten von Herrn SPARRE gelangt und können diesen Fall abschliessen.

Digitized by Google

§ 3.

Untersuchung der Picard'schen Differentialgleichung zweiter Ordnung für den Fall eines geraden n.

Die Betrachtungen der vorigen Paragraphen waren zunächst sowohl für gerade als auch ungerade n gültig. Wir fanden, die Function $\varphi(w)$ leistet der Differentialgleichung:

$$(1)\quad \frac{d^2\varphi(w)}{dw^2} + b_{n-1}\cdot k^2\cdot \frac{\operatorname{sn} w\cdot \operatorname{cn} w}{\operatorname{dn} w}\cdot \frac{d\varphi(w)}{dw} = \varphi(w)\,(c_0 + c_1 \operatorname{sn}^2 w)$$

Genüge, wenn die Bedingungsgleichungen bestehen:

$$(2)\quad \frac{b_{n-1}}{2}\cdot \frac{u_r}{y_r} = \sum{}' \frac{u_r + u_l}{y_r - y_l}\ .$$

Erst bei dem Uebergang zur PICARD'schen Gleichung tritt ein Unterschied ein. Dieselbe ergiebt sich, wenn $c_1 = 0$ gesetzt ist. Dann aber wird:

$$(3)\quad b_{n-1} = n + 1 = 2\mu + 1\ ,$$

wenn wir annehmen, dass n eine gerade Zahl 2μ ist.

Für einen solchen Werth von b_{n-1} sind aber die obigen Gleichungen nicht ohne Weiteres auflösbar. Um auch in diesem Falle eine Auflösung zu erhalten, specialisiren wir. Wir haben bisher stillschweigend angenommen, dass die Grössen y_r alle von einander verschieden sind. Diese Annahme wollen wir jetzt fallen lassen, dann modificiren sich die Resultate.

In der That, greifen wir das Glied heraus:

$$\frac{u_r + u_l}{y_r - y_l} = \frac{1}{k^2}\cdot \frac{\operatorname{sn}\alpha_r\cdot \operatorname{cn}\alpha_r\cdot \operatorname{dn}\alpha_r + \operatorname{sn}\alpha_l\cdot \operatorname{cn}\alpha_l\cdot \operatorname{dn}\alpha_l}{\operatorname{sn}^2\alpha_l - \operatorname{sn}^2\alpha_r}$$

und machen die Annahme, dass:

$$\alpha_r = -\alpha_l$$

ist, so nimmt das Glied die Form an:

$$-\frac{1}{k^2}\cdot \frac{1 - 2(1+k^2)\operatorname{sn}^2\alpha_r + 3k^2\operatorname{sn}^4\alpha_r}{2\cdot \operatorname{sn}\alpha_r\cdot \operatorname{cn}\alpha_r\cdot \operatorname{dn}\alpha_r}\ .$$

Digitized by Google

Wir erhalten also in diesem Falle ein ganz anderes Gleichungssystem. Ob dieses freilich auflösbar sein wird ist fraglich, da die Zahl der Gleichungen im allgemeinen grösser ist, als die Zahl der Unbekannten.

In einem Falle fällt diese Schwierigkeit fort, wenn wir nämlich die Annahme machen:

$$(4) \qquad \alpha_1 = -\alpha_n\,, \qquad \alpha_2 = -\alpha_{\mu-1}\,, \cdots \alpha_\mu = -\alpha_{\mu+1}\,.$$

In diesem Falle nämlich reducirt sich unser Gleichungssystem auf ein System von μ Gleichungen mit den μ Unbekannten $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_\mu$, auf das Gleichungssystem nämlich:

$$(5) \quad \frac{b_{n-1}}{2}\cdot\frac{u_r^2}{y_r} = -\frac{1-2(1+k^2)\operatorname{sn}^2\alpha_r+3k^2\operatorname{sn}^4\alpha_r}{2k^2} + 2\sum{}'\frac{u_r^2}{y_r-y_l}\,.$$

Der Strich an der Summe bedeutet, dass dieselbe zu erstrecken ist nach l über $1, 2, \cdots \mu$ mit Ausnahme von $l = r$. An Stelle von r ist der Reihe nach zu setzen $1, 2, \cdots \mu$.

Dieses Gleichungssystem kann in der folgenden Weise aufgelöst werden. Wir setzen wie früher:

$$x_r = \operatorname{sn}^2\alpha_r$$

und nehmen an, dass die Grössen x_r der Gleichung Genüge leisten:

$$(6) \qquad f(x) = x^\mu + p_1\cdot x^{\mu-1} + p_2\cdot x^{\mu-2} + \cdots p_\mu = 0\,.$$

Unter diesen Voraussetzungen kann unser Gleichungssystem geschrieben werden:

$$(7) \quad \left[1 - x_r(2+2k^2-k^2\cdot b_{n-1}) + x_r^2\cdot k^2(3-b_{n-1})\right] f'(x_r) + 4x_r\left(1 - x_r(1+k^2) + k^2\cdot x_r^2\right) f_r'(x_r) = 0\,.$$

Für allgemeine Werthe von b_{n-1} ist die Gleichung in x_r vom Grade $\mu+1$, für den speciellen Werth von b_{n-1} dagegen, welcher die PICARD'sche Differentialgleichung ergiebt und der jetzt aufgenommen werden möge, wird der Factor von $x_r^{\mu+1}$ gleich Null, so dass die Gleichung den Grad μ besitzt. Dieselbe besitzt genau dieselben Wurzeln wie die Gleichung:

$$f(x) = 0\,,$$

muss also mit ihr übereinstimmen.

Digitized by Google

Da nun

$$f'(x_r) = \mu \cdot x_r^{\mu-1} + (\mu-1)\, p_1 \cdot x_r^{\mu-2} + \cdots p_{\mu-1} ,$$
$$2f_r'(x_r) = \mu(\mu-1)\, x_r^{\mu-2} + (\mu-1)(\mu-2) p_1 \cdot x_r^{\mu-3} + \cdots + 2p_{\mu-2}$$

ist, so ergiebt die Vergleichung die Relationen:

$$p_l = \frac{e_1 \cdot p_{l-1} + e_2 \cdot p_l + e_3 p_{l+1}}{e_4 + e_5 \cdot p_1} ,$$

(8)
$$\begin{aligned} e_1 &= (\mu - l + 1)(2\mu - 2l + 1) , \\ e_2 &= (\mu - l)\,(2(l-\mu) + k^2(2l+1)) , \\ e_3 &= -2k^2(l+1)(\mu - l - 1) , \\ e_4 &= \mu(-2\mu + k^2) , \\ e_5 &= -2k^2(\mu - 1) . \end{aligned}$$

In diesen Relationen ist an Stelle von l der Reihe nach zu setzen $1, 2, \cdots \mu$. Die $\mu - 2$ ersten Relationen drücken dann die Grössen $p_2, \cdots p_{\mu-1}$ als rationale ganze Functionen von p_1 aus und zwar von den resp. Graden $2, 3, \cdots \mu - 1$. Setzen wir diese Werthe in die vorletzte Gleichung:

$$p_{\mu-1} = \frac{p_{\mu-2} + p_{\mu-1}}{\mu(-2\mu + k^2) - 2k^2 p_1(\mu - 1)}$$

ein, so erhalten wir für die Grösse p_1 eine Gleichung vom Grade μ_1, die in jedem einzelnen Falle sofort aufgestellt werden kann.

Wir erhalten also den

Lehrsatz: *Das Gleichungssystem* (5) *ist auflösbar und zwar leisten die Grössen x_r einer Gleichung μ^{ten} Grades Genüge, deren Coefficienten sich sämmtlich rational durch eine Lösung einer anderen Gleichung μ^{ten} Grades darstellen lassen.*

Dann folgt aber, dass auch c_0 bestimmt ist und zwar als Wurzel einer Gleichung μ^{ten} Grades, die sich aus der Gleichung für die Grösse p_1 unmittelbar herleiten lässt. In der That, ver-vermöge der Reihenentwickelung ergiebt sich für c_0 der Werth:

$$c_0 = 2(n-2)\sum_1^{\mu} k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha_r + nk^2 - n^2 ,$$

Digitized by Google

oder also:

$$c_0 = -2(n-2)k^2 p_1 + nk^2 - n^2 . \tag{9}$$

Damit ist die Richtigkeit der Behauptung erwiesen und ein Integral der PICARD'schen Gleichung auch in diesem Falle gefunden. Die Form der Lösung ist von der PICARD'schen völlig verschieden, indessen ist es nicht schwer, sie auf die PICARD'sche zu reduciren.

In der That wir können unser Integral schreiben:

$$\varphi(w) = \prod_1^{\mu} \frac{\vartheta_1(v+a_r)\cdot\vartheta_1(v-a_r)}{\vartheta_0(v)^2} .$$

An seiner Stelle können wir auch die Function nehmen:

$$\varphi_1(w) = \prod_1^{\mu} \frac{\vartheta_0^2\cdot\vartheta_1(v+a_r)\cdot\vartheta_1(v-a_r)}{\vartheta_0(v)^2\cdot\vartheta_0^2(a)}$$

oder auch:

$$\varphi_2(w) = \prod_1^{\mu} (\mathrm{sn}^2 w - \mathrm{sn}^2 a_r) . \tag{10}$$

Verwandeln wir dieses Product in eine Summe, so erhalten wir genau das PICARD'sche Resultat und zwar drücken sich die Coefficienten unmittelbar durch die von uns bestimmten Grössen p aus. Wir wollen nun zusehen, ob es nicht noch eine weitere Lösung des Gleichungssystemes (2) giebt.

Dazu machen wir jetzt diejenige Annahme, die auf die bisher gemachte naturgemäss folgt. Wir nehmen nämlich an, dass die Gleichungen bestehen:

$$\alpha_1 = -\alpha_n , \quad \alpha_2 = -\alpha_{n-1} , \cdots \alpha_{\mu-1} = -\alpha_{\mu+2} , \tag{11}$$

während α_μ verschieden ist von $\alpha_{\mu+1}$. Eine Betrachtung einfachster Art zeigt dann, dass sicherlich die Relationen bestehen müssen:

$$u_\mu = u_{\mu+1} = 0 , \tag{12}$$

sie zeigt ferner, dass:

$$\mathrm{sn}^2 \alpha_\mu = 0 , \quad \mathrm{sn}^2 \alpha_{\mu+1} = 1 \tag{13}$$

oder umgekehrt sein muss.

Digitized by Google

Dann werden die Gleichungen, denen die Grössen $\mathrm{sn}^2 \alpha_r$ Genüge leisten:

$$(14)\quad \frac{b_{n-1}}{2} \cdot \frac{u_r^2}{y_r} = -\frac{1 - 2(1+k^2)\mathrm{sn}^2\alpha_r + 3k^2 \cdot \mathrm{sn}^4\alpha_r}{2k^2} + \\ + 2u_r^2 \sum{}' \frac{1}{y_r - y_l} - \frac{u_r^2}{k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\alpha_r} + \frac{u_r^2}{k^2 \cdot \mathrm{cn}^2\alpha_r} .$$

An Stelle von r ist der Reihe nach zu setzen $1, 2, \cdots \mu - 1$, die Summe ist nach l zu nehmen über alle l von 1 bis $\mu - 1$ mit Ausnahme von $l = r$.

Das Gleichungssystem kann auch folgendermassen geschrieben werden:

$$(15)\quad 3 + x_r(-6 + k^2(2\mu - 3)) - x_r^2 k^2 (2\mu - 6) + 4u_r^2 \sum{}' \frac{1}{x_r - x_l} = 0 .$$

Führen wir wieder die Gleichung ein, welcher die Grössen Genüge leisten:

$$(16)\quad x^{\mu-1} + q_1 x^{\mu-2} + q_2 x^{\mu-3} + \cdots q_{\mu-1} = q(x) = 0 ,$$

und stellen ganz analoge Betrachtungen wie im vorigen Falle an, so erhalten wir die Beziehungen:

$$q_l = \frac{d_1 \cdot q_{l-1} + d_2 \cdot q_l + d_3 \cdot q_{l+1}}{d_3 + d_5 \cdot q_1} ,$$

$$(17)\quad \begin{aligned} d_1 &= (\mu - l)(2\mu - 2l + 1) , \\ d_2 &= (\mu - l - 1)(k^2(2l + 1) - 2(\mu - l + 1)) , \\ d_3 &= -2k^2(l + 1)(\mu - l - 1) , \\ d_4 &= (\mu - 1)(k^2 - 2\mu - 2) , \\ d_5 &= -2k^2(\mu - 1) . \end{aligned}$$

Die Zahl der Relationen ist gleich $\mu - 1$. Aus den $\mu - 2$ ersten sind die Grössen $q_2, \ldots q_{\mu-1}$ als ganze Functionen von q_1 von den resp. Graden $2, \ldots \mu - 1$ bestimmt. Setzen wir diese Ausdrücke in die letzte Gleichung, so erhalten wir eine Gleichung vom Grade μ, welcher die Grösse q_1 Genüge leisten muss.

Digitized by Google

Wir finden also den

Lehrsatz: *Das Gleichungssystem* (14) *ist auflösbar und zwar leisten die Grössen* x_r *einer Gleichung vom Grade* $(\mu - 1)$ *Genüge, deren Coefficienten sich sämmtlich rational durch eine Lösung einer Gleichung* μ^{ten} *Grades darstellen lassen.*

Dann aber folgt genau so wie im vorigen Falle, dass die Grösse c_0 als Wurzel einer Gleichung μ^{ten} Grades bestimmt ist. Diese Gleichung μ^{ten} Grades ist, wie nicht weiter ausgeführt werden möge, mit der im früheren Falle gefundenen identisch, so dass wir auf unserem Wege das zweite Integral der vorgelegten Differentialgleichung gefunden haben.

Dasselbe kann genau so wie das erste in die PICARD'sche Form gebracht werden, so dass auch in diesem Falle die Integration vollkommen durchgeführt ist.

Digitized by Google

Hermann Wiener, *Zur Theorie der Umwendungen.*[1]) Vorgelegt von Neumann. Mit 7 Figuren.

IV. Die Ueberführung eines Systems aus einer Lage in eine beliebige andere.

12. Die Wichtigkeit der vorausgehenden Betrachtungen beruht, wie erwähnt, auf dem Satz, dass jedes starre System aus einer Lage in jede andere durch eine Schraubung gebracht werden kann, oder, wie wir jetzt besser sagen, um auch die besonderen Fälle einzuschliessen, durch die Folge zweier Umwendungen. Den bisherigen Elementarbewegungen entsprechend, führte man den Beweis so, dass man das System aus der Anfangslage durch eine Schiebung in eine Zwischenlage brachte, von welcher aus es durch eine Drehung in die Endlage übergeführt werden konnte, woraus der Satz folgt, wenn man weiss, dass sich diese beiden Bewegungen zu einer Schraubung vereinigen. Ist so der Beweis geleistet, so lässt sich auch eine einfache Construction für die Axe dieser Schraubung angeben[2]).

Sollen die Umwendungen die Grundlage bilden, so ist dieser Beweis durch einen anderen zu ersetzen. Wir wollen im Folgenden einen solchen führen, der sich durch die Einfachheit seiner Voraussetzungen auszeichnet. Wir knüpfen, ohne die Betrachtungen des II. und III. Abschnittes zu benützen, direct an den Begriff der Umwendung an, indem wir, nach Aufstellung einer einfachen Bedingung für die Umwendbarkeit zweier Punkte in

---

1) Dieser Aufsatz ist die Fortsetzung des auf Seite 13—23 abgedruckten: »Die Zusammensetzung zweier endlichen Schraubungen zu einer einzigen«.

2) Man vergleiche Schell »Theorie der Bewegung und der Kräfte«, 2. Auflage. S. 161 u. 162.

Digitized by Google

zwei andere (13.), einen Satz ableiten, der, wie sich später ergeben wird, auch von Wichtigkeit zur Beurteilung der Stellung ist, welche die Theorie der Umwendungen verwandten Zweigen der Geometrie gegenüber einnimmt: den Satz, dass jede Bewegung, welche die Lage zweier Punkte gegenseitig vertauscht, durch eine Umwendung ersetzt werden kann (14.), woraus sich sofort ergiebt, dass dasselbe von einer Bewegung gilt, welche eine Gerade mit sich selbst in umgekehrtem Sinne zur Deckung bringt (15.). Nun lässt sich aber jede Gerade durch eine Umwendung mit jeder anderen in beliebigem Sinne zur Deckung bringen (16.). Man braucht also (17.) nur irgend eine Gerade des Systems aus ihrer Anfangslage in umgekehrtem Sinne in ihre Endlage umzuwenden, so ist das System dadurch in eine Zwischenlage gelangt, aus der es durch eine zweite Umwendung in die Endlage gebracht werden kann.

Dieser Gang des Beweises hat noch den Vortheil vor dem bisherigen, dass er sofort die beiden Geraden liefert, um welche umgewandt werden muss, was dann mit Rücksicht auf die Sätze des II. Abschnittes noch auf eine neue Eigenschaft der Schraubenaxe führt (18.).

13. Vorerst stellen wir eine einfache Bedingung dafür auf, dass zwei starr verbundene Punkte durch eine Umwendung um eine Gerade aus den Anfangslagen A_1, B_1 in die Endlagen A_2, B_2 gebracht werden können. Bei dieser Bewegung müssen die in A_1 und A_2, und ebenso die in B_1 und B_2 gelegenen Punkte gerade ihre Lage vertauschen; wenn also s die Axe der Umwendung ist, so wird

$$A_1 A_2 B_1 B_2 \{ s \} A_2 A_1 B_2 B_1 .$$

Daraus folgen (nach 3.) die Gleichungen:

$$A_1 B_1 = A_2 B_2 ; \quad A_1 B_2 = A_2 B_1 ,$$

wovon die erste ausdrückt, dass die Punkte starr verbunden sind, also nur die zweite etwas Neues aussagt.

Wir können nun auch die Umkehrung dieses Satzes beweisen:

Zwei starr verbundene Punkte lassen sich aus einer Anfangslage A_1, B_1 durch eine Umwendung in die Endlage A_2, B_2 bringen, wenn die geradlinigen Stücke zwischen der Anfangslage eines jeden und der Endlage des anderen gleich lang sind, also wenn $A_1 B_2 = A_2 B_1$.

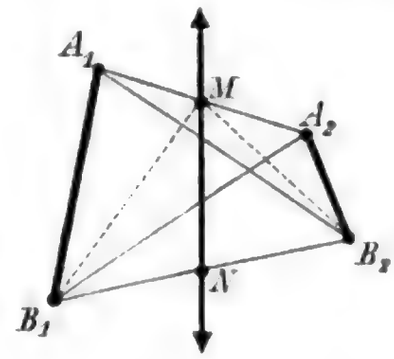
Digitized by

Es ist nur zu zeigen, dass unter dieser Bedingung die Verbindungsgerade der Mittelpunkte der beiden Stücke $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ auf diesen senkrecht steht, d. h. wenn M und N diese Mittelpunkte sind, dass

$$MN \perp A_1 A_2 \quad \text{und} \quad MN \perp B_1 B_2 .$$

Da die Punkte starr verbunden sind, tritt zu der Bedingung noch die weitere:

$$A_1 B_1 = A_2 B_2 ,$$



woraus folgt

I: $\triangle A_1 A_2 B_1 \cong A_2 A_1 B_2$,

II: $\triangle B_1 B_2 A_1 \cong B_2 B_1 A_2$

(Congruenz wegen Gleichheit dreier Seiten); dann folgt aus I.

$$M B_1 = M B_2$$

(als entsprechende Linien in congruenten Dreiecken). Da nun $B_1 M B_2$ ein gleichschenkliges Dreieck ist, und N die Mitte seiner Grundlinie, so ist

$$MN \perp B_1 B_2 .$$

Ebenso folgt aus II.

$$MN \perp A_1 A_2 ,$$

w. z. b. w.

14. **Satz**. *Eine Bewegung, bei der zwei Punkte ihre Lage vertauschen, ist stets durch eine Umwendung ersetzbar.*

Denn wird durch die Bewegung, welche wir der früheren Bezeichnung (3.) entsprechend durch $\{\mathfrak{B}\}$ ausdrücken wollen, die Lage der in A_1 und A_2 befindlichen Punkte vertauscht, und ist B_1 ein beliebiger, nicht auf der Geraden $A_1 A_2$ gelegener, weiterer Punkt, B_2 die Endlage desselben, also

$$A_1 A_2 B_1 \{\mathfrak{B}\} A_2 A_1 B_2 ,$$

so ist wegen der Starre des Systems

$$A_1 B_1 = A_2 B_2 ; \quad A_2 B_1 = A_1 B_2 ,$$

also (13.) giebt es eine Gerade s, so dass:

$$A_1 B_1 \{s\} A_2 B_2 ,$$

was auch geschrieben werden kann:

$$A_1 A_2 B_1 \{s\} A_2 A_1 B_2 .$$

Digitized by Google

Daraus folgt, dass ein Dreieck durch $\{\mathfrak{B}\}$ und durch $\{s\}$ in dieselbe Endlage übergeführt wird, also (7.)

$$\{\mathfrak{B}\} = \{s\}.$$

Zusatz I. *Vertauschen bei einer Bewegung zwei Punkte ihre Lage, so vertauscht jeder Punkt seine Lage mit demjenigen, in welchen er bei der Bewegung übergeht*[1]).

Zusatz II. *Es giebt keine involutorische Bewegung, die nicht durch eine Umwendung zu ersetzen wäre.*

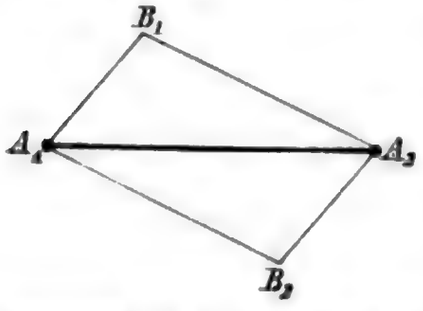
Denn die Bedingung der involutorischen Bewegung verlangt (4.), dass ein Punkt, welchen sie aus A_1 nach A_2 bringt, bei ihrer Wiederholung nach A_1 zurückkehre. Dann ist die Bewegung aber wie eben bewiesen, durch eine Umwendung ersetzbar[2]).

15. Bei einer Umwendung gelangt jede Gerade, welche die Umwendaxe senkrecht trifft, mit sich selbst zur Deckung, doch so, dass ein der Geraden beigelegter Sinn in den umgekehrten verwandelt wird. Es gilt aber auch umgekehrt der

Satz. *Wird durch eine Bewegung eine Gerade mit sich selbst in umgekehrtem Sinne zur Deckung gebracht, so lässt sich die Bewegung durch eine Umwendung ersetzen, deren Axe die Gerade senkrecht trifft.*

---

1) Durch die Bestimmung, dass A_1 und A_2 ihre Lage vertauschen sollen, ist die Endlage noch nicht bestimmt, da das starre System, der Bedingung folgend, sich immer noch um die Gerade $A_1 A_2$ drehen kann. Aber in jede dieser möglichen Endlagen kann es durch eine Umwendung gebracht werden; als Umwendaxe kann jede auf $A_1 A_2$ mittelsenkrechte Gerade dienen; bestimmt ist dieselbe erst, wenn von einem ausserhalb dieser Geraden gelegenen Punkte Anfangs- und Endlage B_1, B_2 gegeben sind.



Um diese wichtigen Verhältnisse in die Anschauung aufzunehmen, verfertige man sich ein Modell, bestehend aus einem Parallelogramm $A_1 B_1 A_2 B_2$, das man aus starkem Papier ausschneidet und längs der Diagonale $A_1 A_2$ umbiegt. Zu jeder Lage, die man den beiden Dreiecken ertheilen kann, sucht man sich in Gedanken leicht die zugehörige Umwendaxe, welche $A_1 A_2 B_1$ in $A_2 A_1 B_2$ überführt.

2) Die *identische* Bewegung wird nicht als involutorisch angesehen, da sie schon selbst, nicht aber erst ihre Wiederholung das System in die Ausgangslage zurückbringt.

Digitized by Google

Denn sind A_1, B_1 die Anfangslagen zweier Punkte jener Geraden, A_2, B_2 ihre Endlagen, so bewirkt die Bedingung der Starre, verbunden mit der Voraussetzung über die Umkehrung des Sinnes die Streckengleichung:

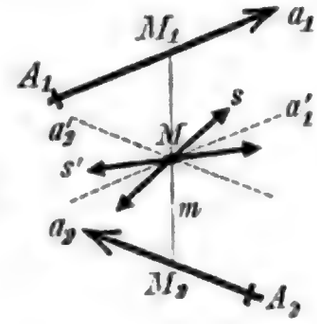
$$\overline{A_1 B_1} = \overline{B_2 A_2} .$$

Fällt dabei der Punkt B_1 mit A_2 zusammen, so folgt aus dieser Gleichung, dass B_2 nach A_1 fällt; es vertauschen also bei der Bewegung die Punkte A_1 und A_2 ihre Lage, woraus (nach 14.) der Satz folgt.

16. **Satz.** *Eine Gerade kann durch eine Umwendung mit jeder anderen Geraden des Raumes so zur Deckung gebracht werden, dass ein bestimmter Sinn der ersten in einen bestimmten Sinn der zweiten übergeht.*

Es seien zwei beliebige Geraden a_1 und a_2 gegeben, und es sei festgesetzt, in welchen Sinn von a_2 ein bestimmter Sinn von a_1 übergehen soll. Sind dann M_1, M_2 die Fusspunkte derjenigen Geraden, welche a_1 und a_2 senkrecht trifft (oder wenn es unendlich viele solcher Geraden giebt, die Fusspunkte irgend einer von ihnen), und ist ferner A_1 irgend ein Punkt von a_1, so bestimme man den Punkt A_2 so, dass dem Sinne $A_1 M_1$ auf a_1 nach unserer Festsetzung der Sinn $A_2 M_2$ auf a_2 entspricht, und dass:

$$A_1 M_1 = A_2 M_2 ,$$



so ist auch

$$\triangle A_1 M_1 M_2 \cong A_2 M_2 M_1$$

(als rechtwinklige Dreiecke mit entsprechend gleichen Katheten), woraus folgt:

$$A_1 M_2 = A_2 M_1 .$$

Daher giebt es (13.) eine Gerade s, so dass:

$$A_1 M_1 \{ s \} A_2 M_2 ,$$

w. z. b. w. —

Zieht man durch den Mittelpunkt M des Stückes $M_1 M_2$ die beiden Geraden a_1', a_2' parallel zu a_1, bezw. a_2, so wird

$$a_1 a_1' \{ s \} a_2 a_2' ,$$

da durch die Umwendung M in sich selbst, und parallele Geraden wieder in parallele übergehen. Daher ist s eine Halbirungsgerade des Winkels $(a_1' a_2')$. Kehrt man den Sinn auf a_2 um, so

Digitized by Google

erhält man als Lösung die andere halbirende Gerade s' dieses Winkels.

Zusatz. *Es ist auf zwei Arten möglich, eine Gerade durch Umwendung in eine andere überzuführen; die beiden Umwendaxen schneiden sich senkrecht im Mittelpunkte des kürzesten Abstandes der beiden Geraden, welchen sie ebenfalls senkrecht treffen, und bilden mit jenen dieselben Winkel*[1]).

17. **Hauptsatz.** *Ein starres System lässt sich aus einer Lage stets durch zwei Umwendungen in jede andere Lage bringen.*

Ist a_1 die Anfangslage, a_2 die Endlage irgend einer Geraden des starren Systems, so suche man (nach 16.) die (bezw. eine) Gerade, um welche jene Gerade in *umgekehrtem Sinne* nach a_2 umgewandt wird. Dadurch gelangt das System in eine Zwischenlage, in der es mit der Endlage eine Gerade, in umgekehrtem Sinne, gemein hat, es lässt sich also (15.) durch *eine* weitere Umwendung aus jener in diese bringen. W. z. b. w.

Dies ist die allgemein giltige Form des Satzes. Wir haben zu seiner Ableitung weder den Inhalt des II. noch den des III. Abschnittes benützt. Unter Berücksichtigung der Ergebnisse des II. Abschnittes erhält der Satz folgende Form:

Zusatz. *Ein starres System lässt sich aus einer Lage in eine andere entweder durch eine Schiebung oder durch eine Drehung oder durch eine Schraubung bringen.*

---

18. Der Gang des vorigen Beweises führt zugleich auf die Lösung der Aufgabe, die Axen der beiden Umwendungen zu finden, welche ein Dreieck aus der gegebenen Anfangslage $A_1B_1C_1$ in die gegebene Endlage $A_2B_2C_2$ bringen. Man suche erst die Gerade s, um welche die Gerade B_1C_1 so umgewandt wird, dass sie in umgekehrtem Sinne mit der Geraden B_2C_2 zur Deckung kommt; gelangen dabei die Punkte B_1, C_1 nach B_{12}, C_{12} auf der Geraden B_2C_2, so wird

$$\overline{C_{12}B_{12}} = \overline{B_2C_2}\ .$$

---

1) Hierzu stellt man sich ein ebenso einfaches wie lehrreiches Modell her, indem man ein auf beiden Seiten zugespitztes Streichholz (m) in die Mitte zweier anderen Streichhölzer (a_1, a_2) senkrecht einsteckt. Die Geraden s und s' werden durch zwei Stecknadeln dargestellt, welche man in m einsteckt. Durch Umwendung um sie wird man die Lagen der Streichhölzer a_1 und a_2 vertauschen können, und zwar so, dass die Köpfchen ihre Lage entweder gegenseitig, oder mit den Fussenden vertauschen.

Digitized by Google

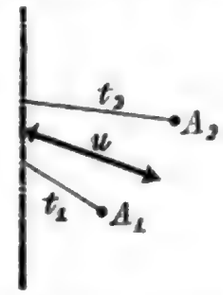
Gelangt dabei ferner der Punkt A_1 in die Lage A_{12}, so ist die Axe der zweiten Umwendung dadurch bestimmt, dass durch sie die Punkte A_{12}, B_{12}, (C_{12}) nach A_2, B_2, (C_2) gelangen sollen.

Um die *Schraubenaxe* zu finden lässt sich dieses Verfahren durch ein anderes ersetzen, welches die drei Punkte des Dreiecks gleichartig benützt. Denn man weiss (10.), dass die Gerade s — und auch jede andere ebenso gefundene Gerade — die Schraubenaxe senkrecht trifft. Daraus folgt der

Satz. *Wird durch eine Bewegung das Dreieck $A_1 B_1 C_1$ in das Dreieck $A_2 B_2 C_2$ übergeführt, so werden diejenigen drei Geraden, um welche die drei Seiten des ersten Dreiecks umgewandt werden müssen, um mit den entsprechenden Seiten des zweiten in umgekehrtem Sinne zur Deckung zu gelangen, von ein und derselben weiteren Geraden senkrecht getroffen, nämlich von der Axe der Schraubung, welche das erste Dreieck in das zweite überführt.*

Bei der wirklichen Ausführung der Construction sind natürlich nur zwei der Umdrehaxen nothwendig.

Die *Höhe* und der *Winkel* der Schraubung werden dann in der bekannten Weise gefunden. Sind nämlich t_1 und t_2 die beiden Geraden, welche die Punkte A_1 und A_2 senkrecht auf die Schraubenaxe projiciren, so kann man (10., Umkehrung) die Schraubung durch $\{t_1, u\}$ ersetzen, wo u, die Schraubenaxe senkrecht schneidend, so bestimmt ist, dass der Punkt A_1, welcher bei $\{t_1\}$ seine Lage beibehält, bei $\{u\}$ nach A_2 gelangt; und ebenso durch $\{u', t_2\}$, wo u' genau denselben Bedingungen unterliegt, also mit u zusammenfällt. Die Schraubung ist also durch



$$\{t_1, u\} = \{u, t_2\}$$

ersetzbar, die *Höhe* der Schraubung ist also (10., Satz) gleich dem doppelten Abstand von t_1, u oder von u, t_2, d. h. gleich dem Abstand von t_1, t_2 d. i. gleich der *senkrechten Projection von $A_1 A_2$ auf die Schraubenaxe;* ebenso der *Winkel* der Schraubung gleich

$$\measuredangle\, 2(t_1 u) = 2(u t_2) = (t_1 t_2)\,,$$

d. h. *gleich dem Winkel der beiden Geraden, welche die Strecke $A_1 A_2$ senkrecht auf die Schraubenaxe projiciren.*

19. Noch in einer anderen einfachen Weise ergeben sich für eine nicht specielle Bewegung $\{\mathfrak{B}\}$ die Elemente der

Digitized by Google

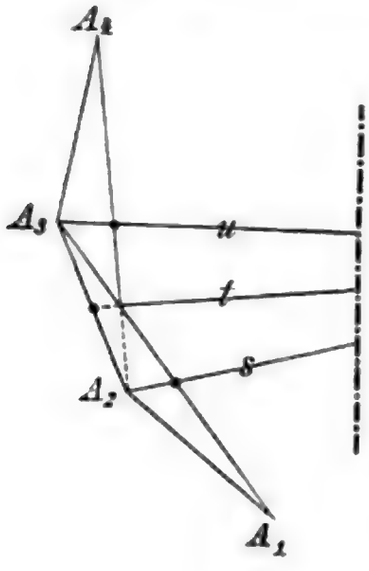
Schraubung, welche sie ersetzt, indem wir nur die in 13. aufgestellte Bedingung benützen.

Gelangt durch eine gegebene Bewegung ein Punkt aus der Lage A_1 nach A_2, ein zweiter Punkt aus A_2 nach A_3, ein dritter aus A_3 nach A_4, so ist

$$A_1 A_2 A_3 \{\mathfrak{B}\} A_2 A_3 A_4 ,$$

d. h. es geht — wenn nicht A_1, A_2, A_3 in einer Geraden liegen — das Dreieck $A_1 A_2 A_3$ in das Dreieck $A_2 A_3 A_4$ über; es ist dann in Folge der Starre des Systems:

$$A_1 A_2 = A_2 A_3 = A_3 A_4 ,$$
$$A_1 A_3 = A_2 A_4 .$$



Wir bestimmen nun die drei Geraden s, t, u so, dass

I: $A_1 A_2 \{s\} A_3 A_2$,

II: $A_1 A_2 \{t\} A_4 A_3$,

III: $A_2 A_3 \{u\} A_4 A_3$,

was immer möglich ist, da die Geraden s und u für (I und III) Symmetrielinien gleichschenkliger Dreiecke sind, und (für II) die (nach 13.) nothwendigen Bedingungen gelten:

$$A_1 A_2 = A_4 A_3 , \quad A_1 A_3 = A_4 A_2 ;$$

dann wird:

$$A_1 A_2 A_3 \{s\} A_3 A_2 A_1 \{t\} A_2 A_3 A_4 \{u\} A_4 A_3 A_2 ,$$

also $$A_1 A_2 A_3 \{s, t\} A_2 A_3 A_4 ,$$

und $$A_1 A_2 A_3 \{t, u\} A_2 A_3 A_4 ,$$

daher (7.) $$\{s, t\} = \{t, u\} = \{\mathfrak{B}\} .$$

Dadurch ist ein neuer Beweis des Satzes gegeben, dass jede solche Bewegung durch zwei Umwendungen zu ersetzen ist[1]). Die Schraubenaxe ist die Gerade, welche s und u senkrecht trifft

1) Da dieser Beweis noch eine besondere Betrachtung des Falles fordert, dass die Punkte A_1, A_2, A_3 in einer Geraden liegen (in der Schraubenaxe, oder wenn die Bewegung durch eine Schiebung zu ersetzen ist, in einer in der Schiebungsrichtung verlaufenden Geraden), so ist der in 17. gegebene diesem i. a. vorzuziehen.

Digitized by Google

(und zugleich auch t); die Höhe der Schraubung ist der doppelte kürzeste Abstand von s, t, und auch von t, u, d. h. der kürzeste Abstand von s, u.

Der Winkel der Schraubung ist

$$\measuredangle\, 2\,(s, t) = 2\,(t, u) = (s\,u)\,.$$

Dies liefert den

Satz. *Geht durch eine Bewegung, die keine Schiebung ist, ein starres System aus einer Lage in eine neue über, und man bestimmt im Raume eine solche Kette von Punkten A_1, A_2, A_3, A_4, dass durch die Bewegung das Dreieck $A_1 A_2 A_3$ in die neue Lage $A_2 A_3 A_4$ übergeht, so lässt sich die Bewegung durch eine Schraubung ersetzen, deren Axe in die Linie des kürzesten Abstandes der Symmetrielinien jener beiden (gleichschenkligen) Dreiecke fällt, während Höhe und Winkel der Schraubung dem kürzesten Abstand und dem Winkel dieser Symmetrielinien gleich ist.*

Zusatz. *Fallen die vier Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 in eine Ebene, so ist die Bewegung durch eine Drehung zu ersetzen.*

---

20. Als Anhang zu diesem Abschnitt sei noch Einiges über die Sonderstellung gesagt, welche die *Schiebungen* den übrigen Bewegungen gegenüber einnehmen. Wir sahen, dass jede Bewegung durch zwei Umwendungen ersetzt werden kann, von denen die eine nach gewissen Willkürlichkeiten angenommen werden darf, während die andere dadurch eindeutig bestimmt ist.

Ist die Bewegung eine *Schraubung* oder eine *Drehung*, so muss die wählbare Gerade die Schrauben- bezw. Drehaxe senkrecht treffen (nach der Umkehrung von 9. und 10.). Es giebt also eine *zweifache Mannigfaltigkeit* von Geraden, die zur Darstellung dienen können, und zwar durch jeden Punkt und ebenso in jeder Ebene im Allgemeinen eine einzige solche Gerade, d. h. sie kann eine beliebige Gerade eines *Strahlsystems* ersten Grades sein.

Bei der *Schiebung* dagegen ist (nach 8., Umkehrung) die Bedingung die, dass die Gerade senkrecht zur Schiebungsrichtung ist; es giebt also durch jeden Punkt einen Strahlenbüschel und in jeder Ebene einen Parallelstrahlenbüschel solcher Geraden, d. h. sie erfüllen einen *Complex* ersten Grades.

Da wir nun jede Bewegung durch Geradenpaare ausdrückten, so kommen wir zum Schluss:

Unter allen Geradenpaaren des Raumes nehmen in unserer Theorie die Paare paralleler Geraden eine bevorzugte Stellung ein.

Digitized by Google

Dies macht sich auch weiterhin geltend. In den vorigen Entwickelungen kommt fortwährend die Aufgabe vor, diejenige Gerade zu suchen, welche zwei gegebene Geraden senkrecht trifft [1]).

Eine Lösung dieser Aufgabe ist stets vorhanden; sind aber die beiden Geraden parallel, so giebt es sogar einfach unendlich viele solche Geraden, die einem Parallelstrahlenbüschel angehören.

Dies wiederum macht sich vor Allem bemerkbar bei der Aufgabe, eine Gerade a_1 durch Umwendung in eine andere a_2 überzuführen. Sind die Geraden parallel, so kann man den Sinn der einen Geraden auf die andere übertragen, und es giebt eine einzige Gerade, um welche a_1 in demselben Sinne nach a_2 umgewandt wird, dagegen einfach unendlich viele bei Umkehrung des Sinnes.

21. Noch eine weitere Ausartung dieser Verhältnisse ergiebt sich, wenn das System mit sich selbst wieder zur *Deckung* gelangt. Die beiden Geraden fallen dann in eine einzige zusammen, und *jede Gerade s* des Raumes kann als solche gewählt werden, da durch $\{s, s\}$ stets die Deckung von Anfangs- und Endlage ausgedrückt wird (4.). Daraus folgt:

Eine noch mehr bevorzugte Stellung unter den Geradenpaaren nehmen diejenigen ein, deren Geraden zusammenfallen.

Die Gesammtheit aller Geraden, welche zwei zusammenfallende senkrecht treffen, ist eine *zweifache Mannigfaltigkeit* (ein lineares Strahlsystem).

Die Aufgabe, die eine von zwei zusammenfallenden Geraden durch eine Umwendung in die andere überzuführen, liefert unter Beibehaltung des Sinnes eine einzige Gerade — sie selbst — und bei Umkehrung des Sinnes eine zweifache Mannigfaltigkeit, nämlich alle, von denen diese senkrecht getroffen wird.

Diese Ausartungen der Gebilde, wenn die Geraden eines Paares parallel werden oder zusammenfallen, sind im vorigen nicht jedes Mal genau aufgeführt, und wir wollen es zur Vermeidung von Weitläufigkeiten auch im folgenden i. a. unterlassen.

---

1) Der sonst dafür gebräuchliche Ausdruck »Die Linie des kürzesten Abstandes zweier Geraden« ist nicht verwendbar, wenn die beiden Geraden sich schneiden.

Digitized by Google

V. Die Ueberführung einer Geraden in eine andere.

22. Wir gehen in diesem Abschnitt zu einer Aufgabe über, die uns willkommene Beispiele für die allgemeineren Betrachtungen liefern soll, welche in den folgenden Abschnitten angestellt werden. Wir wollen die Gesammtheit aller der Schraubungen aufsuchen, die eine gegebene Gerade in eine zweite gegebene überführen[1]).

Einleitend dazu betrachten wir die Möglichkeit, *dass durch eine Bewegung eine Gerade in sich selbst übergeführt werde*, u. zw. zuerst durch eine *Umwendung*. Wird dabei der Sinn der Geraden in seinen entgegengesetzten verwandelt, so schneidet die Gerade die Umwendaxe senkrecht (15.). Soll dagegen der Sinn erhalten bleiben, so muss jeder Punkt der Geraden in sich übergehen, dieselbe also die Umwendaxe sein; denn ginge ein Punkt A_1 der Geraden in einen anderen A_2 über, welcher nach der Voraussetzung ebenfalls auf der Geraden liegt, so vertauschten die beiden Punkte ihre Lage, die Gerade also ihren Sinn.

Satz. *Bei einer Umwendung geht die Umwendaxe in gleichem Sinn, jede sie senkrecht treffende Gerade in entgegengesetztem Sinn in sich über.*

Umgekehrt ist eine Gerade, welche bei einer Umwendung in gleichem bezw. entgegengesetztem Sinn in sich übergeht, die Umwendaxe, bezw. eine diese senkrecht schneidende Gerade.

23. Betrachten wir eine beliebige Bewegung, so ist dieselbe, wenn sie eine Gerade in entgegengesetztem Sinn in sich überführt (nach 15.), durch eine Umwendung ersetzbar, wir haben also nur noch den Fall zu betrachten, dass eine Gerade — sie heisse p — unter Beibehaltung ihres Sinnes in sich übergeht. Dann stelle man, was immer möglich ist, die Bewegung als Folge zweier Umwendungen $\{s, t\}$ dar, so dass die erste Umwendaxe s die Gerade p senkrecht trifft. (Es giebt ja für jede ganz beliebige Gerade eine solche Gerade, nämlich diejenige,

---

1) Der Zusammenhang der hier abgeleiteten Sätze mit der Theorie der Projectivitäten soll im letzten Abschnitt erörtert werden.

Digitized by Google

welche sie und die Schraubenaxe senkrecht trifft, im besonderen Falle sogar unendlich viele.)

Dann geht durch $\{s\}$ die Gerade p mit Umkehrung ihres Sinnes in sich über; durch $\{s, t\}$, d. h. indem man jetzt noch die Umwendung um t hinzufügt, soll aber die Gerade in gleichem Sinne in sich übergehen, d. h. auch t führt p in entgegengesetztem Sinn in sich über. Es ist daher (22.) p eine Gerade, welche sowohl von s, als von t senkrecht geschnitten wird, d. h. wenn s nicht parallel zu t ist, die Schraubenaxe (10.), im anderen Falle (8.) eine Gerade, welche in der Richtung der Schiebung verläuft.

In jedem Falle ist der Abstand der beiden Geraden die halbe Strecke, um welche p in sich verschoben wird; ist derselbe Null, d. h. die Bewegung eine Drehung bezw. Umwendung (9.), so bleibt jeder Punkt der Geraden, welche Dreh- bezw. Umwendaxe ist, an seiner Stelle.

Satz. *Jede Schiebung führt alle diejenigen Geraden, welche die Schiebungsrichtung haben, jede andere Bewegung die Schrauben- (Dreh-, Umwend-) Axe in gleichem Sinn in sich über.*

Umgekehrt: Geht durch eine Bewegung eine Gerade in gleichem Sinn in sich über, so fällt sie bei der Schiebung in die Schiebungsrichtung, bei jeder andern Bewegung in die Schrauben- (Dreh-, Umwend-) Axe.

---

24. Wir stellen die Bedingung dafür auf, dass durch eine Bewegung $\{\mathfrak{B}\}$ eine Gerade a in einem vorgeschriebenen Sinn in eine Gerade a' übergeführt werde.

Ist dies der Fall, und ist s die Gerade, welche a und die Schraubenaxe von $\{\mathfrak{B}\}$ senkrecht trifft, so setze man:

$$\{\mathfrak{B}\} = \{s, t\} = \{t, s'\},$$

wo nun t, und dann auch s' (10. Umkehrung) eindeutig bestimmte Geraden sind.

Hierbei bringt $\{s\}$ nach der Voraussetzung (22. Satz) die Gerade a mit sich selbst in umgekehrtem Sinn zur Deckung, daher muss $\{t\}$ (wegen $\{\mathfrak{B}\} = \{s, t\}$) die Gerade a so nach a' bringen, dass der Sinn wieder der vorgeschriebene wird.

Demnach bringt $\{t\}$ die Gerade a in dem Sinne, der dem vorgeschriebenen entgegengesetzt ist, nach a', daher muss $\{s'\}$

Digitized by Google

(wegen $\{\mathfrak{B}\} = \{t, s'\}$) die Gerade a' mit sich selbst in umgekehrtem Sinn zur Deckung bringen, d. h. es schneiden sich a' und s' senkrecht (22. Umkehrung).

Hätte man s' zuerst als diejenige Gerade angenommen, welche a' und die Schraubenaxe von $\{\mathfrak{B}\}$ senkrecht trifft, so wäre man vermöge derselben Schlüsse auf t und s gekommen.

Satz. *Jede Bewegung* $\{\mathfrak{B}\}$, *welche eine Gerade a in einem vorgeschriebenen Sinne in eine Gerade a' überführt, während dies von der Umwendung um eine Gerade t im umgekehrten Sinn geleistet wird, ist darstellbar durch*

$$\{\mathfrak{B}\} = \{s, t\} = \{t, s'\},$$

wo die Gerade s, bezw. s', die Gerade a, bezw. a', senkrecht trifft.

Umkehrung. *Nimmt man eine der Geraden s, s' so an, dass sie a, bezw. a', senkrecht trifft, so führt die wie vorhin zusammengesetzte Bewegung* $\{\mathfrak{B}\}$ *a im vorgeschriebenen Sinne in a' über.*

Denn treffen sich s und a senkrecht, so wird a durch $\{s\}$ im umgekehrten Sinne in sich übergeführt, also durch $\{t\}$ im vorgeschriebenen Sinne nach a' gebracht; und entsprechendes gilt für s'.

25. Es seien nun zwei beliebige Bewegungen, die wir mit $\{\mathfrak{B}_1\}$ und $\{\mathfrak{B}_2\}$ bezeichnen wollen, gegeben. Die Zusammensetzung derselben geschieht (nach 11.)[1]), indem man jede so in zwei Umwendungen zerlegt, dass die zweite Umwendung von $\{\mathfrak{B}_1\}$ mit der ersten von $\{\mathfrak{B}_2\}$ übereinstimmt.

Eine weitere uns hier angehende Beziehung zwischen den beiden Bewegungen erhalten wir, indem wir die den Bewegungen gemeinschaftliche Umwendung in *beiden* als erste oder als zweite

---

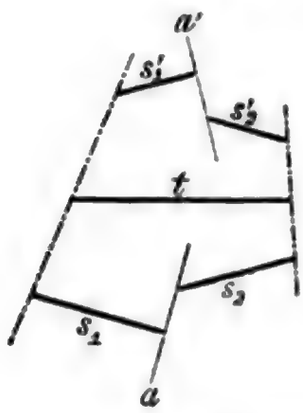
1) Erst nachträglich erhalte ich durch die Güte des Herrn Schell Kenntniss von einem Aufsatz von Burnside [»On the resultant of two finite displacements of a rigid body«. Messenger of Math. XIX. S. 104—108 (1889)], in welchem die in Art. 11 angegebene Lösung schon enthalten ist. Doch glaube ich, dass meine Darstellung der Construction dadurch an Interesse nicht verliert, da sie sich aus einem neuen, allgemeinen Princip (der Zerlegung jeder Bewegung in zwei Umwendungen) als unmittelbare Folge ergiebt. Die beiden Auffassungen der Construction sind wesentlich verschieden, da die Geraden des Raumes dort als *Objecte* der Bewegung, hier als *Träger* derselben (der Umwendungen) erscheinen. Dieser Unterschied tritt am schärfsten im Beweise hervor, der in Art. 11 in einer einzigen Gleichung enthalten ist.

Digitized by Google

benützen. D. h. wir setzen, wenn t die Gerade ist, welche die Schraubenaxe von $\{\mathfrak{B}_1\}$ und von $\{\mathfrak{B}_2\}$ senkrecht trifft,

$$\{\mathfrak{B}_1\} = \{s_1, t\} = \{t, s_1'\}$$
$$\{\mathfrak{B}_2\} = \{s_2, t\} = \{t, s_2'\},$$

wo nun s_1, s_1', s_2, s_2' eindeutig bestimmte Geraden sind (10.).



Soll jetzt eine Gerade a durch beide Bewegungen in dem gleichen vorgeschriebenen Sinn nach a' gelangen, so muss die Gerade, welche a im anderen Sinn nach a' bringt, die Schraubenaxen beider Bewegungen senkrecht treffen (nach 24. und 10.), diese Gerade ist also t.

Daher muss a (24.) sowohl s_1, wie s_2 senkrecht treffen, und ebenso a' sowohl s_1', wie s_2'.

Satz. *Sind zwei beliebige Bewegungen gegeben, so giebt es stets eine Gerade a, welche durch die beiden Bewegungen mit ein und derselben Geraden a' in gleichem Sinn zur Deckung gelangt.*

Zusatz I. *Zerlegt man zwei beliebig gegebene Bewegungen $\{\mathfrak{B}_1\}$ und $\{\mathfrak{B}_2\}$ in der Weise, dass*

$$\{\mathfrak{B}_1\} = \{s_1, t\} = \{t, s_1'\},$$
$$\{\mathfrak{B}_2\} = \{s_2, t\} = \{t, s_2'\}$$

wird, was immer möglich ist, so wird durch beide Bewegungen diejenige Gerade a, welche s_1 und s_2 senkrecht trifft, in demselben Sinn in diejenige a' übergeführt, welche s_1' und s_2' senkrecht trifft.

Dagegen gelangt durch Umwendung um t die Gerade a in dem Sinne mit a' zur Deckung, der dem vorigen entgegengesetzt ist.

Bezeichnen wir die Umkehrung einer Bewegung $\{\mathfrak{B}\}$ durch $\{\mathfrak{B}^{-1}\}$, also

$$\{\mathfrak{B}_1^{-1}\} = \{t, s_1\} = \{s_1', t\}$$
$$\{\mathfrak{B}_2^{-1}\} = \{t, s_2\} = \{s_2', t\},$$

so wird:

$$\{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2^{-1}\} = \{s_1, t, t, s_2\} = \{s_1, s_2\}$$
$$\{\mathfrak{B}_1^{-1}, \mathfrak{B}_2\} = \{s_1', t, t, s_2'\} = \{s_1', s_2'\}.$$

Die Schraubenaxen dieser beiden Bewegungen sind demnach (10.) die beiden Geraden, welche s_1 und s_2 bezw. s_1' und s_2' senkrecht treffen, d. h. die Geraden a und a'.

Digitized by Google

Zusatz II. *Sind zwei beliebige Bewegungen* $\{\mathfrak{B}_1\}$ *und* $\{\mathfrak{B}_2\}$ *gegeben, so wird durch beide die Schraubenaxe der Bewegung* $\{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2^{-1}\}$ *in die Schraubenaxe von* $\{\mathfrak{B}_1^{-1}, \mathfrak{B}_2\}$ *übergeführt*[1].

26. Sind zwei Geraden a und a' beliebig gegeben, so ist es jetzt leicht, *alle diejenigen Schraubungen zu finden, welche die Gerade a in einem vorgeschriebenen Sinne nach a' bringen.*

Vor Allem giebt es (16.) eine Umwendung, welche dieses leistet, sowie eine andere Umwendung, welche es im umgekehrten Sinn leistet; die beiden Umwendaxen seien t' und t.

Ist dann s irgend eine Gerade, welche a senkrecht trifft, so stellt

$$\{\mathfrak{B}\} = \{s, t\} = \{t, s'\}$$

eine Bewegung der verlangten Art dar (24. Umkehrung), und umgekehrt lässt sich jede solche Bewegung so darstellen (24.). Dabei treffen sich auch die Geraden a' und s' senkrecht.

Satz. *Man erhält alle Schraubungen, welche eine gegebene Gerade a in eine andere a' in vorgeschriebenem Sinn überführen, aus derjenigen Geraden t, welche dies im umgekehrten Sinn leistet, indem man die Umwendung um jede Gerade, welche a senkrecht*

---

1) In dieser Fassung lässt sich der Satz leicht auf den zurückführen, dass jede Bewegung eine Gerade in sich verschiebt (23). Wird nämlich ein starres System aus der Anfangslage Σ durch jene Bewegungen in die Endlage Σ_1 bezw. Σ_2 gebracht, so ist es möglich, dasselbe durch eine neue Bewegung $\{\mathfrak{C}\}$ aus der Lage Σ_1 in die Lage Σ_2 zu bringen. Bei dieser Bewegung wird eine Gerade (die Schraubenaxe) — sie heisse a' — nur in sich verschoben, d. h. eine Gerade der Lage Σ_1 deckt sich mit der entsprechenden Geraden in Σ_2; oder es gelangt eine Gerade — sie heisse a — sowohl durch die erste, wie durch die zweite Bewegung aus Σ mit derselben Geraden a' im gleichen Sinn zur Deckung.

Die Bewegung $\{\mathfrak{C}\}$, welche Σ_1 in Σ_2 überführt und deren Schraubenaxe die gesuchte Gerade a' ist, ergiebt sich so:

$$\Sigma\,\{\mathfrak{B}_1\}\,\Sigma_1\,, \qquad \Sigma\,\{\mathfrak{B}_2\}\,\Sigma_2\,,$$

also
$$\Sigma_1\,\{\mathfrak{B}_1^{-1}\}\,\Sigma\,\{\mathfrak{B}_2\}\,\Sigma_2\,,$$

d. h.
$$\{\mathfrak{B}_1^{-1}, \mathfrak{B}_2\} = \{\mathfrak{C}\}\,, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Durch Umkehrung der Betrachtungen findet man in gleicher Weise die Gerade a als Schraubenaxe einer Bewegung $\{\mathfrak{C}'\}$, welche ein System Σ_1' in die Lage Σ_2' überführt, wobei Σ_1' und Σ_2' so gewählt werden, dass sie durch die beiden Bewegungen $\{\mathfrak{B}_1\}$ und $\{\mathfrak{B}_2\}$ in dieselbe Endlage Σ' kommen, woraus wieder folgt

$$\{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2^{-1}\} = \{\mathfrak{C}'\}\,.$$

Digitized by Google

trifft, mit der Umwendung um t zusammensetzt, oder auch, indem man die Umwendung um t mit der Umwendung um eine jede Gerade, welche a' senkrecht trifft, zusammensetzt.

Unter diesen Schraubungen ist auch eine Umwendung enthalten, nämlich die um t', als Folge der Umwendungen um t und der um die Gerade m, welche die zu einander senkrechten Geraden t und t' in demselben Punkte, und ausserdem a und a' senkrecht trifft (nach 16.).

27. Die *Schraubenaxen* aller dieser Bewegungen müssen die Gerade t senkrecht treffen, da die Umwendung um t bei ihnen allen als erzeugende auftritt.

Ist umgekehrt eine Gerade, welche t senkrecht trifft, gegeben, so kann sie die Schraubenaxe einer einzigen unter jenen Schraubungen sein. Denn jede Schraubung, welche diese Gerade zur Axe hat, ist durch $\{s, t\}$ darstellbar, wo s eine beliebige Gerade sein kann, welche die Axe senkrecht trifft. Soll sie ausserdem zu den oben genanten Schraubungen gehören, so muss s auch a senkrecht treffen, und es giebt stets eine (und i. a. nur eine) solche Gerade.

Satz. *Die Schraubenaxen der erwähnten Bewegungen treffen alle die Gerade t senkrecht, und umgekehrt ist jede Gerade, welche t senkrecht trifft, Axe einer einzigen Schraubung der erwähnten Art.*

28. Nach dem Satze in 26. lassen sich alle jene Bewegungen darstellen durch

$$\{\mathfrak{B}_i\} = \{s_i, t\} = \{t, s_i'\},$$

wo s_i (bezw. s_i') jede Gerade sein kann, welche a (bezw. a') senkrecht trifft. Eine der beiden Geraden s_i, s_i' kann dieser Begingung genügend angenommen werden. Es giebt daher eine zweifach unendliche Schaar von Schraubungen der bezeichneten Art.

Ebenso giebt es eine zweifach unendliche Schaar von Schraubungen, welche a *im andern Sinn* nach a' bringen. Sie lassen sich darstellen durch

$$\{\mathfrak{B}_k'\} = \{s_k, t'\} = \{t', s_k'\},$$

wo s_k bezw. s_k') derselben Bedingung wie s_i (bezw. s_i') unterworfen ist.

Greifen wir aus jeder dieser beiden Schaaren eine Bewegung heraus — sie mögen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ heissen — so werde ein

Digitized by Google

starres System aus der Lage Σ durch $\mathfrak{B}$ in eine neue Lage Σ_1, durch $\mathfrak{B}'$ nach Σ_2 gebracht. Dabei geht die mit dem System Σ verbundene Gerade a durch $\mathfrak{B}$ in a' der Lage Σ_1 über, und durch $\mathfrak{B}'$ in a' der Lage Σ_2, aber in umgekehrtem Sinne wie vorhin. Daraus folgt (15.), dass das System aus der Lage Σ_1 durch eine Umwendung nach Σ_2 gebracht werden kann.

Satz. *Wendet man auf ein starres System einmal eine Bewegung der Schaar* $\mathfrak{B}_i$, *das andre Mal eine solche der Schaar* $\mathfrak{B}_k'$ *an, so wird es in zwei solche Lagen gebracht, dass es durch eine Umwendung aus der einen in die andere übergeführt werden kann.*

Die Methode, die wir im bisher Gesagten befolgt haben, war eine wesentlich anschauliche. Von dem sich selbst aufdrängenden Formalismus haben wir insofern Gebrauch gemacht, als es zur Abkürzung des Ausdrucks unumgänglich nöthig war, doch nur so, dass wir bei jedem Zeichen eine anschauliche Operation im Sinne hatten.

Und doch liegt, wie ich glaube, der Hauptvorzug der Methode darin, dass sie zu einer neuen *Analysis der geometrischen Gebilde* Anlass giebt. Es wird sich daher in einem noch folgenden Abschnitt darum handeln, das Wesen dieser Analysis an einigen Beispielen vorzuführen, wodurch wir dann in den Stand gesetzt werden (im letzten Abschnitt) ein gemeinsames Band zu finden, welches die Geometrie der Bewegungen mit den anderen Teilen nicht nur der metrischen, sondern auch der projectiven Geometrie verknüpft, und so scheinbar Auseinanderliegendes vereinigt.

Digitized by Google

SITZUNG VOM 12. MAI 1890.

C. Neumann, *Neue Sätze über das elektrostatische und über das magnetische Potential.*

Ist m irgend ein Element eines pönderablen Körpers, und e die augenblicklich in m enthaltene Elektricität, so wird sich jede auf e einwirkende elektrische Kraft unmittelbar auf m übertragen, in genau derselben Weise, als wären m und e in dem betrachteten Augenblick *starr mit einander verbunden.* Sind also irgend zwei elektrisch geladene Körper $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gegeben, und bezeichnet P das elektrostatische Potential der beiden Körper aufeinander[1]), so sind die ponderomotorischen Wirkungen des einen Körpers auf den andern in einfacher Weise durch die Differentialquotienten des Potentials P ausdrückbar; dabei werden diese Differentialquotienten so zu bilden sein, als wären die in $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ vorhandenen Elektricitäten augenblicklich mit den pönderablen Massen dieser Körper *fest verbunden.* Mit andern Worten: Jene Differentialquotienten werden so zu bilden sein, als wären die elektrischen Vertheilungen im Innern der Körper $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ *völlig unveränderlich.* Derartige Differentialquotienten mögen angedeutet werden durch die Charakteristik δ.

Um mich bequemer ausdrücken zu können, will ich die in $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ augenblicklich vorhandenen elektrischen Vertheilungen mit $J_\mathfrak{a}$ und $J_\mathfrak{b}$ bezeichnen. Denkt man sich nun den Körper $\mathfrak{b}$ fest aufgestellt, und fragt man z. B. nach der translatorischen Kraft, welche $\mathfrak{b}$ auf $\mathfrak{a}$ in einer gegebenen Richtung λ ausübt, so wird man den Körper $\mathfrak{a}$ sich selber parallel in der Richtung λ um eine

1) Weiterhin werde ich übrigens dieses Potential nicht schlechtweg mit P, sondern genauer mit $P^{\mathfrak{ab}}$ bezeichnen.

Digitized by Google

unendlich kleine Strecke $d\lambda$ zu verschieben haben. Bezeichnet alsdann δP denjenigen *virtuellen* Zuwachs, den P bei dieser Verschiebung annehmen *würde*, falls $J_{\mathfrak{a}}$ und $J_{\mathfrak{b}}$ während dieser Verschiebung *völlig ungeändert* blieben, so wird die in Rede stehende translatorische Kraft

$$(\text{I.}) \qquad = -\frac{\delta P}{d\lambda}$$

sein. — In Wirklichkeit *ändern* sich $J_{\mathfrak{a}}$ und $J_{\mathfrak{b}}$ während der Verschiebung. Und der in Wirklichkeit während der Verschiebung eintretende Potentialzuwachs dP wird also von jenem virtuellen Zuwachs δP *wesentlich verschieden* sein.

Unter gewissen Voraussetzungen ist diese Verschiedenheit besonders auffallend und leicht angebbar. Ist z. B. der fest aufgestellte Körper $\mathfrak{b}$ ein absoluter Isolator, mithin $J_{\mathfrak{b}}$ absolut unveränderlich, und $\mathfrak{a}$ ein zur Erde abgeleiteter Conductor, so wird δP merkwürdiger Weise genau *halb so gross* sein als dP. Und genau dasselbe wird auch dann stattfinden, wenn $\mathfrak{b}$ ein absoluter Isolator, hingegen $\mathfrak{a}$ ein *isolirter* und mit der Elektricitätsmenge *Null* geladener Conductor ist.

Wir kehren zurück zur allgemeinen Betrachtung, das ist zu zwei *beliebig* gegebenen elektrisch geladenen Körpern $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, von denen $\mathfrak{b}$ fest aufgestellt sein soll. Denkt man sich nun den Körper $\mathfrak{a}$ drehbar um irgend eine feste Axe, und fragt man nach dem von $\mathfrak{b}$ auf $\mathfrak{a}$ ausgeübten Drehungsmoment, so wird man $\mathfrak{a}$ um jene Axe um einen unendlich kleinen Winkel $d\varphi$ zu drehen haben. Bezeichnet alsdann δP denjenigen *virtuellen* Zuwachs, welchen P bei dieser Drehung annehmen *würde*, falls $J_{\mathfrak{a}}$ und $J_{\mathfrak{b}}$ während der Drehung *ungeändert* blieben, so wird jenes Drehungsmoment

$$(\text{II.}) \qquad = -\frac{\delta P}{d\varphi}$$

sein. — In Wirlichkeit *ändern* sich aber $J_{\mathfrak{a}}$ und $J_{\mathfrak{b}}$ während der Drehung. Und es wird daher der in Wirklichkeit während der Drehung eintretende Potentialzuwachs dP von δP *wesentlich verschieden* sein.

Auch wird dieses δP gleich der *Hälfte* von dP sein, sobald man wiederum die vorhin genannten Voraussetzungen eintreten lässt.

Wir kehren nochmals zurück zur allgemeinen Betrachtung, d. i. zu zwei *beliebig* gegebenen elektrisch geladenen Körpern $\mathfrak{a}$

Digitized by Google

und $\mathfrak{b}$, von denen der letztere fest aufgestellt ist. Denkt man sich nun die Position des Körpers $\mathfrak{a}$ in *beliebiger* Weise aber unendlich wenig abgeändert, so wird die von $\mathfrak{b}$ auf $\mathfrak{a}$ während dieser Positionsänderung ausgeübte ponderomotorische Arbeit

$$(\text{III.}) \qquad = -\delta P$$

sein, wo δP denjenigen *virtuellen* Zuwachs vorstellt, welchen das Potential P bei jener Positionsänderung annehmen *würde*, falls $J_{\mathfrak{a}}$ und $J_{\mathfrak{b}}$ während derselben *ungeändert* blieben.

Auch hier wird δP gleich der Hälfte des wirklichen Zuwachses dP sein, sobald man voraussetzt, dass $\mathfrak{b}$ ein absoluter Isolator ist, und dass andererseits $\mathfrak{a}$ einen Conductor vorstellt, der entweder zur Erde abgeleitet, oder aber isolirt und mit der Elektricitätsmenge Null geladen ist.

Uebrigens ist es leicht, diese beschränkenden Voraussetzungen abzustreifen. Ist nämlich $\mathfrak{b}$ ein Isolator, und $\mathfrak{a}$ ein Conductor, so wird stets, ohne dass es dabei irgend welcher Voraussetzung bedürfte, die Formel gelten:

$$(\text{IV.}) \qquad \delta P = \tfrac{1}{2} d(P + G^{\mathfrak{a}} M^{\mathfrak{a}}),$$

wo $M^{\mathfrak{a}}$ die augenblicklich im Conductor $\mathfrak{a}$ enthaltene Elektricitätsmenge, und $G^{\mathfrak{a}}$ seinen augenblicklichen *Potentialwerth* vorstellen. Diese Ausdrucksweise bedarf einer kurzen Erläuterung. Bezeichnet man mit Φ das elektrostatische Potential der beiden Körper $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ auf einen einzelnen Punkt, so besitzt bekanntlich Φ in einem gegebenen Augenblick für alle innerhalb $\mathfrak{a}$ liegenden Punkte ein und denselben Werth. Und dieser Werth ist unter $G^{\mathfrak{a}}$ zu verstehen.

Analoge Sätze gelten für ein System von beliebig vielen elektrisch geladenen Körpern $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... $\mathfrak{z}$. Diese Sätze bilden den Inhalt des *ersten Theils* des vorliegenden Aufsatzes.

Sodann werde ich im *zweiten Theil* darthun, dass einigermassen ähnliche Sätze auch für *magnetische* Körper gelten. Dabei sind statt der Conductoren *temporär-magnetische* Körper (wie z. B. weiches Eisen), und statt der Isolatoren *invariabel-magnetische* Körper (Stahlmagnete) in Betracht zu ziehen.

Man denke sich z. B. zwei Körper $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, von denen der erstere aus weichem Eisen besteht, während der letztere ein unveränderlicher Stahlmagnet sein soll. Das magnetische Potential

Digitized by Google

der beiden Körper aufeinander sei bezeichnet mit P. Befinden sich nun diese Körper $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in beliebiger Bewegung, so sind für irgend ein Zeitelement dt zweierlei Zuwüchse des Potentiales P zu unterscheiden, nämlich erstens derjenige Zuwachs dP, der in der Zeit dt in *Wirklichkeit* entsteht, und andererseits derjenige *virtuelle* Zuwachs δP, der in der Zeit dt entstehen *würde*, falls während derselben der magnetische Zustand des Eisens $\mathfrak{a}$ völlig ungeändert bliebe. *Zwischen diesen beiden Zuwüchsen findet merkwürdiger Weise, wie ich im Folgenden zeigen werde, die einfache Relation statt*:

$$\text{(V.)} \qquad \delta P = \tfrac{1}{2} dP \ ,$$

vorausgesetzt, dass man (wie es üblich ist) den Poisson'schen Magnetisirungscoefficienten k als eine Constante ansieht. Lässt man diese der Erfahrung wenig entsprechende Voraussetzung fallen, und betrachtet man, nach dem Vorgange von KIRCHHOFF[1]), den Coefficienten k an jeder Stelle der Eisenmasse $\mathfrak{a}$ als abhängig von der Intensität der auf diese Stelle einwirkenden magnetischen Kraft, so wird, wie aus meiner nachfolgenden Untersuchung hervorgeht, in der Formel (V.) noch ein Glied hinzutreten, welches von der Aenderung abhängt, die der magnetische Zustand des Eisens $\mathfrak{a}$ während der Zeit dt erleidet.

Man bemerkt, dass die Formel (V.) mit der elektrischen Formel (IV.) gleichlautend wird, sobald man in jener $M^{\mathfrak{a}} = 0$ setzt; — was mit Rücksicht auf die Grundvorstellungen der Theorie des Magnetismus einigermassen *a priori* zu erwarten stand.

Noch sei erwähnt, dass der Satz (V.) in Beziehung steht zu der KIRCHHOFF'schen Abhandlung über magnetische und dielektrische Polarisation[2]). Von fundamentaler Bedeutung für jene Abhandlung ist nämlich ein gewisser daselbst aufgestellter *analytischer Ausdruck* W von ziemlich complicirter Gestalt. Im

---

1) Vergl. KIRCHHOFF's Aufsatz von 1853: »über den inducirten Magnetismus eines Cylinders«. CRELLE's Journal, Bd. 48. Gesammelte Abhandlungen, S. 217—223.

2) Der Titel dieser von KIRCHHOFF im Jahre 1884 in den Sitzungsberichten der Berl. Ak. d. Wiss. publicirten Abhandlung lautet: »Ueber die Formänderung, die ein fester elastischer Körper erfährt, wenn er magnetisch oder dielektrisch polarisirt wird«.

Digitized by Google

Anschluss an den Satz (V.), werde ich nun zeigen, dass dieser Ausdruck W eine *überraschend einfache physikalische Bedeutung* hat, dass nämlich derselbe den Werth besitzt:

$$(VI.) \qquad W = \tfrac{1}{2} P + \text{Const.} \ ,$$

wo wiederum P das magnetische Potential der betrachteten beiden Körper $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ auf einander vorstellt.

Erster Theil.

Zur Theorie der Elektrostatik.

Es seien beliebig viele elektrisch geladene *starre* Körper gegeben: $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots \mathfrak{z}$, theils Conductoren, theils Isolatoren. Letztere mögen als *absolute* Isolatoren angesehen werden; so dass also die in ihnen enthaltenen elektrischen Vertheilungen (die theils superficiell, theils intern sein können) *absolut unveränderlich* sind. Andererseits mögen die Conductoren theils zur Erde abgeleitet, theils isolirt sein; und jeder isolirte Conductor mag eine gegebene Electricitätsmenge (die z. B. auch $= 0$ sein kann) in sich enthalten.

An jedem der Körper $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \cdots \mathfrak{z}$ mögen seidene Fäden befestigt sein, so dass man, durch Ziehen an diesen Fäden, die räumliche Lage jedes Körpers beliebig zu verändern, und in solcher Art das ganze System beliebig zu bewegen im Stande ist.

Wir bezeichnen das elektrostatische Potential des ganzen Systemes $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots \mathfrak{z}$ auf sich selber mit Π. Und wir wollen nun untersuchen, in welcher Weise dieses Potential Π von Augenblick zu Augenblick sich ändert, falls man die Körper $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots \mathfrak{z}$ mittelst jener Fäden in Bewegung setzt, und in solcher Art ihre relative Lage zu einander sich ändern lässt. Dabei mögen diese Bewegungen so *langsam* gedacht werden, dass der elektrische Zustand des Systems in jedem Augenblick ein *Gleichgewichtszustand* ist.

Sind Π und $\Pi + d\Pi$ die Werthe des Potentials in irgend zwei aufeinanderfolgenden Zeitaugenblicken t und $t + dt$, so ist $d\Pi$ zerlegbar in eine Anzahl partieller Zuwüchse:

$$(1.) \qquad d\Pi = \delta\Pi + \Delta^{\mathfrak{a}}\Pi + \Delta^{\mathfrak{b}}\Pi \cdots + \Delta^{\mathfrak{z}}\Pi \ .$$

Digitized by Google

Bezeichnet man nämlich im Augenblicke t die räumliche Lage der Körper $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\cdots \mathfrak{z}$ mit S, und die in den einzelnen Körpern vorhandenen elektrischen Vertheilungen mit $J_\mathfrak{a}, J_\mathfrak{b}, J_\mathfrak{c}, \ldots J_\mathfrak{z}$, und bezeichnet man ferner ebendieselben Dinge im Augenblicke $t+dt$ mit S' und $J'_\mathfrak{a}, J'_\mathfrak{b}, J'_\mathfrak{c}, \cdots J'_\mathfrak{z}$, so soll $\delta\Pi$ derjenige virtuelle Zuwachs sein, den Π während des Zeitelementes dt annehmen *würde*, falls während desselben S in S' überginge, hingegen $J_\mathfrak{a}, J_\mathfrak{b}, J_\mathfrak{c}, \ldots J_\mathfrak{z}$ völlig ungeändert blieben. Ferner soll $\Delta^\mathfrak{a}\Pi$ denjenigen virtuellen Zuwachs vorstellen, den Π im Zeitelement dt annehmen *würde*, falls während desselben $J_\mathfrak{a}$ in $J'_\mathfrak{a}$ überginge, hingegen S und $J_\mathfrak{b}, J_\mathfrak{c}, \ldots J_\mathfrak{z}$ ungeändert blieben. U. s. f.

Mit andern Worten: das Potential Π soll aufgefasst werden als eine Function der *Argumente*[1]):

$$S,\ J_\mathfrak{a},\ J_\mathfrak{b},\ J_\mathfrak{c},\ \cdots J_\mathfrak{z}\ .$$

Und dieser Auffassungsweise entspricht die Formel (1.), in welcher $\delta\Pi$, $\Delta^\mathfrak{a}\Pi$, $\Delta^\mathfrak{b}\Pi$, $\Delta^\mathfrak{c}\Pi$, $\ldots \Delta^\mathfrak{z}\Pi$ zu bezeichnen sind als die *partiellen* Differentiale von Π nach jenen Argumenten. — Zur Abkürzung kann man übrigens die Formel (1.) auch so schreiben:

$$(2.)\qquad \begin{cases} d\Pi = \delta\Pi + \Delta\Pi\ , \\ \text{wo } \Delta\Pi = \Delta^\mathfrak{a}\Pi + \Delta^\mathfrak{b}\Pi + \cdots + \Delta^\mathfrak{z}\Pi \text{ sein soll.} \end{cases}$$

Noch ist zu bemerken, dass von den Zuwüchsen $\Delta^\mathfrak{a}\Pi$, $\Delta^\mathfrak{b}\Pi$, $\ldots\ldots \Delta^\mathfrak{z}\Pi$ all' diejenigen $= 0$ sind, welche auf die *Isolatoren* Bezug haben. Denn in jedem Isolator soll ja die elektrische Vertheilung als absolut unveränderlich angesehen werden.

Uebrigens sind die Formeln (1.), (2.) nicht nur auf das Potential Π, sondern ganz allgemein auf jeden beliebigen Ausdruck F anwendbar, falls nur derselbe gegeben ist als eine bestimmte Function jener vorhin genannten Argumente S, $J_\mathfrak{a}, J_\mathfrak{b}, \ldots J_\mathfrak{z}$.

Denkt man sich die Function

$$F = F(S, J_\mathfrak{a}, J_\mathfrak{b}, \cdots J_\mathfrak{z})$$

in bestimmter Weise gegeben, überdies aber zwischen den

1) Gegen diese Ausdrucksweise dürfte nichts einzuwenden sein. Spricht man ja doch häufig in der Mathematik von Functionen, deren *Argumente* wiederum Functionen sind!

Digitized by Google

Argumenten S, $J_\mathfrak{a}$, $J_\mathfrak{b}$, .. $J_\mathfrak{z}$ irgend welche *Relation* festgesetzt, so wird man den analytischen Ausdruck der Function F mittelst dieser Relation zu *transformiren* (z. B. eines jener Argumente zu eliminiren) im Stande sein. In solchem Falle aber werden offenbar die partiellen Zuwüchse δF, $\Delta^\mathfrak{a} F$, $\Delta^\mathfrak{b} F$, ... $\Delta^\mathfrak{z} F$ *vor* der Transformation andere Werthe haben als *nach* derselben. Um der hieraus entspringenden Unsicherheit vorzubeugen, treffen wir folgende

Festsetzung. — *Ist eine Grösse F durch eine bestimmte Formel als Function der Argumente S, $J_\mathfrak{a}$, $J_\mathfrak{b}$, ... $J_\mathfrak{z}$ definirt, so sollen unter*

$$\delta F, \Delta^\mathfrak{a} F, \Delta^\mathfrak{b} F, \cdots \Delta^\mathfrak{z} F \tag{2a.}$$

diejenigen partiellen Zuwüchse verstanden werden, welche der Function F auf Grund jener ursprünglichen Definition zukommen, so lange als jene Argumente S, $J_\mathfrak{a}$, $J_\mathfrak{b}$, ... $J_\mathfrak{z}$ von einander unabhängig erhalten werden.

Das elektrostatische Potential Π des Systemes $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... $\mathfrak{z}$ auf sich selber ist offenbar darstellbar durch

$$\Pi = \tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{cccccc} 0 & + P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} & + P^{\mathfrak{a}\mathfrak{c}} & \cdots & + P^{\mathfrak{a}\mathfrak{z}} \\ + P^{\mathfrak{b}\mathfrak{a}} & + 0 & + P^{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} & \cdots & + P^{\mathfrak{b}\mathfrak{z}} \\ + P^{\mathfrak{c}\mathfrak{a}} & + P^{\mathfrak{c}\mathfrak{b}} & + 0 & \cdots & + P^{\mathfrak{c}\mathfrak{z}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + P^{\mathfrak{z}\mathfrak{a}} & + P^{\mathfrak{z}\mathfrak{b}} & + P^{\mathfrak{z}\mathfrak{c}} & \cdots & + 0 \end{array}\right\} + (P^\mathfrak{a} + P^\mathfrak{b} \cdots + P^\mathfrak{z}), \tag{3.}$$

oder, einfacher geschrieben, durch:

$$\Pi = \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} + \Sigma P^\mathfrak{a} \ . \tag{3a.}$$

Hier soll $P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = P^{\mathfrak{b}\mathfrak{a}}$ des elektrostatische Potential der beiden Körper $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ aufeinander, und $P^\mathfrak{a}$ das elektrostatische Potential des Körpers $\mathfrak{a}$ auf sich selber sein. Setzt man zur Abkürzung

$$\begin{aligned} P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} &= 0 + P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} + P^{\mathfrak{a}\mathfrak{c}} \cdots + P^{\mathfrak{a}\mathfrak{z}} \ , \\ P^{\mathfrak{b}\mathfrak{B}} &= P^{\mathfrak{b}\mathfrak{a}} + 0 + P^{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} \cdots + P^{\mathfrak{b}\mathfrak{z}} \ , \\ &\text{etc.} \quad \text{etc.} \ , \end{aligned} \tag{4.}$$

indem man unter $\mathfrak{A}$ den Conplex aller Körper mit Ausnahme von $\mathfrak{a}$, ebenso unter $\mathfrak{B}$ den Complex aller Körper mit Ausnahme

Digitized by Google

von $\mathfrak{b}$ versteht, u. s. w.; so ist die Formel (3.) auch so darstellbar:

$$(5.)\quad \Pi = \tfrac{1}{2}(P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} + P^{\mathfrak{b}\mathfrak{B}} \cdots + P^{\mathfrak{z}\mathfrak{Z}}) + (P^{\mathfrak{a}} + P^{\mathfrak{b}} \cdots + P^{\mathfrak{z}}) .$$

Ferner folgt aus (3.):

$$\Delta^{\mathfrak{a}}\Pi = \Delta^{\mathfrak{a}}(P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} + P^{\mathfrak{a}\mathfrak{c}} \cdots + P^{\mathfrak{a}\mathfrak{z}} + P^{\mathfrak{a}}) ,$$

also mit Rücksicht auf (4):

$$(6.)\qquad \Delta^{\mathfrak{a}}\Pi = \Delta^{\mathfrak{a}}(P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} + P^{\mathfrak{a}}) .$$

Zur besseren Orientirung über die Charakteristiken δ, Δ, $\Delta^{\mathfrak{a}}$, $\Delta^{\mathfrak{b}}$, etc. sei noch Folgendes bemerkt. Lässt man von allen Argumenten S, $J_{\mathfrak{a}}$, $J_{\mathfrak{b}}$, ... $J_{\mathfrak{z}}$ nur allein S sich ändern, so wird das Potential $P^{\mathfrak{a}}$ offenbar constant bleiben. Folglich ist

$$\delta P^{\mathfrak{a}} = 0 .$$

Ebenso übersieht man leicht, dass die Zuwüchse

$$\Delta^{\mathfrak{a}} P^{\mathfrak{a}},\ \Delta^{\mathfrak{b}} P^{\mathfrak{a}},\ \Delta^{\mathfrak{c}} P^{\mathfrak{a}},\ \cdots \Delta^{\mathfrak{z}} P^{\mathfrak{a}}$$

sämmtlich $= 0$ sind, mit alleiniger Ausnahme des ersten. Und man erhält also:

$$(7.)\qquad \begin{cases} d P^{\mathfrak{a}} = \delta P^{\mathfrak{a}} + \Delta P^{\mathfrak{a}} , \\ \text{wo } \delta P^{\mathfrak{a}} = 0 \text{ und } \Delta P^{\mathfrak{a}} = \Delta^{\mathfrak{a}} P^{\mathfrak{a}} . \end{cases}$$

In analoger Weise ergiebt sich für das Potential $P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ die Formel:

$$8.)\qquad \begin{cases} d P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \delta P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} + \Delta P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} , \\ \text{wo } \Delta P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \Delta^{\mathfrak{a}} P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} + \Delta^{\mathfrak{b}} P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} . \end{cases}$$

Sollte der Körper $\mathfrak{a}$ ein *Isolator* sein, so würde das Argument $J^{\mathfrak{a}}$ absolut unveränderlich sein; und es würde daher in diesem Falle in Betreff der Formeln (7.), (8.) noch hinzuzufügen sein, dass in ihnen $\Delta^{\mathfrak{a}} P^{\mathfrak{a}}$ und $\Delta^{\mathfrak{a}} P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ beide $= 0$ sind.

§ 1.

Die ponderomotorische Arbeit.

Jede auf die Elektricität eines Körpers ausgeübte Kraft überträgt sich unmittelbar auf die ponderable Masse des Körpers, in genau derselben Art, als wären Elektricität und ponderable

Digitized by Google

Masse in dem betrachteten Augenblicke fest mit einander verbunden. Dieser Grundsatz ist seit Coulomb und Poisson in der Theorie der Elektricität allgemein anerkannt, und soll auch hier festgehalten werden [1]).

Denkt man sich also das betrachtete System $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots \mathfrak{z}$ in beliebiger Bewegung begriffen, und für irgend ein Zeitelement dt dieser Bewegung die Formel (8.) gebildet:

$$dP^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \delta P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} + \Delta P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} ,$$

so wird diejenige ponderomotorische Arbeit, welche während des Zeitelementes dt von den zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ vorhandenen elektrischen Kräften verrichtet wird, nicht durch $-dP^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$, sondern durch

$$(9.) \qquad -\delta P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$$

dargestellt sein. Und dementsprechend ergiebt sich aus (3.), (3a.), dass der Ausdruck

$$(10.) \qquad -\delta \Pi = -\delta\left(\tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\right)$$

diejenige ponderomotorische Arbeit repräsentirt, welche während der Zeit dt verrichtet wird von allen im ganzen System $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots \mathfrak{z}$ vorhandenen elektrischen Kräften.

§ 2.

Ueber die elektrostatischen Potentiale.

Es sei $\mathfrak{a}$ ein *Conductor*. Alsdann wird freie Elektricität niemals im Innern, sondern stets nur an der Oberfläche von $\mathfrak{a}$ anzutreffen sein; so dass also das elektrostatische Potential $P^{\mathfrak{a}}$ dieses Körpers auf sich selbst den Werth hat [2]):

$$(\alpha.) \qquad P^{\mathfrak{a}} = \tfrac{1}{2}\iint \frac{\eta D\sigma \cdot \eta' D\sigma'}{r} ,$$

---

1) Es ist mir immer auffallend erschienen, dass man es lange Zeit versäumt hat, diesen fundamentalen Grundsatz in bestimmter Weise auszusprechen. Die hier vorhandene Lücke habe ich auszufüllen mich bemüht in meiner Schrift über »*die elektrischen Kräfte*« (Leipzig, 1873), daselbst Seite 25.

2) Ich bezeichne die *räumlichen* Elemente (Linien-, Flächen-, und Volumelemente) mit D, und reservire in solcher Art die Charakteristiken d, δ, Δ für die *zeitlichen* Aenderungen.

Digitized by Google

die eine Integration ausgedehnt über alle Oberflächenelemente $D\sigma$ des Körpers $\mathfrak{a}$, bei festgehaltenem $D\sigma'$, und sodann die andere Integration ausgedehnt über alle Oberflächenelemente $D\sigma'$ ebendesselben Körpers. Hier bezeichnet r den Abstand der Elemente $D\sigma$ und $D\sigma'$ von einander, während η und η' die in denselben vorhandenen elektrischen Dichtigkeiten repräsentiren. Dabei wollen wir uns die einzelnen Elemente $D\sigma$ und $D\sigma'$ in die Oberfläche *eingravirt* denken, so dass also (weil der Körper starr ist) die Entfernungen r unveränderlich sind.

Ist nun $\mathfrak{a}$ ein Körper des betrachteten Systems $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots \mathfrak{z}$, und denkt man sich dieses System in beliebiger Bewegung begriffen, so ergiebt sich für die während eines Zeitelementes dt erfolgenden Veränderungen $dP^{\mathfrak{a}}$, $d\eta$, $d\eta'$ sofort die Formel:

$$(\varphi.) \qquad dP^{\mathfrak{a}} = \tfrac{1}{2}\iint \frac{(d\eta)\,D\sigma \cdot \eta' D\sigma' + \eta\, D\sigma \cdot (d\eta')\, D\sigma'}{r} ,$$

oder, was dasselbe ist:

$$(\alpha'.) \qquad dP^{\mathfrak{a}} = \iint \frac{(d\eta)\,D\sigma \cdot \eta' D\sigma'}{r} .$$

Die Formeln $(\alpha.)$, $(\alpha'.)$ sind offenbar auch so darstellbar:

$$P^{\mathfrak{a}} = \tfrac{1}{2}\int \left(D\sigma \cdot \eta \int \frac{D\sigma' \cdot \eta'}{r} \right)$$

$$dP^{\mathfrak{a}} = \int \left(D\sigma (d\eta) \int \frac{D\sigma' \cdot \eta'}{r} \right)$$

oder auch so:

$$(\beta.) \qquad P^{\mathfrak{a}} = \tfrac{1}{2}\int D\sigma \cdot \eta\, \Phi^{\mathfrak{a}} ,$$

$$(\beta'.) \qquad dP^{\mathfrak{a}} = \int D\sigma (d\eta)\, \Phi^{\mathfrak{a}} ,$$

wo $\Phi^{\mathfrak{a}} = \int \frac{D\sigma' \cdot \eta'}{r}$ das elektrostatische Potential des Conductors $\mathfrak{a}$ auf einen *einzelnen Punkt* vorstellt, dieser Punkt gelegen gedacht in $D\sigma$.

Einigermassen ähnliche Formeln wollen wir jetzt ableiten für das Potential

$$P^{\mathfrak{a}\mathfrak{x}} = P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} + P^{\mathfrak{a}\mathfrak{c}} + \cdots + P^{\mathfrak{a}\mathfrak{z}} ; \quad [\text{vgl. } (4.)] .$$

Digitized by Google

Dabei nehmen wir wiederum an, der Körper $\mathfrak{a}$ sei ein *Conductor*, ohne aber irgend welche Voraussetzung zu machen über die Natur der übrigen Körper $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots \mathfrak{z}$. — Zunächst ergiebt sich:

$$(\gamma.) \qquad P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} = \int D\sigma \cdot \eta \Phi^{\mathfrak{A}} \ ,$$

die Integration ausgedehnt über alle Oberflächenelemente $\eta D\sigma$ des Conductors $\mathfrak{a}$. Dabei soll $\Phi^{\mathfrak{A}}$ das elektrostatische Potential des Complexes $\mathfrak{A} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \cdots + \mathfrak{z}$ auf einen *einzelnen Punkt* vorstellen, dieser Punkt gelegen gedacht in $D\sigma$. Was die während der Zeit dt erfolgenden Veränderungen betrifft, so ergiebt sich aus $(\gamma.)$ sofort:

$$d P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} = \int D\sigma (d\eta) \Phi^{\mathfrak{A}} + \int D\sigma \cdot \eta (d\Phi^{\mathfrak{A}}) \ ,$$

und insbesondere:

$$(\gamma'.) \qquad \Delta^{\mathfrak{a}} P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} = \int D\sigma (d\eta) \Phi^{\mathfrak{A}} \ .$$

Denn bei der Operation $\Delta^{\mathfrak{a}}$ hat man von allen Argumenten S, $J_{\mathfrak{a}}, J_{\mathfrak{b}}, \ldots J_{\mathfrak{z}}$ nur allein $J_{\mathfrak{a}}$ sich ändern zu lassen; so dass also dabei nur η sich ändert, während $\Phi^{\mathfrak{a}}$ in jedwedem Oberflächenpunkte des Conductors $\mathfrak{a}$ constant bleibt.

Aus $(\beta.)$, $(\beta'.)$ und $(\gamma.)$, $(\gamma'.)$ folgt nun ohne Weiteres:

$$2 P^{\mathfrak{a}} + P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} = \int D\sigma \cdot \eta (\Phi^{\mathfrak{a}} + \Phi^{\mathfrak{A}}) \ ,$$

$$d P^{\mathfrak{a}} + \Delta^{\mathfrak{a}} P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} = \int D\sigma (d\eta) (\Phi^{\mathfrak{a}} + \Phi^{\mathfrak{A}}) \ ,$$

oder einfacher geschrieben:

$$(\delta.) \qquad 2 P^{\mathfrak{a}} + P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} = \int D\sigma \cdot \eta \Phi \ ,$$

$$(\delta'.) \qquad d P^{\mathfrak{a}} + \Delta^{\mathfrak{a}} P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} = \int D\sigma \cdot (d\eta) \Phi \ ,$$

wo $\Phi = \Phi^{\mathfrak{a}} + \Phi^{\mathfrak{A}}$ das Punktpotential des ganzen Systemes $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \ldots \mathfrak{z}$ vorstellt, der Punkt gelegen gedacht in $D\sigma$.

In $(\delta.)$, $(\delta'.)$ sind, ebenso wie in den früheren Formeln, die Integrationen ausgedehnt über die Oberfläche des Conductors $\mathfrak{a}$.

Digitized by Google

Auf dieser Oberfläche aber hat Φ, nach der Poisson'schen Theorie, allenthalben ein und denselben Werth, der $G^{\mathfrak{a}}$ heissen mag. Somit folgt:

$$(\varepsilon.) \quad 2P^{\mathfrak{a}} + P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} = G^{\mathfrak{a}} \int D\sigma \cdot \eta \ ,$$

$$(\varepsilon'.) \quad dP^{\mathfrak{a}} + \Delta^{\mathfrak{a}} P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} = G^{\mathfrak{a}} \int D\sigma \cdot d\eta = G^{\mathfrak{a}} d\left(\int D\sigma \cdot \eta\right) .$$

Das Integral $\int D\sigma \cdot \eta$ repräsentirt offenbar die augenblicklich im Conductor $\mathfrak{a}$ enthaltene Electricitätsmenge, welche $M^{\mathfrak{a}}$ heissen mag. Somit folgt:

$$(\zeta.) \quad 2P^{\mathfrak{a}} + P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} = G^{\mathfrak{a}} M^{\mathfrak{a}} \ ,$$

$$(\zeta'.) \quad dP^{\mathfrak{a}} + \Delta^{\mathfrak{a}} P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} = G^{\mathfrak{a}} dM^{\mathfrak{a}} = 0 \ .$$

Hier, nämlich in $(\zeta'.)$, bedarf die rechts stehende 0 noch einer kurzen Erläuterung. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden: *Entweder* ist der Conductor $\mathfrak{a}$ zur Erde abgeleitet; dann ist $G^{\mathfrak{a}} = 0$. *Oder aber* der Conductor $\mathfrak{a}$ ist isolirt; dann ist $M^{\mathfrak{a}}$ unveränderlich, mithin $dM^{\mathfrak{a}} = 0$. *In beiden Fällen* wird also das Product $G^{\mathfrak{a}} dM^{\mathfrak{a}} = 0$ sein. — *Q. e. d.*

§ 3.

Resultate der Untersuchung.

Will man das in den Formeln $(\zeta.)$, $(\zeta'.)$ enthaltene Resultat angeben, so wird man zu sagen haben:

Erster Satz. — *Ist der Körper $\mathfrak{a}$ ein Conductor, ferner $P^{\mathfrak{a}}$ das elektrostatische Potential von $\mathfrak{a}$ auf sich selber, und $P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}}$ das Potential des Körpers $\mathfrak{a}$ auf alle übrigen Körper des Systemes, so gilt die Formel:*

$$(11.) \quad 2P^{\mathfrak{a}} + P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} = G^{\mathfrak{a}} M^{\mathfrak{a}} \ ;$$

dabei bezeichnet $M^{\mathfrak{a}}$ die augenblicklich in $\mathfrak{a}$ enthaltene Elektricitätsmenge, und $G^{\mathfrak{a}}$ denjenigen Werth, den das elektrostatische Punktpotential des ganzen Systemes augenblicklich innerhalb $\mathfrak{a}$ besitzt.

Zweiter Satz. — *Denkt man sich das betrachtete System $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots \mathfrak{z}$ in beliebiger Bewegung begriffen, und ist $\mathfrak{a}$ ein Conductor, so gilt für jedes Zeitelement die Formel:*

$$(12.) \quad dP^{\mathfrak{a}} + \Delta^{\mathfrak{a}} P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} = 0 \ .$$

Digitized by Google

Diese Formel ist mit Rücksicht auf (7.) *auch so darstellbar*

$$\Delta^{\mathfrak{a}}(P^{\mathfrak{a}} + P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}}) = 0 \ , \tag{12a.}$$

also mit Rücksicht auf (6.) *auch so:*

$$\Delta^{\mathfrak{a}}\Pi = 0 \ . \tag{12b.}$$

Zusatz. — *Aus* (11.) *und* (12.) *folgt durch Elimination von* $P^{\mathfrak{a}}$ *sofort:*

$$dP^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} - 2\Delta^{\mathfrak{a}}P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} = d(G^{\mathfrak{a}}M^{\mathfrak{a}}) \ , \tag{13.}$$

immer vorausgesetzt, dass $\mathfrak{a}$ *ein Conductor ist.*

Ist $\mathfrak{a}$ ein *Isolator*, so werden diese Sätze, ihrer Ableitung zufolge, *nicht* mehr anwendbar sein. Dennoch wird auch in diesem Falle

$$\Delta^{\mathfrak{a}}\Pi \text{ stets } = 0$$

sein [vgl. etwa die auf (2.) folgenden Zeilen]. — Wir sehen somit, dass die in (12b.) angegebene Formel $\Delta^{\mathfrak{a}}\Pi = 0$ ganz allgemein gilt, für jedweden Körper des betrachteten Systems. Es ist also:

$$\Delta^{\mathfrak{a}}\Pi = 0 \ , \quad \Delta^{\mathfrak{b}}\Pi = 0 \ , \ \ldots \quad \Delta^{\mathfrak{s}}\Pi = 0 \ .$$

Und hieraus folgt durch Addition:

$$\Delta\Pi = 0 \ , \quad \text{d. i.} \quad d\Pi = \delta\Pi \ ;$$

so dass wir also zu folgendem Satze gelangen:

Dritter Satz. — *Denkt man sich das System in beliebiger Bewegung begriffen, so gelten für jedes Zeitelement die Formeln:*

$$\delta\Pi = d\Pi \quad \textit{und} \quad \Delta\Pi = 0 \ . \tag{14.}$$

Demgemäss ist die früher in (10.) besprochene ponderomotorische Arbeit $-\delta\Pi$ auch ausdrückbar durch $-d\Pi$. Man kann daher sagen:

Vierter Satz. — *Befindet sich das betrachtete aus Isolatoren und Conductoren bestehende System in beliebiger Bewegung, so wird während des Zeitelementes* dt *von allen im System vorhandenen elektrischen Kräften eine gewisse ponderomotorische Arbeit verrichtet werden. Diese Arbeit ist gleich*

$$-d\Pi \ , \tag{15.}$$

Digitized by Google

wo $d\Pi$ den vollständigen Zuwachs des elektrostatischen Potentials Π des Systemes auf sich selber während der Zeit dt vorstellt.

Dabei wird[1]) beständig vorausgesetzt, die Bewegung des Systemes sei so langsam, dass der elektrische Zustand des Systemes in jedem Augenblicke ein Gleichgewichtszustand ist. Macht man nun die (wohl allgemein übliche) Annahme, dass bei einer so langsamen Bewegung im Innern der einzelnen Körper sich *keine Würme* entwickelt, so wird das Potential Π, zufolge des Satzes (15.), zugleich auch als die *Energie* des Systemes zu bezeichnen sein.

Besteht das System $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots \mathfrak{z}$ nur aus *Conductoren*, so gelten nach (11.) die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2P^{\mathfrak{a}} + P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} &= G^{\mathfrak{a}} M^{\mathfrak{a}} , \\ 2P^{\mathfrak{b}} + P^{\mathfrak{b}\mathfrak{B}} &= G^{\mathfrak{b}} M^{\mathfrak{b}} , \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ 2P^{\mathfrak{z}} + P^{\mathfrak{z}\mathfrak{Z}} &= G^{\mathfrak{z}} M^{\mathfrak{z}} . \end{aligned} \tag{16.}$$

Hieraus aber ergiebt sich durch Addition und mit Rücksicht auf (5.) die bekannte THOMSON'sche Formel[2]):

$$2\Pi = G^{\mathfrak{a}} M^{\mathfrak{a}} + G^{\mathfrak{b}} M^{\mathfrak{b}} \cdots + G^{\mathfrak{z}} M^{\mathfrak{z}} ;$$

so dass wir also zu folgendem Satze gelangen:

Fünfter Satz. — *Besteht das betrachtete System $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots \mathfrak{z}$ aus lauter Conductoren, so wird das elektrostatische Potential Π des Systems auf sich selber den Werth haben:*

$$\Pi = \tfrac{1}{2}(G^{\mathfrak{a}} M^{\mathfrak{a}} + G^{\mathfrak{b}} M^{\mathfrak{b}} + \cdots + G^{\mathfrak{z}} M^{\mathfrak{z}}) . \tag{17.}$$

Besteht hingegen das System theils aus Conductoren, theils aus Isolatoren, so ergiebt sich für Π folgender Werth[3]):

$$\Pi = \tfrac{1}{2}\Sigma G^{\mathfrak{a}} M^{\mathfrak{a}} + \tfrac{1}{2} P^{(cj)} + \Pi^{(j)} , \tag{18.}$$

---

1) Wie schon früher [in den Zeilen vor (1.)] ein für alle mal festgesetzt wurde.

2) THOMSON *Papers*, London 1872, pag. 93. Man vergl. auch diese Berichte vom Jahre 1880, Seite 29.

3) Die Ableitung dieser Formel (18.) ist mittelst der Gleichungen (16.) zu bewerkstelligen, wobei aber im Auge zu behalten ist, dass diese Gleichungen im gegenwärtigen Falle nicht für alle Körper, sondern nur für die *Conductoren* gelten. Uebrigens wird zur Erläuterung der Formel (18.) das in (19.) folgende Beispiel einigermassen beitragen.

Digitized by Google

wo im ersten Gliede die Summation nur über die Conductoren auszudehnen ist, wo ferner $P^{(J)}$ das elektrostatische Potential aller Conductoren auf alle Isolatoren vorstellt, und wo endlich $\Pi^{(J)}$ das Potential der Gesammtheit der Isolatoren auf sich selber bezeichnet.

In (17.) *wie in* (18.) *bezeichnen die M die augenblicklich in den einzelnen Conductoren enthaltenen Elektricitätsmengen, und die G diejenigen Werthe, welche das elektrostatische Punktpotential des ganzen betrachteten Systems augenblicklich in den einzelnen Conductoren besitzt.*

Besteht z. B. das betrachtete System nur aus *zwei* Körpern, einem Conductor a und einem Isolator b, so ist nach (3):

$$\Pi = P^{ab} + P^{a} + P^{b} .$$

Zugleich ergiebt sich alsdann aus (11.):

$$2\,P^{a} + P^{ab} = G^{a} M^{a} .$$

Demgemäss folgt durch Elimination von P^{a} sofort:

$$\Pi = \tfrac{1}{2} G^{a} M^{a} + \tfrac{1}{2} P^{ab} + P^{b} , \tag{19.}$$

eine Formel, die der allgemeinen Formel (18.) als specieller Fall sich subsumirt.

Alle Sätze dieses Paragraphs sind, wie noch besonders betont sein mag, gültig, einerlei ob die in dem System enthaltenen Conductoren isolirt oder zur Erde abgeleitet, oder ob sie theils isolirt, theils abgeleitet sind.

Bemerkung. — Ist der Conductor a zur Erde abgeleitet, mithin $G^{a} = 0$, so nehmen die drei letzten Formeln die Gestalt an.

$$\Pi = P^{ab} + P^{a} + P^{b} , \tag{U.}$$

$$2\,P^{a} + P^{ab} = 0 , \tag{V.}$$

$$\Pi = \tfrac{1}{2} P^{ab} + P^{b} . \tag{W.}$$

Die Formel (*U.*) repräsentirt die *ursprüngliche Definition* des Potentials Π; und ihr zufolge ist: $\delta\Pi = \delta P^{ab}$.

Hingegen würde es durchaus *falsch* sein, aus der Formel (*W.*) folgern zu wollen, dass $\delta\Pi = \frac{1}{2}\delta P^{ab}$ sei. Denn (*W.*) ist aus (*U.*) durch eine gewisse auf die Relation (*V.*) sich stützende Transformation entstanden. Mit anderen Worten: (*W.*) ist aus (*U.*) entstanden mit Rücksicht auf eine gewisse zwischen den Argumenten S, J_a, J_b stattfindende Relation. Nach der von uns getroffenen Festsetzung (2a.) sind aber unter den Charakteristiken δ, Δ^{a}, Δ^{b} diejenigen partiellen Zuwüchse zu verstehen, welche der betrachteten Function auf Grund ihrer *ursprünglichen* Definition so lange zukommen, als die Argumente S, J_a, J_b *von einander unabhängig* erhalten werden.

Digitized by Google

§ 4.

Betrachtung eines speciellen Falles.

Das gegebene System bestehe nur aus *zwei* Körpern, aus einem Conductor $\mathfrak{a}$ und einem Isolator $\mathfrak{b}$. Alsdann folgt aus (13.).

$$d P^{\mathfrak{ab}} - 2 \Delta^{\mathfrak{a}} P^{\mathfrak{ab}} = d(G^{\mathfrak{a}} M^{\mathfrak{a}}) \ .$$

Ueberdies wird, weil $\mathfrak{b}$ ein Isolator, mithin $J_{\mathfrak{b}}$ absolut unveränderlich sein soll, die Formel stattfinden:

$$- 2 \Delta^{\mathfrak{b}} P^{\mathfrak{ab}} = 0 \ .$$

Aus diesen beiden Formeln folgt durch Addition:

$$d P^{\mathfrak{ab}} - 2 \Delta P^{\mathfrak{ab}} = d(G^{\mathfrak{a}} M^{\mathfrak{a}}) \ ,$$

also, weil $\Delta = d - \delta$ ist:

$$- d P^{\mathfrak{ab}} + 2 \delta P^{\mathfrak{ab}} = d(G^{\mathfrak{a}} M^{\mathfrak{a}}) \ ,$$

oder ein wenig anders geschrieben:

$$\delta P^{\mathfrak{ab}} = \tfrac{1}{2} d(P^{\mathfrak{ab}} + G^{\mathfrak{a}} M^{\mathfrak{a}}) \ ; \tag{20.}$$

so dass man also mit Rücksicht auf (9.) zu folgendem Resultate gelangt:

Satz. — *Befinden sich zwei elektrisch geladene Körper* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$, *von denen der erstere ein isolirter oder auch zur Erde abgeleiteter* Conductor, *und der zweite ein* Isolator *sein soll, in beliebigen Bewegungen, so wird während eines Zeitelementes* dt *von den zwischen* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *vorhandenen elektrischen Kräften eine gewisse ponderomotorische Arbeit verrichtet werden. Diese Arbeit ist gleich*

$$- \tfrac{1}{2} d(P^{\mathfrak{ab}} + G^{\mathfrak{a}} M^{\mathfrak{a}}) \ , \tag{21.}$$

wo d *den* vollständigen *Zuwachs des in der Klammer enthaltenen Ausdrucks während der Zeit* dt *vorstellt. Dabei haben* $G^{\mathfrak{a}}$ *und* $M^{\mathfrak{a}}$ *die im Satze* (17.), (18.) *angegebenen Bedeutungen.*

Demgemäss wird diese ponderomotorische Arbeit gleich

$$- \tfrac{1}{2} d P^{\mathfrak{ab}} \tag{22.}$$

sein, sobald der Conductor $\mathfrak{a}$ *entweder zur Erde abgeleitet, oder aber isolirt und mit der Elektricitätsmenge Null geladen ist. Denn im ersteren Fall ist* $G^{\mathfrak{a}}$, *im letzteren* $M^{\mathfrak{a}}$ *gleich Null.*

Digitized by Google

Durch die Ergebnisse (20.), (21.), (22.) ist der Beweis erbracht für die in der Einleitung, in (III.) und (IV.) ausgesprochenen Behauptungen. Diesen aber subsumiren sich die dortigen Behauptungen (I.) und (II.) als specielle Fälle.

Uebrigens kann man den Satz (21.) auch in folgender Art beweisen. Das Potential Π des hier betrachteten Systems $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ auf sich selber hat nach (19.) den Werth:

$$\Pi = \tfrac{1}{2} G^{\mathfrak{a}} M^{\mathfrak{a}} + \tfrac{1}{2} P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} + \text{Const.} ,$$

folglich ist:

$$d\Pi = \tfrac{1}{2} d(G^{\mathfrak{a}} M^{\mathfrak{a}} + P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}) .$$

Und hieraus ergiebt sich mit Rücksicht auf (15.) sofort der zu beweisende Satz (21.).

Zweiter Theil.

Zur Theorie des Magnetismus.

Es seien beliebig viele magnetische Körper gegeben: $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... $\mathfrak{z}$, theils *invariable* Magnete, theils *temporär*-magnetische Körper (wie z. B. weiches Eisen). Der magnetische Zustand dieser letzteren Körper ist alsdann bedingt durch die augenblickliche relative Lage aller Körper des ganzen Systems.

Aehnlich wie im vorhergehenden Abschnitt, mag jede von dem System $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots \mathfrak{z}$ abhängende Function angesehen werden als eine Function der Argumente

$$S, J_{\mathfrak{a}}, J_{\mathfrak{b}}, \ldots J_{\mathfrak{z}} ,$$

wo S die augenblickliche relative Lage der Körper zu einander vorstellt, während $J_{\mathfrak{a}}, J_{\mathfrak{b}}, \ldots J_{\mathfrak{z}}$ die augenblicklichen magnetischen Zustände der einzelnen Körper bezeichnen sollen. Befindet sich also das System in Bewegung, so wird der Zuwachs einer solchen Function während der Zeit dt darstellbar sein durch

$$(1.) \qquad d = \delta + \Delta^{\mathfrak{a}} + \Delta^{\mathfrak{b}} + \cdots + \Delta^{\mathfrak{z}} ,$$

wo δ, $\Delta^{\mathfrak{a}}$, $\Delta^{\mathfrak{b}}$, ... $\Delta^{\mathfrak{z}}$ die partiellen Zuwüchse nach den Argumenten $S, J_{\mathfrak{a}}, J_{\mathfrak{b}}, \ldots J_{\mathfrak{z}}$ repräsentiren. Auch mag zur Abkürzung gesetzt werden:

$$(2.) \qquad \begin{cases} d = \delta + \Delta , \\ \text{wo } \Delta = \Delta^{\mathfrak{a}} + \Delta^{\mathfrak{b}} + \cdots + \Delta^{\mathfrak{z}} \text{ sein soll.} \end{cases}$$

Digitized by Google

Ferner mag in Betreff dieser Charakteristiken vom Neuen adoptirt werden die auf Seite 94 getroffene Festsetzung.

Durchweg mögen überdies die Bewegungen des Systems als so *langsam* vorausgesetzt werden, dass in jedem Augenblick der magnetische Zustand des Systems ein *Gleichgewichtszustand* ist.

§ 1.

Die ponderomotorische Arbeit.

Jede auf das magnetische Fluidum eines Körpers ausgeübte Kraft überträgt sich unmittelbar auf die ponderable Masse des Körpers, in genau derselben Art, als wären magnetisches Fluidum und ponderable Masse in dem betrachteten Augenblick starr mit einander verbunden. Aus diesem von allen Autoren festgehaltenen Grundsatz ergiebt sich sofort, dass

(3.) $$-\delta P^{\mathfrak{ab}}$$

diejenige ponderomotorische Arbeit vorstellt, welche während der Zeit dt verrichtet wird von allen zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ vorhandenen magnetischen Kräften, vorausgesetzt, dass man unter $P^{\mathfrak{ab}}$ das magnetische Potential der beiden Körper $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ aufeinander versteht, und die Charakteristik δ in dem durch (1.) festgesetzten Sinne verwendet.

Von den im ganzen System $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots \mathfrak{z}$ vorhandenen magnetischen Kräften wird daher während der Zeit dt eine ponderomotorische Arbeit verrichtet werden, welche gleich

(4.) $$-\delta\left(\tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma P^{\mathfrak{ab}}\right)$$

ist, die Summationszeichen in demselben Sinne genommen, wie z. B. auf Seite 94 in der Formel (3a.); man vergl. dabei die dortige Formel (3.).

§ 2.

Das magnetische Punktpotential und das Inductionsgesetz.

Bezeichnet $\Phi^{\mathfrak{a}}$ das magnetische Potential des Körpers $\mathfrak{a}$ auf einen einzelnen Punkt (d. i. auf einen Magnetpol von der Masse Eins), so ist bekanntlich

(5.) $$\Phi^{\mathfrak{a}} = \int D\tau \left(\alpha \frac{\delta \frac{1}{r}}{\delta x} + \beta \frac{\delta \frac{1}{r}}{\delta y} + \gamma \frac{\delta \frac{1}{r}}{\delta z}\right) ,$$

Digitized by Google

die Integration ausgedehnt über alle Volumelemente $D\tau\,(x,y,z)$ des Körpers $\mathfrak{a}$. Dabei bezeichnet r die Entfernung eines solchen Elementes $D\tau\,(x,y,z)$ vom betrachteten Punkt oder Pol, während α, β, γ die (auf die Volumeinheit bezogenen) magnetischen Momente des Körpers an der Stelle (x, y, z) repräsentiren [1]).

Offenbar ist die Formel (5.) auch so darstellbar:

$$\Phi^{\mathfrak{a}} = \int D\tau \left(\frac{\partial \frac{\alpha}{r}}{\partial x} + \cdots \right) - \int D\tau \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \cdots \right),$$

oder auch so:

$$(5\,\text{a.}) \quad \Phi^{\mathfrak{a}} = -\int \frac{D\sigma}{r} [\alpha \cos(\nu, x) + \cdots] - \int \frac{D\tau}{r} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \cdots \right),$$

wo das *erste* Integral über alle Oberflächenelemente $D\sigma$ des Körpers $\mathfrak{a}$ sich ausdehnt, und ν die auf $D\sigma$ errichtete *innere* Normale bezeichnet. Zur Abkürzung geben wir der Formel die Gestalt:

$$(6.) \qquad \Phi^{\mathfrak{a}} = \int \frac{\eta\, D\sigma}{r} + \int \frac{\varepsilon\, D\tau}{r},$$

wo alsdann η und ε die Bedeutungen haben:

$$(6\,\text{a.}) \quad \eta = -[\alpha \cos(\nu, x) + \cdots], \text{ und } \varepsilon = -\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \cdots \right).$$

Nach (6.) ist $\Phi^{\mathfrak{a}}$ auffassbar als ein gewöhnliches NEWTON'sches Potential, welches herrührt von zwei *fingirten* Massenvertheilungen, nämlich von einer superficiellen Vertheilung von der Flächendichtigkeit η, und von einer internen Vertheilung von der räumlichen Dichtigkeit ε. Dieser Auffassungsweise entsprechend entspringen aus (6.) die Formeln:

$$(6\,\text{b.}) \quad \frac{d\Phi^{\mathfrak{a}}}{d\nu} - \frac{d\Phi^{\mathfrak{a}'}}{d\nu} = -4\pi\eta \quad \text{und} \quad \Delta\Phi^{\mathfrak{a}} = -4\pi\varepsilon,$$

wo in der Formel links unter $\Phi^{\mathfrak{a}}$ und $\Phi^{\mathfrak{a}'}$ die Werthe *innerhalb* und *ausserhalb* $\mathfrak{a}$ zu verstehen sind, und wo Δ den LAPLACE'schen Differentialausdruck andeutet.

---

1) Der Bequemlichkeit willen denken wir uns die Axen des Coordinatensystems mit der ponderablen Masse des Körpers $\mathfrak{a}$ in fester Verbindung. Sind also x, y, z die Coordinaten für ein bestimmtes Volumelement $D\tau$ des Körpers $\mathfrak{a}$ oder für ein bestimmtes Oberflächenelement $D\sigma$ desselben, so werden x, y, z *Constanten* sein, d. h. unabhängig von der Zeit sein.

Digitized by Google

Die letzte dieser beiden Formeln (6b.) gilt allgemein für jedweden Raumpunkt. Denn man hat zu beachten, dass α, β, γ die magnetischen Momente speciell des *Körpers* $\mathfrak{a}$ vorstellen sollen, und dass daher α, β, γ und also nach (6a.) auch ε *ausserhalb* dieses Körpers überall $= 0$ sind.

Analoge Formeln gelten für die magnetischen Potentiale $\Phi^{\mathfrak{b}}$, $\Phi^{\mathfrak{c}}$, ... $\Phi^{\mathfrak{z}}$ der Körper $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... $\mathfrak{z}$. Die Summe all' dieser Potentiale mag Φ heissen:

$$\Phi = \Phi^{\mathfrak{a}} + \Phi^{\mathfrak{b}} + \Phi^{\mathfrak{c}} \cdots + \Phi^{\mathfrak{z}} \,. \tag{7.}$$

Es mag nun angenommen werden, der Körper $\mathfrak{a}$ sei ein *temporär*-magnetischer Körper (weiches Eisen). Alsdann gelten nach der POISSON'schen Theorie für die magnetischen Momente α, β, γ dieses Körpers an der Stelle (x, y, z) die Formeln:

$$\begin{aligned} \alpha &= -k\frac{\partial\Phi}{\partial x}\,, \\ \beta &= -k\frac{\partial\Phi}{\partial y}\,, \\ \gamma &= -k\frac{\partial\Phi}{\partial z}\,, \end{aligned} \tag{8.}$$

Formeln, die man füglich bezeichnen kann als das *magnetische Inductionsgesetz*. Dabei pflegt man den Coefficienten k als eine der Substanz des Körpers $\mathfrak{a}$ eigenthümliche *Constante* anzusehen. Da indessen diese Vorstellung der Erfahrung sehr wenig entspricht, so wollen wir der allgemeinern KIRCHHOFF'schen Vorstellung [1]) beipflichten, nach welcher k eine Function von

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2 \,,$$

oder [was in Anbetracht der Gleichungen (8.) auf dasselbe hinauskommt] eine Function von

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \varrho^2 \tag{9.}$$

ist. Demgemäss setzen wir:

$$k = k(\varrho) \,, \tag{10.}$$

---

1) KIRCHHOFF's Ges. Abhandlungen, Seite 220.

Digitized by Google

ϱ definirt gedacht durch die Formel (9.). Selbstverständlich ist diese Function $k(\varrho)$ verschieden je nach der Substanz des Körpers, z. B. verschieden für verschiedene Eisensorten.

Wir wollen jetzt die Körper $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ... $\mathfrak{z}$ unendlich wenig gegen einander verschieben. Alsdann werden in den *temporär*-magnetischen Körpern, wie z. B. in $\mathfrak{a}$, die magnetischen Momente sich ändern. Ebenso werden auch Φ und $\Phi^{\mathfrak{a}}$, $\Phi^{\mathfrak{b}}$, ... $\Phi^{\mathfrak{z}}$ sich ändern. Und zwar wird die Aenderung der Function $\Phi^{\mathfrak{a}}$ in irgend einem bestimmten Punkte, dessen relative Lage zum Körper $\mathfrak{a}$ *constant* bleiben soll, den Werth haben:

$$(11.) \qquad d\Phi^{\mathfrak{a}} = \int D\tau \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\alpha + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} d\beta + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} d\gamma \right),$$

wo $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ die Aenderungen der in $D\tau$ vorhandenen magnetischen Momente α, β, γ vorstellen [1]). Diese Formel (11.) ist [vgl. (6.)] auch so darstellbar:

$$(12.) \qquad d\Phi^{\mathfrak{a}} = \int \frac{(d\eta) D\sigma}{r} + \int \frac{(d\varepsilon) D\tau}{r},$$

wo $d\eta$ und $d\varepsilon$ die Bedeutungen haben:

$$(12\text{a.}) \quad d\eta = -[(d\alpha)\cos(\nu, x) + \cdots], \text{ und } d\varepsilon = -\left(\frac{\partial (d\alpha)}{\partial x} + \cdots \right).$$

Auch ergeben sich parallel mit (6b.) die Formeln:

$$(12\text{b.}) \quad \frac{d(d\Phi^{\mathfrak{a}})}{d\nu} - \frac{d(d\Phi^{\mathfrak{a}'})}{d\nu} = -4\pi d\eta, \text{ und } \Delta(d\Phi^{\mathfrak{a}}) = -4\pi d\varepsilon.$$

Endlich ergeben sich parallel mit (8.) für einen innerhalb $\mathfrak{a}$ markirten Punkt (x, y, z) die Formeln:

$$(13.) \qquad \begin{aligned} d\alpha &= -k \frac{\partial (d\Phi)}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} dk, \\ d\beta &= -k \frac{\partial (d\Phi)}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} dk, \\ d\gamma &= -k \frac{\partial (d\Phi)}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} dk. \end{aligned}$$

---

1) Man beachte bei all' diesen Formeln die in der vorgehenden Note über das Coordinatensystem getroffene Festsetzung.

Digitized by Google

Schliesslich folgt aus (8.) und (13.):

$$(14.)\quad \alpha\frac{\partial(d\Phi)}{\partial x}+\beta\frac{\partial(d\Phi)}{\partial y}+\gamma\frac{\partial(d\Phi)}{\partial z}=\frac{\partial\Phi}{\partial x}d\alpha+\frac{\partial\Phi}{\partial y}d\beta+\frac{\partial\Phi}{\partial z}d\gamma+\frac{\varrho^2 dk}{k^2};$$

Denn es ist nach (8.) und (9.): $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2=\frac{\varrho^2}{k^2}$.

Bemerkung. — Es sind α, β, γ die magnetischen Momente des Körpers $\mathfrak{a}$ im Punkte x, y, z zur Zeit t (wobei das Coordinatensystem mit der ponderablen Masse dieses Körpers fest verbunden gedacht wird). Ebenso sind $\alpha+d\alpha$, $\beta+d\beta$, $\gamma+d\gamma$ die Werthe dieser Momente in ebendemselben Punkte zur Zeit $t+dt$. Man pflegt gewöhnlich anzunehmen, dass α, β, γ, sowie auch alle Ableitungen von α, β, γ nach x, y, z, innerhalb des Körpers $\mathfrak{a}$ *stetig* sind, — eine Annahme, die sich dann von selber auch auf $d\alpha, d\beta, d\gamma$ überträgt.

Dieser Annahme werde ich im Folgenden mich anschliessen. Doch sei bemerkt, dass es sich hier eigentlich nicht um eine *Annahme*, sondern um einen *noch zu beweisenden Satz* handelt. Auf diesen Beweis aber werde ich einstweilen nicht eingehen; so dass also in dieser Beziehung im vorliegenden Aufsatze eine *Lücke* vorhanden ist, die noch der Ausfüllung bedarf.

§ 3.

Das magnetische Potential eines Körpers auf einen andern.

Wir bezeichnen die Körper $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots \mathfrak{z}$ zusammen mit $\mathfrak{A}$, und das magnetische Potential von $\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{A}$ mit

$$(15.)\qquad P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}}=P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}+P^{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}+\cdots+P^{\mathfrak{a}\mathfrak{z}}.$$

Alsdann ist nach der Poisson'schen Theorie:

$$(16.)\quad P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}}=\iint D\tau\, D\tau'\left(\alpha\alpha'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial x'}+\alpha\beta'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y'}+\cdots\right),$$

wo die Klammer im Ganzen *neun* Glieder enthält, entsprechend den neun Combinationen $\alpha\alpha', \alpha\beta', \alpha\gamma', \beta\alpha', \beta\beta', \beta\gamma', \gamma\alpha', \gamma\beta', \gamma\gamma'$. Dabei sind die Integrationen ausgedehnt zu denken einerseits über alle Elemente $D\tau$ (x, y, z) des Körpers $\mathfrak{a}$ und andererseits über alle Elemente $D\tau'$ (x', y', z') des Complexes $\mathfrak{A}$. Unter r ist der gegenseitige Abstand zweier solcher Elemente von einander zu verstehen, während α, β, γ und α', β', γ' die in (x, y, z) und

Digitized by Google

(x', y', z') vorhandenen magnetischen Momente bezeichnen (bezogen auf die Volumeinheit). Wir können die Formel (16.) auch so schreiben:

$$P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} = \int D\tau \left[\alpha \frac{\partial}{\partial x} \int D\tau' \left(\alpha' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + \cdots \right) + \cdots \right],$$

also nach (5.) auch so:

$$(17.) \qquad P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} = \int D\tau \left(\alpha \frac{\partial \Phi^{\mathfrak{A}}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \Phi^{\mathfrak{A}}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \Phi^{\mathfrak{A}}}{\partial z} \right),$$

wo $\Phi^{\mathfrak{A}}$ das magnetische Potential des Complexes $\mathfrak{A}$ auf einen einzelnen Punkt (x, y, z) bezeichnet, dieser Punkt gelegen gedacht in $D\tau$. Aus (17.) folgt weiter:

$$P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} = \int D\tau \left(\frac{\partial(\alpha \Phi^{\mathfrak{A}})}{\partial x} + \cdots \right) - \int D\tau \Phi^{\mathfrak{A}} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \cdots \right),$$

oder, was dasselbe ist:

$$(18.) \quad P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} = -\int D\sigma \Phi^{\mathfrak{A}} [\alpha \cos(\nu, x) + \ldots] - \int D\tau \Phi^{\mathfrak{A}} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \ldots \right),$$

wo das *erste* Integral sich ausdehnt über alle Oberflächenelemente $D\sigma$ des Körpers $\mathfrak{a}$, und ν die auf $D\sigma$ errichtete *innere* Normale bezeichnet, während das *zweite* über alle Volumelemente $D\tau$ dieses Körpers $\mathfrak{a}$ hinerstreckt zu denken ist. Aus (18.) folgt unter Anwendung der Bezeichnungen (6a.):

$$(19.) \qquad P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} = \int \Phi^{\mathfrak{A}} \eta D\sigma + \int \Phi^{\mathfrak{A}} \varepsilon D\tau.$$

Denken wir uns[1]) die Körper $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots \mathfrak{z}$ unendlich wenig gegen einander verschoben, so wird hierbei das Potential $P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}}$ einen Zuwachs erhalten, der nach (17.) den Werth hat:

$$(20.) \quad dP^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} = \int D\tau \left(\frac{\partial \Phi^{\mathfrak{A}}}{\partial x} d\alpha + \ldots \right) + \int D\tau \left(\alpha \frac{\partial (d\Phi^{\mathfrak{A}})}{\partial x} + \ldots \right).$$

Von den beiden Ausdrücken rechts repräsentirt offenbar der *erste* denjenigen *virtuellen* Zuwachs, der entstehen *würde*, falls man von den Argumenten S, $J_{\mathfrak{a}}$, $J_{\mathfrak{b}}$, $\ldots J_{\mathfrak{z}}$ nur allein $J_{\mathfrak{a}}$ sich

1) Es ist hier von Neuem auf die Note pag. 106 hinzuweisen.

Digitized by Google

ändern liesse. Demgemäss ist derselbe zu bezeichnen mit $\Delta^a P^{a\mathfrak{A}}$. Also:

$$(21.) \qquad \Delta^a P^{a\mathfrak{A}} = \int D\tau \left(\frac{\partial \Phi^{\mathfrak{A}}}{\partial x} d\alpha + \ldots \right).$$

Aus (20.), (21.) folgt nun sofort:

$$(22.) \quad d P^{a\mathfrak{A}} - 2\Delta^a P^{a\mathfrak{A}} = \int D\tau \left[\left(\alpha \frac{\partial (d\Phi^{\mathfrak{A}})}{\partial x} + \ldots \right) - \left(\frac{\partial \Phi^{\mathfrak{A}}}{\partial x} d\alpha + \ldots \right) \right].$$

Der hier in der eckigen Klammer stehende Ausdruck ist, falls man $\Phi^a + \Phi^{\mathfrak{A}} = \Phi$ sezt, auch so darstellbar:

$$\left(\alpha \frac{\partial (d\Phi - d\Phi^a)}{\partial x} + \ldots \right) - \left(\frac{\partial (\Phi - \Phi^a)}{\partial x} d\alpha + \ldots \right),$$

also nach (14.) auch so:

$$- \left(\alpha \frac{\partial (d\Phi^a)}{\partial x} + \ldots \right) + \left(\frac{\partial \Phi^a}{\partial x} d\alpha + \ldots \right) + \frac{\varrho^2 dk}{k^2}.$$

Somit folgt aus (22):

$$(23.) \quad d P^{a\mathfrak{A}} - 2\Delta^a P^{a\mathfrak{A}} = \int D\tau \left[\left(\frac{\partial \Phi^a}{\partial x} d\alpha + \cdots \right) - \left(\alpha \frac{\partial (d\Phi^a)}{\partial x} + \cdots \right) + \frac{\varrho^2 dk}{k^2} \right].$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist einer sehr bedeutenden Reduction fähig. Zu diesem Zwecke seien zuvörderst die beiden Transformationen notirt:

$$(\alpha.) \quad \int D\tau \left(\frac{\partial \Phi^a}{\partial x} d\alpha + \cdots \right) = \int \Phi^a (d\eta) D\sigma + \int \Phi^a (d\varepsilon) D\tau ,$$

$$(\beta.) \quad \int D\tau \left(\alpha \frac{\partial (d\Phi^a)}{\partial x} + \cdots \right) = \int (d\Phi^a) \eta D\sigma + \int (d\Phi^a) \varepsilon D\tau ,$$

von denen jede auf demselben Wege entsteht, auf welchem z. B. der Uebergang von (17.) zu (19.) erfolgte. — Die beiden Ausdrücke (α.) und (β.) sind aber unter einander *identisch;* wie man solches sofort erkennt, wenn man daselbst rechter Hand für Φ^a und $d\Phi^a$ die Werthe (6.) und (12.)

$$\Phi^a = \int \frac{\eta D\sigma}{r} + \int \frac{\varepsilon D\tau}{r} ,$$

$$d\Phi^a = \int \frac{(d\eta) D\sigma}{r} + \int \frac{(d\varepsilon) D\tau}{r}$$

Digitized by Google

substituirt. In Anbetracht dieser Identität der Ausdrücke (α.) und (β.) reducirt sich die Formel (23.) auf:

$$(24.) \qquad dP^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} - 2\Delta^{\mathfrak{a}} P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} = \int D\tau \frac{\varrho^2 dk}{k^2} \ .$$

Anwendung auf einen speciellen Fall. — Das betrachtete System bestehe aus nur *zwei* Körpern $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$. Und zwar sei $\mathfrak{a}$ ein Stück weiches Eisen, und für dieses Eisen sei k eine *Constante;* andererseits sei $\mathfrak{b}$ ein unveränderlicher Stahlmagnet. Alsdann nimmt die Formel (24.) die Gestalt an:

$$dP^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} - 2\Delta^{\mathfrak{a}} P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = 0 \ ;$$

denn die rechte Seite wird Null, weil k constant, mithin $dk = 0$ sein soll. Zugleich ergiebt sich, in Anbetracht der Unveränderlichkeit des Stahlmagneten, auch folgende Formel:

$$-2\Delta^{\mathfrak{b}} P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = 0 \ .$$

Durch Addition beider Formeln folgt:

$$dP^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} - 2\Delta P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = 0 \ ,$$

oder, weil $\Delta = d - \delta$ ist:

$$-dP^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} + 2\delta P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = 0 \ ,$$

oder, was dasselbe ist:

$$\delta P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = +\tfrac{1}{2} dP^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \ ;$$

so dass man also mit Rücksicht auf (3.) zu folgendem Resultate gelangt:

Satz. — *Befinden sich ein Stück weiches Eisen $\mathfrak{a}$ und ein unveränderlicher Stahlmagnet $\mathfrak{b}$ in beliebigen Bewegungen, so wird während eines Zeitelementes dt von den zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ vorhandenen magnetischen Kräften eine gewisse ponderomotorische Arbeit verrichtet werden. Diese Arbeit ist gleich*

$$(24\,a.) \qquad -\tfrac{1}{2} dP^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \ ,$$

wo $dP^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ den vollständigen Zuwachs vorstellt, den das magnetische Potential $P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ der beiden Körper aufeinander während des Zeitelementes dt erhält.

Dieser höchst merkwürdige und einfache Satz, der schon in der Einleitung in (V.) angegeben wurde, beruht wesentlich auf der Voraussetzung, dass der Magnetisirungscoefficient k für das betrachtete Eisen eine *Constante* ist. Wir werden weiterhin den Satz von dieser beschränkenden Voraussetzung befreien, und auch nach anderer Richtung hin verallgemeinern.

Einstweilen sei nur noch bemerkt, dass dieser Satz (24 a.) in vollkommener Analogie steht mit dem elektrischen Satze (22.) Seite 103, und dass beide Sätze *mittelst der Theorie der Kugelfunctionen* sehr leicht für den Fall zu verificiren sind, dass das

Digitized by Google

weiche Eisen (resp. der Conductor) eine Kugel ist, und dass andererseits der invariable Magnet (resp. der elektrisch geladene Isolator) durch einen einzelnen Magnetpol (resp. durch einen einzigen elektrischen Massenpunkt) vertreten ist.

§ 4.

Verfolgung eines Weges, der dem früher in der Elektrostatik eingeschlagenem analog ist.

Das Potential $P^{\mathfrak{ab}}$ *zweier* magnetischer Körper $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ aufeinander ist, auf Grund der Poisson'schen Theorie, leicht und mit voller Sicherheit definirbar, und liefert für die Untersuchungen des vorhergehenden Paragraphen eine Grundlage von befriedigender Festigkeit.

Anders verhält es sich mit dem Potential *eines* magnetischen Körpers auf sich selber. Und die hier vorhandene Unsicherheit hat mich bewogen, im vorigen Paragraphen einen Weg einzuschlagen, der von diesem Begriff völlig frei ist, und der daher auch wesentlich verschieden ist von dem vorhin in der Elektrostatik verfolgten.

Nachträglich wollen wir jetzt einen mit jenen elektrostatischen Untersuchungen *parallel* laufenden Weg uns zu eröffnen suchen. Aber auch hierbei wollen wir — zur Vermeidung jener Unsicherheitsklippe — den Begriff des magnetischen Potentials eines Körpers auf sich selbst ganz *in suspenso* lassen, und uns darauf beschränken, für einen einzelnen Körper $\mathfrak{a}$ einen *analytischen Ausdruck* $P^{\mathfrak{a}}$ einzuführen, der seiner *äusseren Form* nach analog ist mit dem für zwei Körper $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ geltenden magnetischen Potential $P^{\mathfrak{ab}}$.

Zuvörderst führen wir, ausgehend von der Function (10.): $k = k(\varrho)$, eine neue Function $f(\varrho)$ ein mittelst der Formeln:

$$\begin{array}{|l|l|} \hline & k = \text{Const.} \\ \hline f(\varrho) = \int \frac{\varrho\, d\varrho}{k} & = \frac{\varrho^2}{2k}\,, \\ f'(\varrho) = \frac{\varrho}{k} & = \frac{\varrho}{k}\;; \\ \hline \end{array} \tag{25.}$$

dabei sind rechts die Werthe beigefügt, welche $f(\varrho)$ und $f'(\varrho)$ annehmen würden für $k = \text{Const.}$ — Beziehen sich die Functionen $k = k(\varrho)$ und $f = f(\varrho)$ auf die Substanz des Körpers $\mathfrak{a}$,

so definiren wir überdies zwei neue Grössen $Q^{\mathfrak{a}}$ und $R^{\mathfrak{a}}$ durch folgende über alle Volumelemente $D\tau$ des Körpers $\mathfrak{a}$ ausgedehnte Integrale:

$$(26.)\qquad \begin{array}{l|l} & k = \text{Const.} \\ Q^{\mathfrak{a}} = \int f(\varrho)\cdot D\tau & = \frac{1}{2k}\int \varrho^2 \cdot D\tau, \\ R^{\mathfrak{a}} = \int [2f(\varrho) - \varrho f'(\varrho)] D\tau & = 0; \end{array}$$

wo wiederum rechts die Werthe für $k = \text{Const.}$ beigefügt sind. Aus (26.) ergeben sich, mit Rücksicht auf (25.), die Formeln:

$$2\,Q^{\mathfrak{a}} - R^{\mathfrak{a}} = \int \varrho f'(\varrho)\cdot D\tau \qquad = \int \frac{\varrho^2}{k} D\tau,$$

$$(26a.)\qquad dQ^{\mathfrak{a}} = \int f'(\varrho) d\varrho \cdot D\tau \qquad = \int \frac{\varrho\, d\varrho}{k} D\tau,$$

$$dR^{\mathfrak{a}} = \int [f'(\varrho) - \varrho f''(\varrho)] d\varrho \cdot D\tau = \int \frac{\varrho^2\, dk}{k^2} D\tau,$$

wo d die Aenderungen während eines Zeitelementes andeuten soll.

Dies vorangeschickt, bilden wir jetzt, *nach Analogie* des Potentiales [1])

$$P^{\mathfrak{ab}} = \iint D\tau\, D\tau' \left(\alpha\alpha' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial x'} + \alpha\beta' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y'} + \cdots\right)$$

den Ausdruck

$$(A.)\qquad P^{\mathfrak{a}} = \tfrac{1}{2} \iint D\tau\, D\tau' \left(\alpha\alpha' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial x'} + \alpha\beta' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y'} + \cdots\right),$$

beide Integrationen ausgedehnt gedacht über *denselben* Körper $\mathfrak{a}$. Es soll nämlich in (*A.*) die *eine* Integration (bei festgehaltenem $D\tau'$) sich erstrecken über alle Elemente $D\tau$ des Körpers $\mathfrak{a}$; und sodann soll die *zweite* sich erstrecken über alle Elemente $D\tau'$ eben desselben Körpers. Dabei sind in (*A.*) innerhalb der Klammer

---

[1]) Dieses Potential $P^{\mathfrak{ab}}$ ist das im vorigen § behandelte. In der That ist die hier für $P^{\mathfrak{ab}}$ hingestellte Formel identisch mit der dortigen Formel (16.), falls man nur das dortige $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{b}$ ersetzt.

Digitized by Google

im Ganzen *neun* Glieder zu denken, entsprechend den neun Combinationen $\alpha\alpha'$, $\alpha\beta'$, $\alpha\gamma'$, $\beta\alpha'$, $\beta\beta'$, $\beta\gamma'$, $\gamma\alpha'$, $\gamma\beta'$, $\gamma\gamma'$.

Es sei nun $\mathfrak{a}$ irgend ein Körper des gegebenen Systems $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... $\mathfrak{z}$. Denken wir uns die Configuration dieses Systems unendlich wenig geändert, so werden die magnetischen Zustände der einzelnen Körper sich ebenfalls ändern. Demgemäss wird $P^{\mathfrak{a}}$ den Zuwachs erhalten [1]):

$$(f.)\quad dP^{\mathfrak{a}} = \tfrac{1}{2}\iint D\tau\, D\tau' \left((\alpha d\alpha' + \alpha' d\alpha) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial x'} + (\alpha d\beta' + \beta' d\alpha) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y'} + \ldots \right),$$

ein Zuwachs, der offenbar auch so darstellbar ist [2]):

$$(A'.)\quad dP^{\mathfrak{a}} = \iint D\tau\, D\tau' \left(\alpha' (d\alpha) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial x'} + \beta' (d\alpha) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y'} + \ldots \right).$$

Selbstverständlich sind $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ und $d\alpha'$, $d\beta'$, $d\gamma'$ sämmtlich $= 0$ für den speciellen Fall, dass $\mathfrak{a}$ ein invariabler Stahlmagnet ist.

Die Formeln $(A.)$ und $(A'.)$ sind auch so darstellbar:

$$P^{\mathfrak{a}} = \tfrac{1}{2} \int D\tau \left[\alpha \frac{\partial}{\partial x} \int D\tau' \left(\alpha' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + \cdots \right) + \cdots \right],$$

$$dP^{\mathfrak{a}} = \int D\tau \left[(d\alpha) \frac{\partial}{\partial x} \int D\tau' \left(\alpha' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + \cdots \right) + \cdots \right];$$

hieraus folgt mit Rücksicht auf (5.)

$$(B.)\qquad P^{\mathfrak{a}} = \tfrac{1}{2} \int D\tau \left(\alpha \frac{\partial \Phi^{\mathfrak{a}}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \Phi^{\mathfrak{a}}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \Phi^{\mathfrak{a}}}{\partial z} \right),$$

$$(B'.)\qquad dP^{\mathfrak{a}} = \int D\tau \left((d\alpha) \frac{\partial \Phi^{\mathfrak{a}}}{\partial x} + (d\beta) \frac{\partial \Phi^{\mathfrak{a}}}{\partial y} + (d\gamma) \frac{\partial \Phi^{\mathfrak{a}}}{\partial z} \right),$$

wo $\Phi^{\mathfrak{a}}$ das magnetische Potential des Körpers $\mathfrak{a}$ auf einen einzelnen Punkt (x, y, z) bezeichnet, dieser Punkt gelegen gedacht in $D\tau$.

---

1) Bei diesen Untersuchungen und Formeln ist wiederum die Note auf Seite 106 im Auge zu behalten.

2) Dieser Uebergang von $(f.)$ zu $(A'.)$ ist genau derselbe, wie z. B. früher auf Seite 97 von $(\varphi.)$ zu $(\alpha'.)$.

Digitized by Google

Bemerkung. — Ich habe hier die Formeln auf einander folgen lassen in paralleler Richtung mit dem früheren elektrostatischen Wege (Seite 96, 97), ohne mich dabei einer besonderen Strenge zu befleissigen. Leider gewährt nämlich die zur Definition von $P^{\mathfrak{a}}$ verwendete Formel (*A.*) kein Fundament für eine wirklich strenge Betrachtung, — schon deswegen, weil in jener Formel die Grössen

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial x'} \quad , \qquad \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y'} \quad , \text{ etc. etc.}$$

für solche Elemente $D\tau$, die dem festgehaltenen $D\tau'$ unendlich nahe liegen, unendlich klein werden von der Ordnung $\left(\frac{1}{r}\right)^3$, und in Folge dessen jenes Integral keinen bestimmten Sinn hat, so lange nicht besondere Determinationen hinzutreten.

Man kann nun aber, ohne hierauf weiter einzugehen, *vollkommene Strenge* dadurch erreichen, dass man die Formel (*A.*) ganz fallen lässt, und, statt dieser, *die Formel (B.) als die eigentliche Definition des Ausdruckes $P^{\mathfrak{a}}$ ansieht.* Alsdann wird nur noch nachzuweisen sein, dass die Formel (*B.*) mit wirklicher Strenge zur Formel (*B'.*) führt. Dieser Beweis lässt sich folgendermassen bewerkstelligen.

Zuvörderst folgt aus der Formel (B.):

$$dP^{\mathfrak{a}} = \tfrac{1}{2}\int D\tau \left(\frac{\partial \Phi^{\mathfrak{a}}}{\partial x}\, d\alpha + \cdots\right) + \tfrac{1}{2}\int D\tau \left(\alpha \frac{\partial (d\Phi^{\mathfrak{a}})}{\partial x} + \cdots\right).$$

Was die hier auf der rechten Seite stehenden beiden Integrale betrifft, so ergiebt sich in bekannter Weise und mit Rücksicht auf (6a.) und (12a.):

$$\int D\tau \left(\frac{\partial \Phi^{\mathfrak{a}}}{\partial x}\, d\alpha + \cdots\right) = \int \Phi^{\mathfrak{a}}\, (d\eta)\, D\sigma + \int \Phi^{\mathfrak{a}}\, (d\varepsilon)\, D\tau \ ,$$

$$\int D\tau \left(\alpha \frac{\partial (d\Phi^{\mathfrak{a}})}{\partial x} + \cdots\right) = \int (d\Phi^{\mathfrak{a}})\, \eta\, D\sigma + \int (d\Phi^{\mathfrak{a}})\, \varepsilon\, D\tau \ .$$

Diese beiden Integrale sind aber unter einander *identisch*, wie man sofort erkennt, falls man in ihnen für $\Phi^{\mathfrak{a}}$ und $d\Phi^{\mathfrak{a}}$ die Werthe (6.) und (12.) substituirt. Da nun also im Ausdrucke für $dP^{\mathfrak{a}}$ die beiden Glieder rechts unter einander *identisch* sind, so ist $dP^{\mathfrak{a}}$ gleich dem Doppelten des einzelnen Gliedes. Also:

$$= \int D\tau \left(\frac{\partial \Phi^{\mathfrak{a}}}{\partial x}\, d\alpha + \cdots\right) ;$$

dies aber ist die Formel (*B'.*) — Q. e. d.

Wir wollen nun neben $P^{\mathfrak{a}}$ zugleich das Potential $P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}}$ in Betracht ziehen, wo $\mathfrak{A}$ den Complex $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \cdots \mathfrak{z}$ vorstellen soll. Dieses Potential hat nach (17.) den Werth:

Digitized by Google

$$(C.) \qquad P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} = \int D\tau \left(\alpha \frac{\partial \Phi^{\mathfrak{A}}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \Phi^{\mathfrak{A}}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \Phi^{\mathfrak{A}}}{\partial z} \right),$$

die Integration ausgedehnt über alle Elemente $D\tau$ des Körpers $\mathfrak{a}$. Hieraus folgt durch Ausführung der Operation $\Delta^{\mathfrak{a}}$ sofort:

$$(C'.) \quad \Delta^{\mathfrak{a}} P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} = \int D\tau \left((d\alpha) \frac{\partial \Phi^{\mathfrak{A}}}{\partial x} + (d\beta) \frac{\partial \Phi^{\mathfrak{A}}}{\partial y} + (d\gamma) \frac{\partial \Phi^{\mathfrak{A}}}{\partial z} \right).$$

Und nunmehr ergeben sich durch Addition aus (*B.*), (*B'.*) und (*C.*), (*C'.*) die Formeln:

$$(D.) \qquad 2P^{\mathfrak{a}} + P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} = \int D\tau \left(\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right),$$

$$(D'.) \quad d P^{\mathfrak{a}} + \Delta^{\mathfrak{a}} P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} = \int D\tau \left((d\alpha) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + (d\beta) \frac{\partial \Phi}{\partial y} + (d\gamma) \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right),$$

wo $\Phi = \Phi^{\mathfrak{a}} + \Phi^{\mathfrak{A}}$ das magnetische Potential des ganzen Systems $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \cdots \mathfrak{z}$ auf einen einzelnen Punkt (x, y, z) vorstellt, dieser Punkt gelegen gedacht in $D\tau$.

Wir lassen jetzt die Voraussetzung eintreten, der Körper $\mathfrak{a}$ sei ein *temporär*-magnetischer (z. B. weiches Eisen). Alsdann gelten die Relationen (8.):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\alpha}{k}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\beta}{k}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{\gamma}{k}.$$

Substituiren wir aber diese Werthe in (*D.*), (*D'*,) so ergiebt sich mit Rücksicht auf (9.):

$$(E.) \qquad 2P^{\mathfrak{a}} + P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} = -\int \frac{\varrho^2}{k} D\tau,$$

$$(E'.) \qquad d P^{\mathfrak{a}} + \Delta^{\mathfrak{a}} P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} = -\int \frac{\varrho\, d\varrho}{k} D\tau.$$

Unterwerfen wir jetzt die Formel (*E.*) der vollständigen Differentiation d (indem wir uns die Körper in Bewegung denken), und subtrahiren sodann das Doppelte der Formel (*E'.*), so erhalten wir:

$$(E''.) \quad d P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} - 2\Delta^{\mathfrak{a}} P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} = -\int \left(\frac{2\varrho\, d\varrho}{k} - \frac{\varrho^2 dk}{k^2} \right) D\tau + 2\int \frac{\varrho\, d\varrho}{k} D\tau,$$

$$\text{d. i.} \quad = +\int \frac{\varrho^2 dk}{k^2} D\tau;$$

Digitized by Google

was in vollem Einklange ist mit dem im vorigen Paragraph erhaltenen Ergebniss (24.).

Schliesslich können wir den Formeln (*E.*), (*E'.*), (*E''.*), unter Anwendung der Relationen (26a.) die einfachere Gestalt verleihen:

$$(F.) \qquad 2P^{\mathfrak{a}} + P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} = -(2Q^{\mathfrak{a}} - R^{\mathfrak{a}}),$$

$$(F'.) \qquad dP^{\mathfrak{a}} + \Delta^{\mathfrak{a}} P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} = -dQ^{\mathfrak{a}},$$

$$(F''.) \qquad dP^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} - 2\Delta^{\mathfrak{a}} P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} = +dR^{\mathfrak{a}}.$$

§ 5.

Resultate der Untersuchung.

Setzt man [in Analogie zu den elektrostatischen Bezeichnungen, vgl. (3a.) Seite 94]:

$$(27.) \qquad \Pi = \tfrac{1}{2} \Sigma\Sigma P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} + \Sigma P^{\mathfrak{a}},$$

überdies aber:

$$(28.) \qquad \Omega = \tfrac{1}{2} \Sigma\Sigma P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} + \Sigma (P^{\mathfrak{a}} + Q^{\mathfrak{a}}),$$

so entspringen aus den Formeln (*F.*), (*F'.*), (*F''.*) folgende Sätze.

Erster Satz. — *Ist der Körper* $\mathfrak{a}$ *ein temporär-magnetischer, (wie z. B. weiches Eisen), so stehen die Grösse* $P^{\mathfrak{a}}$ *und das Potential* $P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}}$ *in folgender Beziehung zu einander:*

$$(29.) \qquad 2(P^{\mathfrak{a}} + Q^{\mathfrak{a}}) + P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{a}}.$$

Hier sind $Q^{\mathfrak{a}}$ *und* $R^{\mathfrak{a}}$ *die in* (26.) *definirten Ausdrücke. Und es sind also* $Q^{\mathfrak{a}}$ *und* $R^{\mathfrak{a}}$, *ebenso wie* $P^{\mathfrak{a}}$, *nur abhängig vom augenblicklichen Zustande des Körpers* $\mathfrak{a}$. *Genauer ausgedrückt: Die Werthe von* $Q^{\mathfrak{a}}$ *und* $R^{\mathfrak{a}}$ *werden, ebenso wie der von* $P^{\mathfrak{a}}$, *in irgend einem Augenblicke völlig bestimmt sein, wenn für diesen Augenblick von den Argumenten* S, $J_{\mathfrak{a}}$, $J_{\mathfrak{b}}$, $\cdots$ $J_{\mathfrak{z}}$ *nur allein das Argument* $J_{\mathfrak{a}}$ *bekannt ist.*

Zweiter Satz. — *Denkt man sich das betrachtete System* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots \mathfrak{z}$ *in beliebiger Bewegung, und ist* $\mathfrak{a}$ *ein temporär-magnetischer Körper, so gilt für jedes Zeitelement die Formel:*

$$(30.) \qquad d(P^{\mathfrak{a}} + Q^{\mathfrak{a}}) + \Delta^{\mathfrak{a}} P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} = 0.$$

Diese Formel ist offenbar auch so darstellbar:

$$(30a.) \qquad \Delta^{\mathfrak{a}}(P^{\mathfrak{a}} + Q^{\mathfrak{a}} + P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}}) = 0,$$

Digitized by Google

also mit Rücksicht auf (28.) *auch so:*

$$\Delta^{\mathfrak{a}}\Omega = 0 \quad . \tag{30 b.}$$

Zusatz. — *Aus* (29.) *und* (30.) *folgt durch Elimination von* $(P^{\mathfrak{a}} + Q^{\mathfrak{a}})$ *sofort:*

$$d P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} - 2\Delta^{\mathfrak{a}} P^{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} = d R^{\mathfrak{a}} \quad , \tag{31.}$$

immer vorausgesetzt, dass $\mathfrak{a}$ *ein temporär-magnetischer Körper ist.*

Diese Sätze sind nicht mehr anwendbar, wenn $\mathfrak{a}$ ein *invariabler Stahlmagnet* ist. Dennoch wird auch in diesem Falle die Gleichung (30 b.) gültig sein, wie aus der Definition von $\Delta^{\mathfrak{a}}$ sofort sich ergiebt. Die Gleichung (30 b.) gilt daher ganz allgemein für *jedweden* Körper des betrachteten Systemes. Hieraus folgt:

$$\Delta\Omega = 0 \quad , \quad \text{d. i.} \quad d\Omega = \delta\Omega \quad .$$

Somit ergiebt sich folgender

Dritter Satz. — *Ist das betrachtete System in beliebiger Bewegung begriffen, so gelten für jedes Zeitelement die Formeln:*

$$\delta\Omega = d\Omega \quad \textit{und} \quad \Delta\Omega = 0 \quad . \tag{32.}$$

Der Ausdruck $d\Omega = \delta\Omega$ ist aber, wie sich aus (28.) ergiebt, auch so darstellbar:

$$d\Omega = \delta\Omega = \delta\left(\tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\right) \quad ,$$

und besitzt daher nach (4.) eine sehr einfache mechanische Bedeutung. Mit Rücksicht hierauf ergiebt sich folgender

Vierter Satz. — *Befindet sich das betrachtete, theils aus invariablen Magneten, theils aus temporär-magnetischen Körpern bestehende System in beliebiger Bewegung, so wird während des Zeitelementes* dt *von allen im System vorhandenen magnetischen Kräften eine gewisse ponderomotorische Arbeit verrichtet werden. Diese Arbeit ist gleich*

$$-d\Omega \quad , \tag{33.}$$

wo $d\Omega$ *den vollständigen Zuwachs des Ausdruckes* Ω (28.) *während der Zeit* dt *vorstellt.*

Dabei wird stets vorausgesetzt, die Bewegung des Systemes sei so langsam, dass sein magnetischer Zustand in jedem Augen-

Digitized by Google

blicke ein Gleichgewichtszustand ist. Macht man nun mit KIRCHHOFF [1]) die Annahme, dass bei einer so langsamen Bewegung im Innern der einzelnen Körper sich *keine Wärme* entwickelt, so wird, zufolge des Satzes (33.), der Ausdruck Ω [nicht aber Π (27.)] als die *Energie* des Systemes zu bezeichnen sein.

Der für Ω gegebene Ausdruck (28.) ist transformirbar mittelst des Satzes (29.). Und zwar gelangt man in solcher Art zu folgendem Resultate:

Fünfter Satz. — *Besteht das betrachtete System theils aus invariablen Magneten, theils aus temporär-magnetischen Körpern, so hat Ω den Werth:*

$$\Omega = \tfrac{1}{2}\Sigma R^a + \tfrac{1}{2}P^{(ij)} + \Omega^{(j)} \quad , \tag{34.}$$

wo die Summation im ersten Gliede sich nur auf die temporär-magnetischen Körper bezieht. Dabei bezeichnet $P^{(ij)}$ das Potential der temporär-magnetischen Körper auf die invariablen Magnete, und $\Omega^{(j)}$ denjenigen Werth, den der Ausdruck Ω annimmt, falls man denselben speciell für das System der invariablen Magnete bildet.

Besteht z. B. das System nur aus *zwei* Körpern, nämlich aus einem Stücke weichen Eisens a und einem invariablen Stahlmagnet b, so ist nach (28.):

$$\Omega = P^{ab} + (P^a + Q^a) + (P^b + Q^b) \quad . \tag{U.}$$

Zugleich ist alsdann nach (29.):

$$2(P^a + Q^a) + P^{ab} = R^a \quad .$$

Aus diesen beiden Formeln aber folgt durch Elimination von $(P^a + Q^a)$ sofort:

---

1) In der schon in der Einleitung citirten Abhandlung von 1884 lässt KIRCHHOFF ein System magnetischer Körper auf zwei verschiedenen Wegen aus einer gegebenen Anfangsposition in eine gegebene Endposition übergehen (vgl. Seite 145 jener Abhandlung), und behauptet, dass die zu dieser Ueberführung erforderliche ponderomotorische Arbeit S bei beiden Wegen *dieselbe* sein müsse. Diese Behauptung aber involvirt ohne Zweifel die Annahme, dass in jenem System beim Uebergange aus der einen in die andere Position sich *keine* Wärme entwickelt. Denn andernfalls würde nach dem allgemeinen Princip der Energie nicht S, sondern $S - Q$ für beide Wege denselben Werth haben müssen, wo S die consumirte ponderomotorische Arbeit, und Q die entwickelte Wärme vorstellt.

Digitized by Google

(35.) $$\Omega = \tfrac{1}{2} R^{\mathfrak{a}} + \tfrac{1}{2} P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} + (P^{\mathfrak{b}} + Q^{\mathfrak{b}}) ,$$

was in Einklang ist mit der allgemeinen Formel (34.).

Bemerkung. — Aus (*U.*) folgt sofort $\delta\Omega = \delta P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$. Hingegen würde es durchaus *falsch* sein, aus (35.) folgern zu wollen, dass $\delta\Omega = \frac{1}{2}\delta P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ sei. Man vgl. die analoge Bemerkung auf Seite 102.

Die Resultate dieses Paragraphs sind im Ganzen analog mit den in der Elektrostatik erhaltenen (Seite 99—102). Die Hauptunterschiede sind folgende:

I. Die Energie des elektrischen Systemes ist durch das Potential Π, hingegen die Energie des magnetischen Systems durch einen Ausdruck Ω dargestellt, der von Π sich wesentlich unterscheidet [vgl. die Formeln (27.), (28.)].

II. Die in den elektrischen Sätzen vorkommende Grösse $G^{\mathfrak{a}} M^{\mathfrak{a}}$ ist in den magnetischen Sätzen vertreten durch $R^{\mathfrak{a}}$. Und diese Grössen sind namentlich insofern differenter Natur, als sie zu den Argumenten S, $J_{\mathfrak{a}}$, $J_{\mathfrak{b}}$, ... $J_{\mathfrak{z}}$ in verschiedener Beziehung stehen. Während nämlich $R^{\mathfrak{a}}$ lediglich von dem *einen* Argumente $J_{\mathfrak{a}}$ abhängt, kann solches von $G^{\mathfrak{a}}$, mithin auch vom Producte $G^{\mathfrak{a}} M^{\mathfrak{a}}$ *nicht* behauptet werden.

§ 6.

Betrachtung eines speciellen Falles.

Das gegebene System bestehe aus nur *zwei* Körpern, aus einem Stücke weichen Eisens $\mathfrak{a}$, und aus einem invariablen Stahlmagnet $\mathfrak{b}$. Alsdann ist nach (34.):

$$d P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} - 2 \Delta^{\mathfrak{a}} P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = d R^{\mathfrak{a}} .$$

Ueberdies aber wird, weil $\mathfrak{b}$ invariabel, mithin $J_{\mathfrak{b}}$ constant sein soll, die Formel stattfinden:

$$- 2 \Delta^{\mathfrak{b}} P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = 0 .$$

Hieraus folgt durch Addition:

$$d P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} - 2 \Delta P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = d R^{\mathfrak{a}} ,$$

also, weil $\Delta = d - \delta$ ist:

$$- d P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} + 2 \delta P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = d R^{\mathfrak{a}} ,$$

d. i.

(36.) $$\delta P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \tfrac{1}{2} d (P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} + R^{\mathfrak{a}}) ;$$

Digitized by Google

so dass man also mit Rücksicht auf (3.) zu folgendem Resultate gelangt:

Satz. — *Befinden sich ein Stück weichen Eisens* $\mathfrak{a}$ *und ein invariabler Stahlmagnet* $\mathfrak{b}$ *in beliebigen Bewegungen, so wird während eines Zeitelementes* dt *von den zwischen* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *vorhandenen magnetischen Kräften eine gewisse ponderomotorische Arbeit verrichtet werden. Diese Arbeit ist gleich*

$$(37.) \qquad -\tfrac{1}{2} d(P^{\mathfrak{ab}} + R^{\mathfrak{a}}) \ ,$$

wo d *den vollständigen Zuwachs des in der Klammer befindlichen Ausdruckes während der Zeit* dt *vorstellt.*

Die hier auftretende Grösse $R^{\mathfrak{a}}$ ist definirt durch die Formel (26.), mithin, wie dort notirt, $= 0$, sobald man den Magnetisirungscoefficienten k des Eisens als eine *Constante* betrachtet. Somit sieht man, dass der Satz (37.) für diesen speciellen Fall $k =$ Const. übergeht in den schon früher gefundenen Satz (24 a.) Seite 112.

Uebrigens kann man zum Satze (37.) auch auf folgendem Wege gelangen. Nach (35.) ist im hier betrachteten Falle:

$$(38.) \qquad \Omega = \tfrac{1}{2} R^{\mathfrak{a}} + \tfrac{1}{2} P^{\mathfrak{ab}} + \text{Const.} \ ,$$

mithin:

$$(39.) \qquad d\Omega = \tfrac{1}{2} d(R^{\mathfrak{a}} + P^{\mathfrak{ab}}) \ .$$

Nach (33.) repräsentirt aber $-d\Omega$ die zu berechnende ponderomotorische Arbeit. *Q. e. d.*

§ 7.

Beiläufige Formeln.

Nach (*B.*) Seite 115 ist:

$$(1.) \qquad 2P^{\mathfrak{a}} = \int_{\mathfrak{a}} D\tau \left(\alpha \frac{\partial \Phi^{\mathfrak{a}}}{\partial x} + \cdots \right) ;$$

ferner ergiebt sich aus (17.) Seite 110, indem man daselbst $\mathfrak{b}$ statt $\mathfrak{A}$ setzt:

$$(2.) \qquad P^{\mathfrak{ab}} = \int_{\mathfrak{a}} D\tau \left(\alpha \frac{\partial \Phi^{\mathfrak{b}}}{\partial x} + \cdots \right) .$$

Dabei sind den Integralen die Indices $\mathfrak{a}$ beigefügt, um anzu-

Digitized by Google

deuten, dass die Integrationen sich ausdehnen über die Elemente $D\tau$ des Körpers $\mathfrak{a}$.

Aus (1.) und (2.) erhält man in bekannter Weise:

$$(3.)\quad 2P^{\mathfrak{a}} = -\int_{\mathfrak{a}} D\sigma\, \Phi^{\mathfrak{a}} [\alpha\cos(\nu, x) + \cdots] - \int_{\mathfrak{a}} D\tau\, \Phi^{\mathfrak{a}} \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \cdots\right),$$

$$(4.)\quad P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = -\int_{\mathfrak{a}} D\sigma\, \Phi^{\mathfrak{b}} [\alpha\cos(\nu, x) + \cdots] - \int_{\mathfrak{a}} D\tau\, \Phi^{\mathfrak{b}} \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \cdots\right),$$

wo $D\sigma$ ein Oberflächenelement des Körpers $\mathfrak{a}$, und ν die auf $D\sigma$ errichtete *innere* Normale vorstellt. Nun ist aber nach (6 a, b.) Seite 106:

$$[\alpha\cos(\nu,x)+\cdots] = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\Phi^{\mathfrak{a}}}{d\nu} - \frac{d\Phi^{\mathfrak{a}'}}{d\nu}\right), \text{ und } \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\cdots\right) = \frac{\Delta\Phi^{\mathfrak{a}}}{4\pi}.$$

Somit folgt:

$$(5.)\quad 8\pi P^{\mathfrak{a}} = -\int_{\mathfrak{a}} D\sigma\, \Phi^{\mathfrak{a}} \left(\frac{d\Phi^{\mathfrak{a}}}{d\nu} - \frac{d\Phi^{\mathfrak{a}'}}{d\nu}\right) - \int_{\mathfrak{a}} D\tau\, \Phi^{\mathfrak{a}} \Delta\Phi^{\mathfrak{a}},$$

$$(6.)\quad 8\pi P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = -2\int_{\mathfrak{a}} D\sigma\, \Phi^{\mathfrak{b}} \left(\frac{d\Phi^{\mathfrak{a}}}{d\nu} - \frac{d\Phi^{\mathfrak{a}'}}{d\nu}\right) - 2\int_{\mathfrak{a}} D\tau\, \Phi^{\mathfrak{b}} \Delta\Phi^{\mathfrak{a}}.$$

Um diese Formeln zu vereinfachen, ziehen wir den *totalen Raum* $\mathfrak{T}$ zu Hülfe, d. i. den nach allen Seiten sich ins Unendliche erstreckenden Raum. Durch Integration über diesen Raum $\mathfrak{T}$ ergiebt sich sofort:

$$\int_{\mathfrak{T}} D\tau \left[\left(\frac{\partial\Phi^{\mathfrak{a}}}{\partial x}\right)^2 + \cdots\right] = \int_{\mathfrak{T}} D\tau \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\Phi^{\mathfrak{a}} \frac{\partial\Phi^{\mathfrak{a}}}{\partial x}\right) + \cdots\right] - \int_{\mathfrak{T}} D\tau\, \Phi^{\mathfrak{a}} \Delta\Phi^{\mathfrak{a}},$$

$$\text{d. i.} = -\int_{\mathfrak{a}} D\sigma\, \Phi^{\mathfrak{a}} \left(\frac{d\Phi^{\mathfrak{a}}}{d\nu} - \frac{d\Phi^{\mathfrak{a}'}}{d\nu}\right) - \int_{\mathfrak{a}} D\tau\, \Phi^{\mathfrak{a}} \Delta\Phi^{\mathfrak{a}};$$

denn es ist zu beachten, dass $\Delta\Phi^{\mathfrak{a}}$ ausserhalb $\mathfrak{a}$ überall $= 0$ ist, und dass die Ableitungen $\frac{\partial\Phi^{\mathfrak{a}}}{\partial x}, \frac{\partial\Phi^{\mathfrak{a}}}{\partial y}, \frac{\partial\Phi^{\mathfrak{a}}}{\partial z}$ mit alleiniger Ausnahme der Oberfläche des Körpers $\mathfrak{a}$ überall stetig sind. Das Eine wie das Andere ist z. B. sofort zu ersehen aus der Formel (6.) Seite 106. In gleicher Weise ergiebt sich:

$$\int_{\mathfrak{T}} D\tau \left(\frac{\partial\Phi^{\mathfrak{a}}}{\partial x}\frac{\partial\Phi^{\mathfrak{b}}}{\partial x} + \cdots\right) = \int_{\mathfrak{T}} D\tau \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\Phi^{\mathfrak{b}} \frac{\partial\Phi^{\mathfrak{a}}}{\partial x}\right) + \cdots\right] - \int_{\mathfrak{T}} D\tau\, \Phi^{\mathfrak{b}} \Delta\Phi^{\mathfrak{a}},$$

$$\text{d. i.} = -\int_{\mathfrak{a}} D\sigma\, \Phi^{\mathfrak{b}} \left(\frac{d\Phi^{\mathfrak{a}}}{d\nu} - \frac{d\Phi^{\mathfrak{a}'}}{d\nu}\right) - \int_{\mathfrak{a}} D\tau\, \Phi^{\mathfrak{b}} \Delta\Phi^{\mathfrak{a}}.$$

Digitized by Google

Somit gewinnen die Formeln (5.), (6.) die einfachere Gestalt:

$$(7.) \qquad 8\pi P^{\mathfrak{a}} = 1 \cdot \int_{\mathfrak{T}} D\tau \left[\left(\frac{\partial \Phi^{\mathfrak{a}}}{\partial x} \right)^2 + \cdots \right],$$

$$(8.) \qquad 8\pi P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = 2 \cdot \int_{\mathfrak{T}} D\tau \left[\frac{\partial \Phi^{\mathfrak{a}}}{\partial x} \frac{\partial \Phi^{\mathfrak{b}}}{\partial x} + \cdots \right].$$

Diese Formeln (1.), (2.), ... (8.) *gelten offenbar für alle Körper des betrachteten Systems, für die temporär-magnetischen sowohl wie für die invariabel-magnetischen. Auch sind dieselben völlig unabhängig von der Beschaffenheit des magnetischen Inductionsgesetzes.*

Durch Einsetzung der Werthe (7.), (8.) in die Formel (27.) Seite 118:

$$(9.) \qquad \Pi = \tfrac{1}{2} \Sigma \Sigma P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} + \Sigma P^{\mathfrak{a}}$$

ergiebt sich sofort:

$$(10.) \qquad 8\pi \Pi = \int_{\mathfrak{T}} D\tau \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \cdots \right),$$

wo $\Phi = \Phi^{\mathfrak{a}} + \Phi^{\mathfrak{b}} \cdots + \Phi^{\mathfrak{z}}$ das magnetische Potential des ganzen Systems $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots \mathfrak{z}$ auf einen einzelnen Punkt (x, y, z) vorstellt, dieser Punkt gelegen gedacht in $D\tau$.

§ 8.

Ausdehnung der Untersuchung auf comprimirte resp. dilatirte Körper.

Der Körper $\mathfrak{a}$ bestehe aus weichem Eisen und sei durch irgend welche auf seine Oberfläche einwirkenden Druckkräfte in ganz unregelmässiger Weise comprimirt, resp. dilatirt, so dass seine Dichtigkeit an verschiedenen Stellen eine verschiedene ist, und zugleich an jeder Stelle drei auf einander senkrechte Hauptdilationen vorhanden sind, deren Richtungen von Stelle zu Stelle variiren. Dieser Zustand der ponderablen Masse des Körpers $\mathfrak{a}$ mag nun aber im Folgenden als *absolut unveränderlich* vorausgesetzt werden.

Alsdann wird an Stelle des Poisson'schen Inductionsgesetzes:

Digitized by Google

$$\alpha = -k\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \beta = -k\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \gamma = -k\frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

folgendes complicirtere Inductionsgesetz zu substituiren sein:

$$\alpha = -\left(a_{11}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial \Phi}{\partial y} + a_{13}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right),$$

$$(A.) \qquad \beta = -\left(a_{21}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial \Phi}{\partial y} + a_{23}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right),$$

$$\gamma = -\left(a_{31}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + a_{32}\frac{\partial \Phi}{\partial y} + a_{33}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right).$$

Ebenso wie nun POISSON im Falle der *homogenen* und *isotropen* Beschaffenheit der ponderablen Masse den Coefficienten k als eine *unveränderliche Constante* ansieht, — ebenso werden wir im gegenwärtigen Falle, wo die ponderable Masse in einem *anhomogenen* und *anisotropen*, aber *unveränderlichen* Zustande sich befindet, die Coefficienten $a_{11}, a_{12}, \ldots$ ansehen können als *unveränderliche Functionen* von x, y, z.[1])

Der Körper $\mathfrak{a}$ gehöre zu dem von uns betrachteten System $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots \mathfrak{z}$. Auch mögen in diesem System noch andere Körper enthalten sein, die (ebenso wie $\mathfrak{a}$) in einem gegebenen und unveränderlichen Dilatationszustande sich befinden. Die Function Φ in ($A.$) repräsentirt alsdann also das magnetische Potential des Systemes $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots \mathfrak{z}$ auf einen einzelnen Punkt.

Denkt man sich nun die Configuration des Systemes $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots \mathfrak{z}$ unendlich wenig geändert, so werden die magnetischen Momente α, β, γ der einzelnen Körper und das Potential Φ ebenfalls sich ändern. Bezeichnet man die während der Zeit dt erfolgenden Aenderungen der Functionen $\alpha, \beta, \gamma, \Phi$ für irgend einen Punkt (x, y, z) des Körpers $\mathfrak{a}$ mit $d\alpha, d\beta, d\gamma, d\Phi$, so ergiebt sich aus ($A.$):

---

1) Dabei mag das Axensystem mit der ponderablen Masse des Körpers $\mathfrak{a}$ fest verbunden gedacht werden, und in Betreff der soeben ausgesprochenen Behauptungen noch folgendes bemerkt sein:

Die Formeln ($A.$) sind von KIRCHHOFF gegeben auf Seite 139 seiner schon in der Einleitung citirten Abhandlung vom Jahre 1884. Und aus den dort, auf Seite 140, angegebenen Werthen der Coefficienten $a_{11}, a_{12}, \ldots$ erkennt man sofort, dass diese Coefficienten *unveränderliche* Functionen von x, y, z sind, sobald man den Zustand der ponderablen Masse des Körpers als *unveränderlich* voraussetzt.

$$d\alpha = -\left(a_{11}\frac{\partial(d\Phi)}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial(d\Phi)}{\partial y} + a_{13}\frac{\partial(d\Phi)}{\partial z}\right),$$

(A'.) $$d\beta = -\left(a_{21}\frac{\partial(d\Phi)}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial(d\Phi)}{\partial y} + a_{23}\frac{\partial(d\Phi)}{\partial z}\right),$$

$$d\gamma = -\left(a_{31}\frac{\partial(d\Phi)}{\partial x} + a_{32}\frac{\partial(d\Phi)}{\partial y} + a_{33}\frac{\partial(d\Phi)}{\partial z}\right).$$

Aus (*A.*) und (*A.'*) folgt sofort:

(*B.*) $$\alpha\frac{\partial(d\Phi)}{\partial x} + \beta\frac{\partial(d\Phi)}{\partial y} + \gamma\frac{\partial(d\Phi)}{\partial z} = (d\alpha)\frac{\partial\Phi}{\partial x} + (d\beta)\frac{\partial\Phi}{\partial y} + (d\gamma)\frac{\partial\Phi}{\partial z}.$$

Diese Formeln (*A.*), (*A.'*), (*B.*) treten im gegenwärtigen Falle an Stelle der Formeln (8.), (13.), (14.) unserer früheren Untersuchung, Seite 107—109. Sonst aber bleiben die dortigen Formeln (15.) bis (22.) ungeändert; und es wird also z. B., genau ebenso wie in (22.), zu schreiben sein:

(*C.*) $$dP^{\alpha\mathfrak{A}} - 2\Delta^{\alpha}P^{\alpha\mathfrak{A}} = \int D\tau\left[\left(\alpha\frac{\partial(d\Phi^{\mathfrak{A}})}{\partial x} + \cdots\right) - \left(\frac{\partial\Phi^{\mathfrak{A}}}{\partial x}d\alpha + \cdots\right)\right].$$

Der hier in der eckigen Klammer enthaltene Ausdruck ist, in Anbetracht der Relation $\Phi^{\mathfrak{A}} = \Phi - \Phi^{\alpha}$, auch so darstellbar:

$$\left(\alpha\frac{\partial(d\Phi - d\Phi^{\alpha})}{\partial x} + \cdots\right) - \left(\frac{\partial(\Phi - \Phi^{\alpha})}{\partial x}d\alpha + \cdots\right),$$

also nach (*B.*) auch so:

$$-\left(\alpha\frac{\partial(d\Phi^{\alpha})}{\partial x} + \cdots\right) + \left(\frac{\partial\Phi^{\alpha}}{\partial x}d\alpha + \cdots\right);$$

so dass also die Formel (*C.*) die Gestalt erhält:

(*D.*) $$dP^{\alpha\mathfrak{A}} - 2\Delta^{\alpha}P^{\alpha\mathfrak{A}} = \int D\tau\left[\left(\frac{\partial\Phi^{\alpha}}{\partial x}d\alpha + \cdots\right) - \left(\alpha\frac{\partial(d\Phi^{\alpha})}{\partial x} + \cdots\right)\right].$$

Hieraus ergiebt sich [in derselben Art, in welcher auf Seite 111 der Uebergang von (23.) zu (24.) erfolgte]:

(*E.*) $$dP^{\alpha\mathfrak{A}} - 2\Delta^{\alpha}P^{\alpha\mathfrak{A}} = 0.$$

Auf Grund dieser Formel (*E.*) aber ergiebt sich nun schliesslich ein gewisser Satz, der dem dortigen Satze (24 a.) Seite 112 analog folgendermassen auszusprechen ist:

Digitized by Google

Satz. — *Die ponderable Masse des weichen Eisens* $\mathfrak{a}$ *befinde sich in einem beliebig gegebenen aber absolut unveränderlichen Zustande der Compression respective Dilatation. Ferner bezeichne* $\mathfrak{b}$ *einen invariablen Stahlmagneten. Beide Körper* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *seien in beliebigen Bewegungen begriffen; so dass also der magnetische Zustand des Eisens* $\mathfrak{a}$ *von Augenblick zu Augenblick sich ändert, in Folge der von* $\mathfrak{b}$ *ausgeübten Einwirkung.*

Alsdann wird von den zwischen $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *vorhandenen magnetischen Kräften während eines Zeitelementes* dt *eine gewisse ponderomotorische Arbeit verrichtet werden. Diese Arbeit ist gleich*

$$(F.) \qquad -\tfrac{1}{2}\, dP^{\mathfrak{ab}},$$

wo $dP^{\mathfrak{ab}}$ *den vollständigen Zuwachs bezeichnet, den das magnetische Potential* $P^{\mathfrak{ab}}$ *der beiden Körper* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *aufeinander während der Zeit* dt *erhält.*

§ 9.

Beziehung des zuletzt angegebenen Satzes zu den Kirchhoff'schen Untersuchungen.

Für die soeben im Satze (*F.*) besprochene ponderomotorische Arbeit hat KIRCHHOFF in seiner schon genannten Abhandlung[1]) einen viel complicirteren Ausdruck gegeben. KIRCHHOFF findet nämlich daselbst (Seite 142—144), dass diese Arbeit gleich

$$(K.) \qquad -dW$$

sei, wo W den Ausdruck vorstellt:

$$(L.)\ W = -\int_{\mathfrak{T}} D\tau \left\{ \frac{\Phi \Delta V}{4\pi} + \frac{1}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2\right] + G \right\},$$

die Integration ausgedehnt über alle Elemente $D\tau$ des *totalen* Raumes $\mathfrak{T}$.

Ich werde nun zeigen, dass dieses sehr complicirte Kirchhoff'sche Resultat (*K.*) *mit dem von mir erhaltenen Resultate* (*F.*) *identisch ist, nämlich darthun, dass der Ausdruck* W *von* $\frac{1}{2} P^{\mathfrak{ab}}$ *nur durch eine additive Constante sich unterscheidet.*

---

1) Dieselbe ist von mir bereits in der Einleitung citirt worden.

In der Formel (*L.*) hat G die Bedeutung:

$$G = -\tfrac{1}{2}\left(\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\beta\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\gamma\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right);$$

vergl. die Note auf Seite 142 der KIRCHHOFF'schen Abhandlung. Und zwar sind hier unter α, β, γ die magnetischen Momente speciell des Eisens $\mathfrak{a}$ zu verstehen; so dass also α, β, γ *ausserhalb* $\mathfrak{a}$ überall $= 0$ sind. Ferner ist das KIRCHHOFF'sche V identisch mit unserm $\Phi^{\mathfrak{b}}$:

$$V = \Phi^{\mathfrak{b}}.$$

Substituirt man diese Werthe von G und V in (*L.*), so folgt:

$$(M.)\quad W=-\frac{1}{4\pi}\int_{\mathfrak{T}}D\tau\,\Phi\Delta\Phi^{\mathfrak{b}}-\frac{1}{8\pi}\int_{\mathfrak{T}}D\tau\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\cdots\right]+\tfrac{1}{2}\int_{\mathfrak{a}}D\tau\left(\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\cdots\right),$$

wo das letzte Integral [weil α, β, γ ausserhalb $\mathfrak{a}$ verschwinden] nur allein über $\mathfrak{a}$ ausgedehnt ist.

Von KIRCHHOFF wird in seiner Abhandlung (Seite 141, 142) vorausgesetzt, dass der Stahlmagnet $\mathfrak{b}$ *allmählich* in die Luft übergeht. Hieraus folgt, dass nicht allein Φ und $\Phi^{\mathfrak{b}}$, sondern auch $\frac{\partial\Phi^{\mathfrak{b}}}{\partial x}, \frac{\partial\Phi^{\mathfrak{b}}}{\partial y}, \frac{\partial\Phi^{\mathfrak{b}}}{\partial z}$ im totalen Raume $\mathfrak{T}$ allenthalben stetig sind. In der bekannten selbstverständlichen Formel

$$\int_{\mathfrak{T}}D\tau\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Phi^{\mathfrak{b}}}{\partial x}+\cdots\right)=\int_{\mathfrak{T}}D\tau\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\Phi\frac{\partial\Phi^{\mathfrak{b}}}{\partial x}\right)+\cdots\right]-\int_{\mathfrak{T}}D\tau\,\Phi\Delta\Phi^{\mathfrak{b}}$$

ist daher das *erste* Integral rechter Hand $= 0$. Dies beachtend, substituiren wir den aus dieser Formel für das *zweite* Integral rechts entspringenden Werth in (*M.*), und erhalten hierdurch:

$$(N.)\quad W=\frac{1}{4\pi}\int_{\mathfrak{T}}D\tau\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Phi^{\mathfrak{b}}}{\partial x}+\cdots\right)-\frac{1}{8\pi}\int_{\mathfrak{T}}D\tau\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\cdots\right]$$
$$+\tfrac{1}{2}\int_{\mathfrak{a}}D\tau\left(\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\cdots\right).$$

Nun ist aber $\Phi = \Phi^{\mathfrak{a}} + \Phi^{\mathfrak{b}}$. Substituirt man diesen Werth von Φ in (*N.*), so folgt nach einfachen Reductionen:

Digitized by Google

$$(O.)\quad W=\frac{1}{8\pi}\int_{\mathfrak{T}}D\tau\left[\left(\frac{\partial\Phi^{\mathfrak{b}}}{\partial x}\right)^2+\cdots\right]-\frac{1}{8\pi}\int_{\mathfrak{T}}D\tau\left[\left(\frac{\partial\Phi^{\mathfrak{a}}}{\partial x}\right)^2+\cdots\right]$$
$$+\tfrac{1}{2}\left\{\int_{\mathfrak{a}}D\tau\left(\alpha\frac{\partial\Phi^{\mathfrak{b}}}{\partial x}+\cdots\right)+\int_{\mathfrak{a}}D\tau\left(\alpha\frac{\partial\Phi^{\mathfrak{a}}}{\partial x}+\cdots\right)\right\}.$$

Die beiden Integrale *erster* Zeile sind nach (7.) Seite 124, und die beiden Integrale *zweiter* Zeile nach (1.), (2.), Seite 122 sofort angebbar. In solcher Weise erhält man:

$$(P.)\qquad W=(P^{\mathfrak{b}}-P^{\mathfrak{a}})+\tfrac{1}{2}(P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}+2P^{\mathfrak{a}}),$$

oder, was dasselbe ist:

$$(Q.)\qquad W=\tfrac{1}{2}P^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}+P^{\mathfrak{b}}.$$

Nun ist aber $\mathfrak{b}$ ein invariabler Stahlmagnet, mithin $P^{\mathfrak{b}}$ eine *Constante*. Somit folgt:

$$(R.)\qquad dW=\tfrac{1}{2}dP^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}.\quad Q.\,e.\,d.$$

Durch (*Q.*) ist zugleich auch die in der Einleitung in (VI.) gemachte Behauptung bewiesen.

Inhaltsübersicht.

	Seite
Einleitung	82
Erster Theil: Zur Theorie der Elektrostatik	92
§ 1. Die ponderomotorische Arbeit	95
§ 2. Ueber die elektrostatischen Potentiale	96
§ 3. Resultate der Untersuchung	99
§ 4. Betrachtung eines speciellen Falles	103
Zweiter Theil: Zur Theorie des Magnetismus	104
§ 1. Die ponderomotorische Arbeit	105
§ 2. Das magnetische Punktpotential und das Inductionsgesetz	105
§ 3. Das magnetische Potential eines Körpers auf einen andern	109
§ 4. Verfolgung eines Weges, der dem früher in der Elektrostatik eingeschlagenem analog ist	113
§ 5. Resultate der Untersuchung	118
§ 6. Betrachtung eines speciellen Falles	121
§ 7. Beiläufige Formeln	122
§ 8. Ausdehnung der Untersuchung auf comprimirte resp. dilatirte Körper	124
§ 9. Beziehung eines hier gefundenen Satzes zu den KIRCHHOFF'schen Untersuchungen	127

Digitized by Google

W. Scheibner, *Ueber elliptische Doppelsummen.*

1.

In Art. 5 seiner inhaltsreichen Abhandlung über unendliche Doppelproducte und Doppelreihen [1]) beweist Eisenstein, dass für

$$(g, x) = \sum \frac{1}{(x+w)^g} , \qquad w = \alpha m + \beta n ,$$

wo m und n alle positiven und negativen ganzen Zahlen durchlaufen, während bei $(g^*, x) = \sum^*$ die Combination $m = n = 0$ wegfallen soll:

$$(3,x)^2 =$$
$$\{(2,x)-(2^*,0)\}^3-15(4^*,0)\{(2,x)-(2^*,0)\}+10\{c-(2^*,0)(4^*,0)\}$$
$$=\{(2,x)-(2,\tfrac{\alpha}{2})\}\{(2,x)-(2,\tfrac{\beta}{2})\}\{(2,x)-(2,\tfrac{\alpha+\beta}{2})\}.$$

Auf die Function

$$\left(\frac{d}{du}\right)^2 \log \vartheta_i(u,q) = \eta_i(u)$$

übertragen ergibt sich sogleich [2])

$$\eta_i'(u) = \sum_{pp'} \frac{2}{(u+\omega_i)^3} ,$$

wo die vier coordinirten Functionen den Werthen

$$\omega = p\pi + (p' + \tfrac{1}{2})hi , \qquad \omega_1 = p\pi + p'hi ,$$
$$\omega_2 = (p + \tfrac{1}{2})\pi + p'hi , \qquad \omega_3 = (p + \tfrac{1}{2})\pi + (p' + \tfrac{1}{2})hi$$

---

1) Crelle's Journal Bd. 35, S. 221 ff. (263 ff.) 1847.

2) Berichte der K. Sächs. Gesellschaft d. Wiss., Jahrgang 1869, S. 95—100.

Digitized by Google

entsprechen. Hier ist $q = e^{-h}$ gesetzt und die imaginäre Einheit nicht mit dem Index i zu verwechseln. Mithin wird auch

$$\vartheta_i^4(u) \sum' \frac{2}{(u+\omega_i)^3} = (-1)^{i-1} \vartheta_1'^3 \vartheta_1(2u) .$$

2.

Durch Integration erhält man

$$\eta_i u = c - \sum' \frac{1}{(u+\omega_i)^2} .$$

Die hier eingeführte Integrationsconstante c kann ganz beliebige Werthe annehmen[1]), weil die Doppelsumme $\sum' \frac{1}{(u+\omega_i)^2}$ nur *bedingt* convergirt, ihr Werth also von der Anordnung der Glieder, bez. von der Reihenfolge der beiden Summationen abhängt.

Für $u = 0$ wird

$$\eta_i(0) = c - \sum' \frac{1}{\omega_i^2} ,$$

mithin

$$\eta_i(u) = \eta_i(0) - \sum' \left\{ \frac{1}{(u+\omega_i)^2} - \frac{1}{\omega_i^2} \right\}$$

$$= \eta_i(0) - u^2 \sum' \frac{3}{\omega_i^4} - u^4 \sum' \frac{5}{\omega_i^6} - u^6 \sum' \frac{7}{\omega_i^8} \cdots$$

Für $i = 1$ erhält diese Reihenentwickelung unendliche Coefficienten, man hat desshalb das für $p = p' = 0$ entspringende Mittelglied abzusondern, wodurch

$$\eta_1 u = c - \frac{1}{u^2} - \sum^* \frac{1}{(u+\omega_1)^2}$$

$$= \left(c - \sum^* \frac{1}{\omega_1^2}\right) - \frac{1}{u^2} - u^2 \sum^* \frac{3}{\omega_1^4} - u^4 \sum^* \frac{5}{\omega_1^6} - u^6 \sum^* \frac{7}{\omega_1^8} \cdots$$

Hier ist

$$c - \sum^* \frac{1}{\omega_1^2} = \lim_{u=0} \left(\eta_1 u + \frac{1}{u^2}\right) = \frac{1}{3} \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} ,$$

---

1) Riemann, Habilitationsschrift, 1854.

Digitized by Google

während identisch

$$3\overset{*}{\sum}\frac{1}{\omega_1^2}=\sum\left(\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega_2^2}+\frac{1}{\omega_3^2}\right).$$

Durch Vergleichung der Coefficienten mit den bekannten Potenzreihen für die Etafunctionen [1]) ergeben sich die Werthe der unbedingt convergirenden Summen

$$\sum\frac{3}{\omega^4}=\vartheta_2^4\vartheta_3^4\ , \qquad \sum\frac{5}{\omega^6}=-\tfrac{1}{3}\vartheta_2^4\vartheta_3^4(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4),\ \ldots$$

$$\overset{*}{\sum}\frac{3}{\omega_1^4}=\tfrac{1}{15}(\vartheta_3^8-\vartheta^4\vartheta_2^4) \qquad \overset{*}{\sum}\frac{5}{\omega_1^6}=\tfrac{1}{189}(\vartheta^4-\vartheta_2^4)(2\vartheta_3^8+\vartheta^4\vartheta_2^4)$$

$$=\tfrac{1}{20}g_2\ , \qquad =\tfrac{1}{28}g_3\ ,\ \ldots$$

$$\sum\frac{3}{\omega_2^4}=\vartheta^4\vartheta_3^4\ , \qquad \sum\frac{5}{\omega_2^6}=\tfrac{1}{3}\vartheta^4\vartheta_3^4(\vartheta^4+\vartheta_3^4)\ ,\ \ldots$$

$$\sum\frac{3}{\omega_3^4}=-\vartheta^4\vartheta_2^4\ , \qquad \sum\frac{5}{\omega_3^6}=\tfrac{1}{3}\vartheta^4\vartheta_2^4(\vartheta^4-\vartheta_2^4)\ ,\ \ldots\ .$$

3.

Um die bedingt convergirenden Summen $\sum\frac{1}{\omega_i^2}$ zu finden, muss eine bestimmte Reihenfolge der Glieder festgesetzt werden. Wir gehen hierzu von der bekannten Formel aus:

$$\overset{\mathscr{C}}{\sum_{-x}}\frac{1}{(x+p\pi)^2}=\frac{1}{\sin^2 x} \quad \text{oder} \quad \sum\frac{1}{(x+(p+\tfrac{1}{2})\pi)^2}=\frac{1}{\cos^2 x}\ .$$

Für $x=p'hi$ resp. $x=(p'+\frac{1}{2})hi$ erhält man

$$\sum\frac{1}{\omega^2}=\sum\frac{1}{\sin^2(p'+\frac{1}{2})hi}, \qquad \sum\frac{1}{\omega_2^2}=\sum\frac{1}{\cos^2 p'hi}\ ,$$

$$\sum\frac{1}{\omega_3^2}=\sum\frac{1}{\cos^2(p'+\frac{1}{2})hi}\ ,$$

oder für $q=e^{-h}$:

---

1) Berichte a. a. O. S. 100.

Digitized by Google

$$\sum' \frac{1}{\omega^2} = -4 \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{q^{2p+1}}{(1-q^{2p+1})^2} = -\frac{\vartheta''}{\vartheta} ,$$

$$\sum' \frac{1}{\omega_2^2} = \quad 4 \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{q^{2p}}{(1+q^{2p})^2} \quad = -\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} ,$$

$$\sum' \frac{1}{\omega_3^2} = \quad 4 \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{q^{2p+1}}{(1+q^{2p+1})^2} = -\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} ,$$

folglich auch[1])

$$\sum^{*}{}' \frac{1}{\omega_1^2} = \frac{1}{3} - 4 \sum^{*}{}' \frac{q^{2p}}{(1-q^{2p})^2} = -\frac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} .$$

Hieraus geht hervor, dass für die getroffene Anordnung der Summation die Constante $c = 0$ zu setzen ist. Es gilt mithin die Gleichung

$$\eta_i u = -\sum_{pp'}{}' \frac{1}{(u+\omega_i)^2}$$

unter der Voraussetzung, dass zuerst in Bezug auf p und dann in Bezug auf p' summirt werde. Eine Vertauschung der Summationsordnung liefert einen abweichenden Werth.

In der That hat man identisch für $u' = \frac{u\pi i}{h}$, $h' = \frac{\pi^2}{h}$:

$$\frac{1}{u+p\pi+p'hi} = \frac{\pi i}{h}\,\frac{1}{u'-p'\pi+ph'i} ,$$

folglich für $\omega' = p'\pi + (p+\frac{1}{2})h'i$, $\omega_1' = p'\pi + ph'i$, u. s. w.

$$\sum_{pp'}{}' \frac{h}{(u+\omega)^2} = -\sum_{pp'}{}' \frac{h'}{(u'+\omega_2')^2}, \quad \sum_{pp'}{}' \frac{h}{(u+\omega_4)^2} = -\sum_{pp'}{}' \frac{h'}{(u'+\omega_1')^2} ,$$

$$\sum_{pp'}{}' \frac{h}{(u+\omega_2)^2} = -\sum_{pp'}{}' \frac{h'}{(u'+\omega')^2}, \quad \sum_{pp'}{}' \frac{h}{(u+\omega_3)^2} = -\sum_{pp'}{}' \frac{h'}{(u'+\omega_3')^2} .$$

Kehrt man in diesen Gleichungen die Summationsordnung um, so erhält man

---

1) S. 454 meiner Abhandlung *über die Reduction elliptischer Integrale*, 1879.

Digitized by Google

$$\sum_{p'p}\frac{h}{(u+\omega)^2}=h'\eta_2(u',q')\ ,\quad \sum_{p'p}\frac{h}{(u+\omega_1)^2}=h'\eta_1(u',q')\ ,$$

$$\sum_{p'p}\frac{h}{(u+\omega_2)^2}=h'\eta(u',q')\ ,\quad \sum_{p'p}\frac{h}{(u+\omega_3)^2}=h'\eta_3(u',q')\ ,$$

und daraus nach einem bekannten Satze[1])

$$\sum_{p'p}\frac{1}{(u+\omega_i)^2}=-\frac{2}{h}-\eta_i(u)\ \text{ oder }\ \eta_i(u)=-\frac{2}{h}-\sum_{p'p}\frac{1}{(u+\omega_i)^2}\ .$$

Folglich erhält die Constante c den Werth $c=-\frac{2}{h}$, sobald in der Doppelsumme die Summation zuerst in Bezug auf p' und dann in Bezug auf p ausgeführt wird[2]).

Durch Ausführung *einer* Summation ergibt sich

$$\eta\,u=-\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sin^2(u+(p'+\frac{1}{2})hi)}=-\frac{2}{h}+\frac{\pi^2}{h^2}\sum\frac{1}{\cos^2(u'+ph'i)}\ ,$$

$$\eta_1 u=-\sum\frac{1}{\sin^2(u+p'hi)}=-\frac{2}{h}+\frac{\pi^2}{h^2}\sum'\frac{1}{\sin^2(u'+ph'i)}\ ,$$

$$\eta_2 u=-\sum\frac{1}{\cos^2(u+p'hi)}=-\frac{2}{h}+\frac{\pi^2}{h^2}\sum\frac{1}{\sin^2(u'+(p+\frac{1}{2})h'i)}\ ,$$

$$\eta_3 u=-\sum\frac{1}{\cos^2(u+(p'+\frac{1}{2})hi)}=-\frac{2}{h}+\frac{\pi^2}{h^2}\sum\frac{1}{\cos^2(u'+(p+\frac{1}{2})h'i)}$$

und diese Ausdrücke sind nur formell von den a. a. O. S. 154 enthaltenen verschieden.

---

1) Berichte 1889, S. 104.

2) Allgemeiner beweist Eisenstein (a. a. O. S. 183), dass der Werth $c=-\frac{2\nu i}{\lambda\pi+\nu hi}$ sich ergibt, wenn $p=\lambda\varpi+\mu\varpi'$, $p'=\nu\varpi+\varrho\varpi'$, $\lambda\varrho-\mu\nu=\pm 1$ gesetzt und die Summation zuerst in Bezug auf ϖ und dann in Bezug auf ϖ' bewirkt wird. Uebrigens scheint Cayley der Erste gewesen zu sein, der in seiner Abhandlung »*Sur les fonctions doublement périodiques*«, Liouville's Journal X, S. 385 (1845) verschiedene Summationsgesetze bei den elliptischen Doppelsummen näher untersucht hat.

Digitized by Google

4.

Für die Integrale der zweiten Gattung erhält man durch Integration

$$\frac{\vartheta_i' u}{\vartheta_i u} = \int_0^u \eta_i u \, du = u\, \eta_i(0) + \sum \left\{ \frac{1}{u+\omega_i} - \frac{1}{\omega_i} + \frac{u}{\omega_i^2} \right\}$$

$$= \frac{\vartheta_i''}{\vartheta_i}\, u - u^3 \sum \frac{1}{\omega_i^4} - u^5 \sum \frac{1}{\omega_i^6} \cdots ,$$

während für $i = 1$

$$\frac{\vartheta_1' u}{\vartheta_1 u} = \frac{1}{u} + \tfrac{1}{3} \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}\, u + \sum^{*} \left\{ \frac{1}{u+\omega_1} - \frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_1^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{u} + \tfrac{1}{3} \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}\, u - u^3 \sum^{*} \frac{1}{\omega_1^4} - u^5 \sum^{*} \frac{1}{\omega_1^6} \cdots$$

Es ist von Interesse, auch die Werthe der bedingt convergirenden Summen $\sum \frac{1}{u+\omega_i}$ resp. $\sum \frac{1}{\omega_i}$ zu untersuchen. Die Gleichung

$$\lim_{n=\infty} \sum_{-n}^{n} \frac{1}{p\pi + x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \quad \text{oder} \quad \lim \sum \frac{1}{(p+\frac{1}{2})\pi - x} = \operatorname{tg} x$$

liefert für $\pm x = u + phi$ resp. $= u + (p' + \frac{1}{2})hi$ bei der vorgeschriebenen Summation nach p

$$\sum_{pp'} \frac{1}{u+\omega} = \lim \sum \frac{1}{\operatorname{tg}(u+(p'+\frac{1}{2})hi)} ,$$

$$\sum_{pp'}' \frac{1}{u+\omega_1} = \lim \sum \frac{1}{\operatorname{tg}(u+p'hi)} ,$$

$$\sum_{pp'} \frac{1}{u+\omega_2} = -\lim \sum \operatorname{tg}(u+p'hi) ,$$

$$\sum_{pp'} \frac{1}{u+\omega_3} = -\lim \sum \operatorname{tg}(u+(p'+\tfrac{1}{2})hi) .$$

Digitized by Google

Auch diese Ausdrücke sind nur formell verschieden von den in meiner Abhandlung S. 147 angeführten Entwickelungen für $\frac{\vartheta_i' u}{\vartheta_i u}$, so dass allgemein

$$\frac{\vartheta_i' u}{\vartheta_i u} = \sum_{p\,p'} \frac{1}{u+\omega_i} ,$$

wenn zuerst in Bezug auf p, dann in Bezug auf p' summirt wird. Bei Umkehr der Summationsordnung ergibt sich durch Buchstabenvertauschung

$$\sum_{p'\,p} \frac{1}{u+\omega_i} = \frac{\pi i}{h} \frac{\vartheta_i'(u', q')}{\vartheta_i(u', q')} = \frac{2u}{h} + \frac{\vartheta_i' u}{\vartheta_i u} .$$

Man sieht zugleich, dass $\sum \frac{1}{\omega_i}$ resp. $\overset{*}{\sum} \frac{1}{\omega_i} = \lim_{u=0} \left(\frac{\vartheta_i'}{\vartheta_i u} - \frac{1}{u} \right)$ verschwinden, einerlei ob man zuerst in Bezug auf p oder auf p' summirt. Dagegen würden abweichende Resultate hervorgehen, wenn man für die Reihenfolge der Glieder bei der doppelten Summation andere Gesetze zu Grunde legen wollte.

Ueber die Periodicität der Summen $\sum \frac{1}{u+\omega_i}$ ist zu bemerken, dass $\sum_{p\,p'} \frac{1}{u+\omega_i}$ bei der ersten Summation in Bezug auf p die Periode π, dagegen $\sum_{p'\,p} \frac{1}{u+\omega_i}$ bei der ersten Summation in Bezug auf p' die Periode $h\,i$ besitzt. Es würde aber unrichtig sein, wenn man daraus auf die Coexistenz beider Perioden, also auf die doppelte Periodicität wie bei $\sum \frac{1}{(u+\omega_i)^2} = c - \eta_i u$ schliessen wollte. Vielmehr ist

$$\frac{\vartheta_i'(u+h\,i)}{\vartheta_i(u+h\,i)} = \frac{\vartheta_i' u}{\vartheta_i u} - 2i ,$$

wo die doppelte Bedeutung von i keinen Anstoss erregen wird. Dieses Beispiel mag zeigen, wie vorsichtig man bei der Benutzung bedingt convergirender Ausdrücke verfahren muss.

Digitized by Google

5.

Wir wollen jetzt die leicht beweisliche Fourier'sche Entwickelung[1])

$$\frac{\vartheta_3' u}{\vartheta_3 u} = 4 \sum_1^{\infty}{}' (-1)^n \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin 2nu$$

$$= -\frac{2u}{h} + \frac{4\pi i}{h} \sum_1^{\infty}{}' (-1)^n \frac{q'^n}{1-q'^{2n}} \sin 2nu'$$

für einen complexen Werth des Arguments $u = v + v'i$ betrachten. Dann wird

$$\frac{\vartheta_3' u}{\vartheta_3 u} = \frac{2}{i} \sum^{*}{}' (-1)^n \frac{q^n}{1-q^{2n}} e^{-2nv' + 2nvi}$$

$$= -2\frac{v+v'i}{h} + \frac{2\pi}{h} \sum^{*}{}' (-1)^n \frac{q'^n}{1-q'^{2n}} e^{-2n\frac{\pi}{h}v - 2n\frac{\pi}{h}v'i},$$

wo $\sum^{*}{}'$ die Summation über alle positiven und negativen Zahlen mit Ausschluss der Null bezeichnet. Die erste Summe convergirt für $-\frac{h}{2} < v' < \frac{h}{2}$, die zweite für $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$.

Da $\frac{\vartheta_3' u}{\vartheta_3 u}$ die Periode π, dagegen $\frac{\vartheta_3' u}{\vartheta_3 u} + \frac{2u}{h}$ die Periode hi besitzt, so kann man sich die Aufgabe stellen, nach den gewöhnlichen Regeln der trigonometrischen Reihen, *innerhalb* der bezeichneten Intervalle den Ausdruck

$$-2\frac{v+v'i}{h} + \frac{2\pi}{h} \sum^{*}{}' (-1)^p \frac{q'^p}{1-q'^{2p}} e^{-2p\frac{\pi}{h}v - 2p\frac{\pi}{h}v'i}$$

für $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$ nach den Potenzen von e^{2vi}, dagegen den Ausdruck

$$2\frac{v+v'i}{h} + \frac{2}{i} \sum^{*}{}' (-1)^{p'} \frac{q^{p'}}{1-q^{2p'}} e^{-2p'v' + 2p'vi}$$

für $-\frac{h}{2} < v' < \frac{h}{2}$ nach den Potenzen von $e^{2\frac{\pi}{h}v'i}$ zu entwickeln.

---

1) Abh. S. 147.

Digitized by Google

Nun erhält man wegen

$$v = \sum_{p'} e^{2p'vi} \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} v e^{-2p'vi}\, dv = \sum_{p'}^{*} (-1)^{p'} \frac{i}{2p'} e^{2p'vi} ,$$

$$e^{-2p\frac{\pi}{h}v} = \sum_{p'} e^{2p'vi} \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-2p\frac{\pi}{h}v - 2p'vi}\, dv$$

$$= \frac{h}{2\pi} \frac{1-q'^{2p}}{q'^{p}} \sum_{p'} \frac{(-1)^{p'}}{p\pi + p'hi} e^{2p'vi} ,$$

und ebenso

$$v' = \sum_{p'} e^{2p\frac{\pi}{h}vi} \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} v' e^{-2p\frac{\pi}{h}v'i}\, dv' = \frac{hi}{2\pi} \sum_{p}^{*} \frac{(-1)^{p}}{p} e^{2p\frac{\pi}{h}v'i} ,$$

$$e^{-2p'v'} = \sum_{p} e^{-2p\frac{\pi}{h}v'i} \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} e^{-2p'v' + 2p\frac{\pi}{h}v'i}\, dv'$$

$$= \frac{i}{2} \frac{1-q^{2p'}}{q^{p'}} \sum_{p} \frac{(-1)^{p}}{p\pi + p'hi} e^{-2p\frac{\pi}{h}v'i} ,$$

innerhalb des Intervalles $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\vartheta_3' u}{\vartheta_3 u} = -\frac{2}{h} v'i + \sum_{p'p}^{*} \frac{(-1)^{p+p'}}{p\pi + p'hi} e^{2\left(p'v - p\frac{\pi}{h}v'\right)i} ,$$

dagegen innerhalb des Intervalles $-\frac{h}{2} < v' < \frac{h}{2}$:

$$\frac{\vartheta_3' u}{\vartheta_3 u} + \frac{2u}{h} = \frac{2}{h} v + \sum_{pp'}^{*} \frac{(-1)^{p+p'}}{p\pi + p'hi} e^{2\left(p'v - p\frac{\pi}{h}v'\right)i} .$$

Man schliesst daraus, dass die Doppelsumme

$$\sum_{pp'}^{*} \frac{(-1)^{p+p'}}{\omega_1} e^{2\left(p'v - p\frac{\pi}{h}v'\right)i} = \frac{\vartheta_3' u}{\vartheta_3 u} + \frac{2}{h} v'i$$

Digitized by Google

eine doppeltperiodische Function darstellt, welche ihren Werth nicht ändert, mag man zuerst in Bezug auf p oder auf p' summiren. Dabei können die Variabeln v und v' alle reellen, mithin u beliebige complexe Werthe durchlaufen, nur geht für $u = (m+\frac{1}{2})\pi + (m'+\frac{1}{2})hi$ der Quotient $\frac{\vartheta_3' u}{\vartheta_3 u}$ durch Unendlich hindurch, während nach dem Früheren die Doppelsumme $\sum\limits^{*}_{p\,p'} \frac{1}{p\pi + p'hi} = \sum\limits^{*}_{p\,p'} \frac{1}{\omega_1}$ verschwindet. Man hat diesen Werth als das arithmetische Mittel aus $\pm\infty$ anzusehen.

Aendert man v um $\frac{\pi}{2}$, so ergibt sich

$$\sum^{*}_{p\,p'} \frac{(-1)^p}{\omega_1} e^{2\left(p'v - p\frac{\pi}{h}v'\right)i} = \frac{\vartheta' u}{\vartheta u} + \frac{2}{h} v'i \ .$$

Aendert man dagegen v' um $\frac{1}{2}h$, so folgt

$$\sum^{*}_{p\,p'} \frac{(-1)^{p'}}{\omega_1} e^{2\left(p'v - p\frac{\pi}{h}v'\right)i} = \frac{\vartheta_2' u}{\vartheta_2 u} + \frac{2}{h} v'i \ ,$$

nebst

$$\sum^{*}_{p\,p'} \frac{1}{\omega_1} e^{2\left(p'v - p\frac{\pi}{h}v'\right)i} = \frac{\vartheta_1' u}{\vartheta_1 u} + \frac{2}{h} v'i \ .$$

6.

Die auf S. 148/49 der Abhandlung enthaltenen Formeln würde man in ähnlicher Weise behandeln und die entsprechenden Doppelreihen für die zwölf Quotienten der Thetafunctionen ableiten können. Indessen sind alle diese Formeln nur specielle Fälle allgemeinerer Entwickelungen, welche aus den in der Abhandlung S. 158 ff. gegebenen Ausdrücken hervorgehen.

Dort findet sich die Gleichung bewiesen

$$\frac{\vartheta_1' \vartheta_1 (u+u_1)}{\vartheta_1 u \, \vartheta_1 u_1} = -2i \sum^{z}_{-z} \frac{e^{2nu_1 i}}{1 - q^{2n} e^{2ui}} \ ,$$

Digitized by Google

welche zu ihrer Gültigkeit erfordert, dass der Coefficient des imaginären Theils von u_1 zwischen 0 und h enthalten sei. Da nun

$$\vartheta_1 u = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\pi}{h}}\, e^{-\frac{u^2}{h}}\, \vartheta_1(u', q') \;,$$

so folgt auch

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_1(u+u_1)}{\vartheta_1 u\,\vartheta_1 u_1} = \frac{\pi i}{h}\, e^{-\frac{2uu_1}{h}}\, \frac{\vartheta_1'(q')\,\vartheta_1(u'+u_1', q')}{\vartheta_1(u', q')\,\vartheta_1(u_1', q')}$$

$$= \frac{2\pi}{h}\, e^{-\frac{2uu_1}{h}} \sum \frac{e^{2nu_1' i}}{1-q'^{2n}e^{2u'i}} \;,$$

wenn der imaginäre Theil von $u_1' = \frac{u_1 \pi i}{h}$ zwischen 0 und h', also der reelle Theil von u_1 zwischen 0 und π liegt.

Schreibt man $u_1 = v + v'i$, so wird hiernach für $0 < v' < h$ resp. $0 < v < \pi$:

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_1(u+u_1)}{\vartheta_1 u\,\vartheta_1 u_1}\, e^{\frac{2uv'i}{h}} = \frac{2}{i}\, e^{\frac{2uv'i}{h}} \sum_{p'} \frac{e^{2p'vi - 2p'v'}}{1-q^{2p'}e^{2ui}}$$

$$= \frac{2\pi}{h}\, e^{-\frac{2uv}{h}} \sum_{p} \frac{e^{-2p\frac{\pi}{h}v - 2p\frac{\pi}{h}v'i}}{1-q'^{2p}e^{-2\frac{\pi}{h}u}} \;.$$

Die Entwickelung nach dem FOURIER'schen Satze liefert innerhalb der betreffenden Intervalle

$$\frac{2}{i}\cdot\frac{e^{\frac{2uv'i}{h} - 2p'v'}}{1-q^{2p'}e^{2ui}} = \sum_{p} \frac{e^{-2p\frac{\pi}{h}v'i}}{u+p\pi+p'hi} \;,$$

nebst

$$\frac{2\pi}{h}\cdot\frac{e^{-\frac{2uv}{h} - 2p\frac{\pi}{h}v}}{1-q'^{2p}e^{-2\frac{\pi}{h}u}} = \sum_{p'} \frac{e^{2p'vi}}{u+p\pi+p'hi} \;,$$

Digitized by Google

folglich

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_1(u+u_1)}{\vartheta_1 u\,\vartheta_1 u_1}e^{\frac{2uv'i}{h}} = \sum_{pp'}\frac{1}{u+\omega_1}e^{2\left(p'v-p\frac{\pi}{h}v'\right)i} \quad .\ ^{1})$$

In dieser Gleichung darf nicht allein die Summationsordnung umgekehrt werden, sondern es dürfen auch die Variabeln u und u_1 beliebige complexe Werthe annehmen. Streng genommen wäre noch zu untersuchen, in wie weit die Ausdrücke

$$\sum\frac{e^{-2p\frac{\pi}{h}v'i}}{u+\omega_1} \quad \text{und} \quad \sum\frac{e^{2p'vi}}{u+\omega_1}$$

eine Umkehr der Summationsordnung gestatten, weil die Werthe $v=0$ und resp. $v'=0$ an der Grenze der früheren Gültigkeitsintervalle gelegen sind. In der That wird für $u_1 = m\pi + m'hi$ die linke Seite unendlich, während nach dem Früheren die Doppelsumme den zwiefältigen Werth annimmt

$$\sum_{pp'}\frac{1}{u+\omega_1} = \frac{\vartheta_1' u}{\vartheta_1 u} \quad \text{und} \quad \sum_{p'p}\frac{1}{u+\omega_1} = \frac{\vartheta_1' u}{\vartheta_1 u} + \frac{2u}{h} \ .$$

Es findet dieser Umstand seine Erklärung darin, dass das arithmetische Mittel

$$\lim_{u_1=0}\tfrac{1}{2}\left\{\frac{\vartheta_1'\vartheta_1(u+u_1)}{\vartheta_1 u\,\vartheta_1 u_1}e^{\frac{2uv'i}{h}} + \frac{\vartheta_1'\vartheta_1(u-u_1)}{\vartheta_1 u\,\vartheta_1(-u_1)}e^{-\frac{2uv'i}{h}}\right\}$$

zwei verschiedene Grenzwerthe besitzt, je nachdem man zuerst v' und dann v, oder umgekehrt zuerst v und dann v' verschwinden lässt. Bei der eintretenden Unterbrechung der Stetigkeit wird die Convergenz der Summen in unmittelbarer Nähe unendlich gering, eine Eigenschaft, welche man bekanntlich mit dem Namen der ungleichmässigen Convergenz zu bezeichnen pflegt.

---

1) Die obige Gleichung ist von Herrn Kronecker im Sitzungsberichte der Berliner Akademie vom 6. Febr. 1890 abgeleitet und gezeigt worden, dass der Werth der Doppelsumme auch durch Einführung von ϖ und ϖ' an Stelle von p und p' (siehe oben die Anmerkung zu Art. 3) ungeändert bleibt.

Digitized by Google

7.

Aendert man v' um $\frac{1}{2}h$, so wird

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta(u+u_1)}{\vartheta_1 u\,\vartheta u_1}e^{\frac{2uv'i}{h}}=\sum_{pp'}{}'\frac{(-1)^p}{u+\omega_1}e^{2\left(p'v-p\frac{\pi}{h}v'\right)i},$$

ändert man dagegen v um $\frac{1}{2}\pi$, so folgt

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_2(u+u_1)}{\vartheta_1 u\,\vartheta_2 u_1}e^{\frac{2uv'i}{h}}=\sum_{pp'}{}'\frac{(-1)^{p'}}{u+\omega_1}e^{2\left(p'v-p\frac{\pi}{h}v'\right)i},$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_3(u+u_1)}{\vartheta_1 u\,\vartheta_3 u_1}e^{\frac{2uv'i}{h}}=\sum_{pp'}{}'\frac{(-1)^{p+p'}}{u+\omega_1}e^{2\left(p'v-p\frac{\pi}{h}v'\right)i}.$$

Lässt man in den gefundenen vier Gleichungen u zu Null abnehmen, so erhält man die Art. 5 abgeleiteten Werthe für $\frac{\vartheta_i'u}{\vartheta_i u}+\frac{2}{h}v'i$.

Weitere Formeln gehen hervor, wenn u um $\frac{\pi}{2}$ resp. $\frac{hi}{2}$ wächst. Damit wird

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_2(u+u_1)}{\vartheta_2 u\,\vartheta_1 u_1}e^{\frac{2uv'i}{h}}=\sum{}'\frac{1}{u+\omega_2}e^{2\left(p'v-(p+\frac{1}{2})\frac{\pi}{h}v'\right)i},$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_3(u+u_1)}{\vartheta_2 u\,\vartheta u_1}e^{\frac{2uv'i}{h}}=\sum{}'\frac{(-1)^p}{u+\omega_2}e^{2\left(p'v-\overline{p+\frac{1}{2}}\frac{\pi}{h}v'\right)i},$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_4(u+u_1)}{\vartheta_2 u\,\vartheta_2 u_1}e^{\frac{2uv'i}{h}}=\sum{}'\frac{(-1)^{p'+1}}{u+\omega_2}e^{2\left(p'v-\overline{p+\frac{1}{2}}\frac{\pi}{h}v'\right)i},$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta(u+u_1)}{\vartheta_2 u\,\vartheta_3 u_1}e^{\frac{2uv'i}{h}}=\sum{}'\frac{(-1)^{p+p'}}{u+\omega_2}e^{2\left(p'v-\overline{p+\frac{1}{2}}\frac{\pi}{h}v'\right)i};$$

ferner

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta(u+u_1)}{\vartheta u\,\vartheta_1 u_1}e^{\frac{2uv'i}{h}}=\sum{}'\frac{1}{u+\omega}e^{2\left(\overline{p'+\frac{1}{2}}v-p\frac{\pi}{h}v'\right)i},$$

Digitized by Google

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_4(u+u_1)}{\vartheta u\,\vartheta u_1}e^{\frac{2uv'i}{h}} = \sum'\frac{(-1)^p}{u+\omega}e^{2\left(\overline{p'+\frac{1}{2}}v-p\frac{\pi}{h}v'\right)i},$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_3(u+u_1)}{\vartheta u\,\vartheta_2 u_1}e^{\frac{2uv'i}{h}} = i\sum'\frac{(-1)^{p'}}{u+\omega}e^{2\left(\overline{p'+\frac{1}{2}}v-p\frac{\pi}{h}v'\right)i},$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_2(u+u_1)}{\vartheta u\,\vartheta_3 u_1}e^{\frac{2uv'i}{h}} = i\sum'\frac{(-1)^{p+p'}}{u+\omega}e^{2\left(\overline{p'+\frac{1}{2}}v-p\frac{\pi}{h}v'\right)i};$$

endlich

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_3(u+u_1)}{\vartheta_3 u\,\vartheta_4 u_1}e^{\frac{2uv'i}{h}} = \sum'\frac{1}{u+\omega_3}e^{2\left(\overline{p'+\frac{1}{2}}v-\overline{p+\frac{1}{2}}\frac{\pi}{h}v'\right)i},$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_2(u+u_1)}{\vartheta_3 u\,\vartheta u_1}e^{\frac{2uv'i}{h}} = \sum'\frac{(-1)^p}{u+\omega_3}e^{2\left(p'+\frac{1}{2}v-\overline{p+\frac{1}{2}}\frac{\pi}{h}v'\right)i},$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta(u+u_1)}{\vartheta_3 u\,\vartheta_2 u_1}e^{\frac{2uv'i}{h}} = i\sum'\frac{(-1)^{p'}}{u+\omega_3}e^{2\left(\overline{p'+\frac{1}{2}}v-\overline{p+\frac{1}{2}}\frac{\pi}{h}v'\right)i},$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_1(u+u_1)}{\vartheta_3 u\,\vartheta_3 u_1}e^{\frac{2uv'i}{h}} = \frac{1}{i}\sum'\frac{(-1)^{p+p'}}{u+\omega_3}e^{2\left(\overline{p'+\frac{1}{2}}v-\overline{p+\frac{1}{2}}\frac{\pi}{h}v'\right)i},$$

8.

Setzt man in diesen Gleichungen u resp. $u_1 = 0$, so ergeben sich die entsprechenden Ausdrücke für die zwölf Quotienten der Thetafunctionen, welche hier noch Platz finden mögen:

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_2 u}{\vartheta_2\vartheta_1 u} = \sum'\frac{1}{\omega_2}e^{2\left(p'v-\overline{p+\frac{1}{2}}\frac{\pi}{h}v'\right)i} = \sum'\frac{(-1)^{p'}}{u+\omega_1},$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_3 u}{\vartheta_2\vartheta u} = \sum'\frac{(-1)^p}{\omega_2}e^{2\left(p'v-\overline{p+\frac{1}{2}}\frac{\pi}{h}v'\right)i} = i\sum'\frac{(-1)^{p'}}{u+\omega},$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_4 u}{\vartheta_2\vartheta_3 u} = \sum'\frac{(-1)^{p'+1}}{\omega_2}e^{2\left(p'v-\overline{p+\frac{1}{2}}\frac{\pi}{h}v'\right)i} = \sum'\frac{(-1)^{p'+1}}{u+\omega_2},$$

Digitized by Google

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta u}{\vartheta_2\vartheta_3 u} = \sum' \frac{(-1)^{p+p'}}{\omega_2} e^{2\left(p'v - \overline{p+\frac{1}{2}}\frac{\pi}{h}v'\right)i} = i\sum' \frac{(-1)^{p'}}{u+\omega_3};$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta u}{\vartheta\vartheta_1 u} = \sum' \frac{1}{\omega} e^{2\left(\overline{p'+\frac{1}{2}}v - p\frac{\pi}{h}v'\right)i} = \sum' \frac{(-1)^{p}}{u+\omega_1},$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_1 u}{\vartheta\vartheta u} = \sum' \frac{(-1)^{p}}{\omega} e^{2\left(p'+\frac{1}{2}v - p\frac{\pi}{h}v'\right)i} = \sum' \frac{(-1)^{p}}{u+\omega},$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_3 u}{\vartheta\vartheta_2 u} = i\sum' \frac{(-1)^{p'}}{\omega} e^{2\left(\overline{p'+\frac{1}{2}}v - p\frac{\pi}{h}v'\right)i} = \sum' \frac{(-1)^{p}}{u+\omega_2},$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_2 u}{\vartheta\vartheta_3 u} = i\sum' \frac{(-1)^{p+p'}}{\omega} e^{2\left(\overline{p'+\frac{1}{2}}v - p\frac{\pi}{h}v'\right)i} = \sum' \frac{(-1)^{p}}{u+\omega_3};$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_3 u}{\vartheta_3\vartheta_1 u} = \sum' \frac{1}{\omega_3} e^{2\left(\overline{p'+\frac{1}{2}}v - \overline{p+\frac{1}{2}}\frac{\pi}{h}v'\right)i} = \sum' \frac{(-1)^{p+p'}}{u+\omega_1},$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_2 u}{\vartheta_3\vartheta u} = \sum' \frac{(-1)^{p}}{\omega_3} e^{2\left(\overline{p'+\frac{1}{2}}v - \overline{p+\frac{1}{2}}\frac{\pi}{h}v'\right)i} = i\sum' \frac{(-1)^{p+p'}}{u+\omega},$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta u}{\vartheta_3\vartheta_2 u} = i\sum' \frac{(-1)^{p'}}{\omega_3} e^{2\left(\overline{p'+\frac{1}{2}}v - \overline{p+\frac{1}{2}}\frac{\pi}{h}v'\right)i} = \sum' \frac{(-1)^{p+p'}}{u+\omega_2},$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_1 u}{\vartheta_3\vartheta_3 u} = \frac{1}{i}\sum' \frac{(-1)^{p+p'}}{\omega_3} e^{2\left(\overline{p'+\frac{1}{2}}v - \overline{p+\frac{1}{2}}\frac{\pi}{h}v'\right)i} = \frac{1}{i}\sum' \frac{(-1)^{p+p'}}{u+\omega_3}.$$

Hier ist $u = v + v'i$ an Stelle von u_1 geschrieben; die Summen in der Mitte verschwinden für diejenigen Werthe von u, für welche die Thetaquotienten unendlich werden.

Herr Kronecker hat in seiner wichtigen Abhandlung über elliptische Functionen (*Sitzungsberichte der Berliner Akademie* vom 30. Jan. 1890) die Entwickelung für $\frac{\vartheta_1'\vartheta_1 u}{\vartheta\vartheta u}$ in der Gestalt abgeleitet

$$\varkappa \sin \operatorname{am}(2\sigma K + 2\tau K''i, \varkappa) = \sum_{n}' \frac{(-1)^n e^{(\nu\sigma+2n\tau)\pi i}}{\nu K''i - 2nK},$$

Digitized by Google

wo $\nu = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$, $n = \pm 1, \pm 3, \pm 5 \cdots$, und dabei hervorgehoben, dass man sich nicht, wie bisher, auf solche Entwickelungen von Functionen einer complexen Variablen $x + yi$ beschränken dürfe, welche die Variabeln x und y nur in ihrer formellen Verbindung zu $x + yi$ enthalten.

Uebrigens kann man zur Ableitung der Formeln für die Quotienten der Thetafunctionen auch die bekannten Gleichungen benutzen:

$$\frac{\vartheta_1' u}{\vartheta_1 u} - \frac{\vartheta_2' u}{\vartheta_2 u} = 2\frac{\vartheta_1'(q^2)}{\vartheta(q^2)}\frac{\vartheta(2u, q^2)}{\vartheta_1(2u, q^2)}, \quad \frac{\vartheta_1' u}{\vartheta_1 u} - \frac{\vartheta' u}{\vartheta u} = \frac{\vartheta_1'(\sqrt{q})}{\vartheta_2(\sqrt{q})}\frac{\vartheta_2(u, \sqrt{q})}{\vartheta_1(u, \sqrt{q})},$$

$$\frac{\vartheta' u}{\vartheta u} - \frac{\vartheta_3' u}{\vartheta_3 u} = 2\frac{\vartheta_1'(q^2)}{\vartheta(q^2)}\frac{\vartheta_1(2u, q^2)}{\vartheta(2u, q^2)}, \quad \frac{\vartheta_3' u}{\vartheta_3 u} - \frac{\vartheta_2' u}{\vartheta_2 u} = \frac{\vartheta_1'(\sqrt{q})}{\vartheta_2(\sqrt{q})}\frac{\vartheta_1(u, \sqrt{q})}{\vartheta_2(u, \sqrt{q})}.$$

9.

Wir kehren jetzt zu der durch Differentiation aus $\frac{\vartheta_3' u}{\vartheta_3 u}$ hervorgehenden Formel S. 154 der Abhandlung zurück:

$$\eta_3 u = 8\sum_{n=1}^{\infty}{}'(-1)^n \frac{nq^n}{1-q^{2n}} \cos 2nu$$

$$= -\frac{2}{h} - \frac{8\pi^2}{h^2}\sum{}'(-1)^n \frac{nq'^n}{1-q'^{2n}} \cos 2nu',$$

oder für $u = v + v'i$

$$\eta_3 u = 4\sum_{p'}^{*}{}'(-1)^{p'} \frac{p'q^{p'}}{1-q^{2p'}} e^{-2p'v' + 2p'vi}$$

$$= -\frac{2}{h} - \frac{4\pi^2}{h^2}\sum_{p}^{*}{}'(-1)^p \frac{pq'^p}{1-q'^{2p}} e^{-2p\frac{\pi}{h}(v+v'i)}.$$

Wenn man hier die erste Summe für $-\frac{h}{2} < v' < \frac{h}{2}$ nach den Potenzen von $e^{\frac{2\pi}{h}v'i}$, die zweite für $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$ nach den Potenzen von e^{2vi} entwickelt, so ergeben sich die Gleichungen

Digitized by Google

$$(-1)^{p'}\frac{4p'q^{p'}}{1-q^{2p'}}e^{-2p'v'}=\sum_{p}(-1)^{p+p'}\frac{2p'i}{p\pi+p'hi}e^{-2p\frac{\pi}{h}v'i},$$

$$(-1)^{p}\frac{4\pi^2}{h^2}\frac{pq'^{p}}{1-q'^{2p}}e^{-2p\frac{\pi}{h}v}=\frac{\pi}{h}\sum_{p'}(-1)^{p+p'}\frac{2p}{p\pi+p'hi}e^{2p'vi},$$

folglich

$$\eta_3 u=\sum_{p}^{*}{}'\sum_{p'}(-1)^{p+p'}\frac{2p'i}{\omega_1}e^{2\left(p'v-p\frac{\pi}{h}v'\right)i}$$

$$=-\frac{2}{h}-\frac{\pi}{h}\sum_{p'}^{*}{}'\sum_{p}(-1)^{p+p'}\frac{2p}{\omega_1}e^{2\left(p'v-p\frac{\pi}{h}v'\right)i},$$

und weiter

$$\eta_2 u=\sum_{p}^{*}{}'\sum_{p'}(-1)^{p'}\frac{2p'i}{\omega_1}e^{2\left(p'v-p\frac{\pi}{h}v'\right)i}$$

$$=-\frac{2}{h}-\frac{\pi}{h}\sum_{p'}^{*}{}'\sum_{p}(-1)^{p'}\frac{2p}{\omega_1}e^{2\left(p'v-p\frac{\pi}{h}v'\right)i},$$

$$\eta_1 u=\sum_{p}^{*}{}'\sum_{p'}\frac{2p'i}{\omega_1}e^{2\left(p'v-p\frac{\pi}{h}v'\right)i}$$

$$=-\frac{2}{h}-\frac{\pi}{h}\sum_{p'}^{*}{}'\sum_{p}\frac{2p}{\omega_1}e^{2\left(p'v-p\frac{\pi}{h}v'\right)i},$$

$$\eta u=\sum_{p}^{*}{}'\sum_{p'}(-1)^{p}\frac{2p'i}{\omega_1}e^{2\left(p'v-p\frac{\pi}{h}v'\right)i}$$

$$=-\frac{2}{h}-\frac{\pi}{h}\sum_{p'}^{*}{}'\sum_{p}(-1)^{p}\frac{2p}{\omega_1}e^{2\left(p'v-p\frac{\pi}{h}v'\right)i}.$$

Die Reihenfolge der Summationen darf hier nicht vertauscht werden, denn wollte man z. B. die Summe

$$\sum_{p'}^{*}{}'\frac{2p'i}{\omega_1}e^{2\left(p'v-p\frac{\pi}{h}v'\right)i}$$

Digitized by Google

bilden, so würde für $p = 0$ $\sum_{p'}^{*} \frac{2}{h} e^{2p'vi}$ divergiren. Allgemeiner folgt aus $\frac{2p'i}{\omega_1} = \frac{2}{h} - \frac{\pi}{h}\frac{2p}{\omega_1}$:

$$\sum_{p'p}^{*} \frac{2p'i}{\omega_1} e^{2\left(p'v - p\frac{\pi}{h}v'\right)i} = \frac{2}{h}\sum_{p'p}^{*} e^{2\left(p'v - p\frac{\pi}{h}v'\right)i} + \frac{\pi}{h}\sum_{p'p}^{*} \frac{2p}{\omega_1} e^{2\left(p'v - p\frac{\pi}{h}v'\right)i}$$

$$= \eta_1 u + \frac{2}{h}\sum_{p'p}^{*} e^{2\left(p'v - p\frac{\pi}{h}v'\right)i},$$

wiederum ein divergirender Ausdruck.

Man kann die für die doppeltperiodischen Etafunctionen abgeleiteten Ausdrücke auch mittelst der allgemeinen Gleichung

$$f(v, v') = \sum_{pp'} [p, p'] e^{2\left(p'v - p\frac{\pi}{h}v'\right)i}$$

erhalten, worin

$$[p, p'] = \frac{1}{h\pi}\iint f(v, v') e^{-2\left(p'v - p\frac{\pi}{h}v'\right)i} dv\, dv'$$

und die Integration in Bezug auf v über die Periode π, in Bezug auf v' über das reelle Periodenintervall h auszudehnen ist. Setzt man nun

$$f(v, v') = \sum' \frac{1}{(v + v'i + \omega_i)^2} = c - \eta_i(u),$$

so wird

$$[p, p'] = \frac{1}{h\pi}\iint \frac{\pm 1}{(v + v'i)^2} e^{-2\left(p'v - p\frac{\pi}{h}v'\right)i} dv\, dv',$$

wenn die Integration über alle reellen Werthe v und v' sich erstreckt. Je nach der Reihenfolge der beiden Integrationen, welche der Vertauschung der Summationsordnung entspricht, ergeben sich die beiden für $\eta_i u$ gefundenen Doppelsummen.

Digitized by Google

10.

Eine ganz andere Art elliptischer Doppelsummen erhält man, wenn man die bereits oben citirten Gleichungen S. 158—61 meiner Abhandlung gleichzeitig nach den Potenzen der Grössen $\omega = e^{2ui}$ und $\zeta = e^{2vi}$ entwickelt.

Wir gehen aus von der Gleichung

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_1 u\,\vartheta_1 v} = \frac{2}{i}\sum_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{\zeta^n}{1-q^{2n}\omega} = \frac{2}{i}\sum_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{\omega^n}{1-q^{2n}\zeta}\,,$$

wo die Coefficienten der imaginären Theile von v und resp. von u zwischen 0 und h erhalten sein müssen. Schreibt man dafür wie in der Anmerkung zu S. 158

$$2i - \frac{2i}{1-\omega} - \frac{2i}{1-\zeta} - 2i\sum_{1}^{\infty}{}' q^{2n}\left\{\frac{\zeta^n\omega}{1-q^{2n}\omega} - \frac{\zeta^{-n}\omega^{-1}}{1-q^{2n}\omega^{-1}}\right\},$$

so folgt bei der Entwickelung nach den Potenzen von ω:

$$i\,\frac{\omega+1}{\omega-1} + i\,\frac{\zeta+1}{\zeta-1} + \frac{2}{i}\sum_{m,\,n=1}^{\infty}{}' q^{2mn}(\omega^m\zeta^n - \omega^{-m}\zeta^{-n})$$

oder

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_1 u\,\vartheta_1 v} = \cot u + \cot v + 4\sum_{1}^{\infty}{}' q^{2mn}\sin 2(mu+nv)\,.$$

Hier dürfen die imaginären Theile $u'i$ und $v'i$ von u und v zwischen $\pm hi$ liegen.

Dieser Formel stehen die folgenden zur Seite:

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_2(u+v)}{\vartheta_1 u\,\vartheta_2 v} = \cot u - \operatorname{tg} v + 4\sum_{1}^{\infty}{}'(-1)^n q^{2mn}\sin 2(mu+nv)\,,$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_2(u+v)}{\vartheta_2 u\,\vartheta_1 v} = -\operatorname{tg} u + \cot v + 4\sum_{1}^{\infty}{}'(-1)^m q^{2mn}\sin 2(mu+nv)\,,$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_2 u\,\vartheta_2 v} = \operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v - 4\sum_{1}^{\infty}{}'(-1)^{m+n} q^{2mn}\sin 2(mu+nv)\,,$$

ferner für die Intervalle $-\frac{h}{2} < u' < \frac{h}{2}$, $-\frac{h}{2} < v' < \frac{h}{2}$:

Digitized by Google

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_1(u+v)}{\vartheta u\,\vartheta v}=4\sum_0^{\infty}{}' q^{2(m+\frac12)(n+\frac12)}\sin\{(2m+1)u+(2n+1)v\},$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_2(u+v)}{\vartheta u\,\vartheta_3 v}=4\sum_0^{\infty}{}'(-1)^n q^{2(m+\frac12)(n+\frac12)}\cos\{(2m+1)u+(2n+1)v\},$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_2(u+v)}{\vartheta_3 u\,\vartheta v}=4\sum_0^{\infty}{}'(-1)^m q^{2(m+\frac12)(n+\frac12)}\cos\{(2m+1)u+(2n+1)v\},$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_3 u\,\vartheta_3 v}=4\sum_0^{\infty}{}'(-1)^{m+n} q^{2(m+\frac12)(n+\frac12)}\sin\{(2m+1)u+(2n+1)v\}.$$

Bei den übrigen Formeln liegen u' und v' in verschiedenen Intervallen, nämlich für $-\frac{h}{2}<u'<\frac{h}{2}$, $-h<v'<h$:

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta(u+v)}{\vartheta u\,\vartheta_1 v}=\frac{1}{\sin v}+4\sum_1^{\infty}{}' q^{2m(n-\frac12)}\sin(2mu+(2n-1)v),$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_3(u+v)}{\vartheta u\,\vartheta_2 v}=\frac{1}{\cos v}-4\sum_1^{\infty}{}'(-1)^n q^{2m(n-\frac12)}\cos(2mu+(2n-1)v),$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_3(u+v)}{\vartheta_3 u\,\vartheta_1 v}=\frac{1}{\sin v}+4\sum_1^{\infty}{}'(-1)^m q^{2m(n-\frac12)}\sin(2mu+(2n-1)v),$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta(u+v)}{\vartheta_3 u\,\vartheta_2 v}=\frac{1}{\cos v}-4\sum_1^{\infty}{}'(-1)^{m+n} q^{2m(n-\frac12)}\cos(2mu+(2n-1)v),$$

endlich für $-h<u'<h$, $-\frac{h}{2}<v'<\frac{h}{2}$:

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta(u+v)}{\vartheta_1 u\,\vartheta v}=\frac{1}{\sin u}+4\sum_1^{\infty}{}' q^{2(m-\frac12)n}\sin((2m-1)u+2nv),$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_3(u+v)}{\vartheta_1 u\,\vartheta_3 v}=\frac{1}{\sin u}+4\sum_1^{\infty}{}'(-1)^n q^{2(m-\frac12)n}\sin((2m-1)u+2nv),$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_3(u+v)}{\vartheta_2 u\,\vartheta v}=\frac{1}{\cos u}-4\sum_1^{\infty}{}'(-1)^m q^{2(m-\frac12)n}\cos((2m-1)u+2nv),$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta(u+v)}{\vartheta_2 u\,\vartheta_3 v}=\frac{1}{\cos u}-4\sum_1^{\infty}{}'(-1)^{m+n} q^{2(m-\frac12)n}\cos((2m-1)u+2nv).$$

Digitized by Google

Die Doppelreihe für $\frac{\vartheta_1' \vartheta_1(u+v)}{\vartheta u \vartheta v}$ hat Herr KRONECKER im Monatsberichte der Berliner Akademie vom 22. December 1881 mitgetheilt. Durch Specialisirung der Werthe der beiden Argumente u und v lassen sich selbstverständlich eine grosse Menge speciellerer Resultate ableiten, deren Anführung hier nicht nöthig sein wird. Es mag noch auf den eigenthümlichen Parallelismus hingewiesen werden, in welchem die obigen sechszehn Doppelsummen zu den bekannten Doppelreihen für die sechszehn hyperelliptischen Thetafunctionen zweier Argumente $\Theta(u, v)$ stehen.

11.

JACOBI hat in seinen Königsberger Vorlesungen auf dem Wege der Partialbruchzerlegung eine sehr allgemeine Formel abgeleitet, welche mit leichter Veränderung geschrieben werden kann:

$$\prod_{n=1}^{p} \frac{\theta(v-v_n)}{\theta(v-w_n)} =$$

$$2 S \left\{ \frac{\theta_1(v_1-w_n)\,\theta_1(v_2-w_n)\cdots\theta_1(v_p-w_n)}{\theta_1(w_1-w_n)\,\theta_1(w_2-w_n)\cdots\theta_1(w_p-w_n)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(2m-1)\sigma}}{1-q^{2m-1}e^{2(v-w_n)}} \right\},$$

wo

$$\theta u = \vartheta(ui), \quad \theta_1 u = \frac{1}{i}\vartheta_1(ui), \quad \sigma = S(v_n - w_n)$$

bedeuten und im Nenner der Factor $\theta_1(w_n - w_n)$ durch $\theta_1'(0)$ zu ersetzen ist. Für $p = 1$ wird

$$\frac{\theta(v-v_1)}{\theta(v-w_1)} = \frac{2}{\theta_1'}\,\theta_1(v_1-w_1) \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(2m-1)(v_1-w_1)}}{1-q^{2m-1}e^{2(v-w_1)}}$$

oder

$$\frac{\theta(v-w_n-\sigma)}{\theta(v-w_n)} = \frac{2}{\theta_1'}\,\theta_1\sigma \sum \frac{e^{-(2m-1)\sigma}}{1-q^{2m-1}e^{2(v-w_n)}},$$

mithin

Digitized by Google

$$\theta_1\sigma\,\Pi\frac{\theta(v-v_n)}{\theta(v-w_n)}=$$

$$S\frac{\theta_1(v_1-w_n)\,\theta_1(v_2-w_n)\cdots\theta_1(v_p-w_n)}{\theta_1(w_1-w_n)\,\theta_1(w_2-w_n)\cdots\theta_1(w_p-w_n)}\cdot\frac{\theta(v-w_n-\sigma)}{\theta(v-w_n)},$$

wenn der Factor $\theta_1(w_n-w_n)$ einfach weggelassen wird.

Schreibt man $v=ui+\frac{1}{2}h$ und v_ni, w_ni statt v_n und w_n, folglich auch σi statt σ, so erhält man

(1.) $$\vartheta_1\sigma\prod_{n=1}^{p}\frac{\vartheta_1(u-v_n)}{\vartheta_1(u-w_n)}=$$

$$\sum_{n=1}^{p}\frac{\vartheta_1(v_1-w_n)\,\vartheta_1(v_2-w_n)\cdots\vartheta_1(v_p-w_n)}{\vartheta_1(w_1-w_n)\,\vartheta_1(w_2-w_n)\cdots\vartheta_1(w_p-w_n)}\cdot\frac{\vartheta_1(u-w_n-\sigma)}{\vartheta_1(u-w_n)}.$$

Für $\sigma=0$ folgt

(2.) $$0=S\frac{\vartheta_1(v_1-w_n)\,\vartheta_1(v_2-w_n)\cdots\vartheta_1(v_p-w_n)}{\vartheta_1(w_1-w_n)\,\vartheta_1(w_2-w_n)\cdots\vartheta_1(w_p-w_n)},$$

nebst

(3.) $$\vartheta_1'\Pi\frac{\vartheta_1(u-v_n)}{\vartheta_1(u-w_n)}=$$

$$S\frac{\vartheta_1(v_1-w_n)\,\vartheta_1(v_2-w_n)\cdots\vartheta_1(v_p-w_n)}{\vartheta_1(w_1-w_n)\,\vartheta_1(w_2-w_n)\cdots\vartheta_1(w_p-w_n)}\left\{\frac{\vartheta_1'(v_m-w_n)}{\vartheta_1(v_m-w_n)}-\frac{\vartheta_1'(u-w_n)}{\vartheta_1(u-w_n)}\right\},$$

wo der Index m beliebig gewählt werden darf.

Mittelst der Lagrange'schen Interpolationsformel verificirt man sofort die Gleichungen

$$\Pi\frac{u-v_n}{u-w_n}=1+S\frac{w_n-v_1\cdot w_n-v_2\cdots w_n-v_p}{w_n-w_1\cdot w_n-w_2\cdots w_n-w_p}\cdot\frac{1}{u-w_n},$$

$$0=\sigma+S\frac{w_n-v_1\cdot w_n-v_2\cdots w_n-v_p}{w_n-w_1\cdot w_n-w_2\cdots w_n-w_p},$$

folglich auch

$$\sigma\Pi\frac{u-v_n}{u-w_n}=S\frac{v_1-w_n\cdot v_2-w_n\cdots v_p-w_n}{w_1-w_n\cdot w_2-w_n\cdots w_p-w_n}\cdot\frac{u-w_n-\sigma}{u-w_n},$$

Diese Gleichung behält ihre Gültigkeit, wenn man statt der sämmtlichen eingehenden Factoren die mit denselben als Argu-

Digitized by Google

menten gebildeten Functionen ϑ_1 substituirt. Bei Einführung der Weierstrass'schen Sigmafunctionen gehen die Formeln hervor, welche S. 225/26 des ersten Bandes von Halphen *Traité des Fonctions elliptiques* enthalten sind.

Auch lassen sich nach bekannten Regeln die Modificationen angeben, welche die gefundenen Gleichungen erleiden, wenn die Grössen w_n nicht sämmtlich verschieden sind. Setzt man z. B. $w_n = n\varepsilon$ und lässt ε unendlich abnehmen, so wird

$$\vartheta_1'^{p-1}\vartheta_1\sigma \prod_{n=1}^{p} \frac{\vartheta_1(u-v_n)}{\vartheta_1 u} = \Big[\frac{\vartheta_1(u-\sigma+h)}{\vartheta_1(u+h)} \prod \vartheta_1(v_n+h)\Big]_{h^{p-1}},$$

wo die rechte Seite den Coefficienten von h^{p-1} in der Entwickelung des eingeklammerten Ausdruckes nach den Potenzen von h bezeichnet. Für $\sigma = Sv_n = 0$ erhält man hieraus

$$\Big(\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1 u}\Big)^p \prod \vartheta_1(u-v_n) = \Big[\Big(\frac{\vartheta_1'(v_1+h)}{\vartheta_1(v_1+h)} - \frac{\vartheta_1'(u+h)}{\vartheta_1(u+h)}\Big) \prod \vartheta_1(v_n+h)\Big]_{h^{p-1}}.$$

Digitized by

E. Study, *Ein Reciprocitätsgesetz in der Theorie der algebraischen Functionen.*

Diese Zeilen bezwecken die Darstellung eines allgemeinen Theorems aus der Lehre von den algebraischen Functionen einer Veränderlichen, das u. A. den RIEMANN-ROCH'schen Satz und den sogenannten CAYLEY'schen Schnittpunktsatz als besondere Fälle umfasst.

Der Formulirung des gemeinten Satzes schicken wir eine Reihe von Definitionen voraus, die dazu dienen sollen, einmal den Satz selbst in einer zweckmässigen Form und in seiner wahren Allgemeinheit hinzustellen, und dann ihn für Anwendungen in der Geometrie geschickter zu machen.

§ 1.

Begriff der Abhängigkeit einer Punktgruppe.

Es möge durch eine unzerlegbare algebraische Gleichung zwischen zwei Veränderlichen ein algebraisches Gebilde (eine Curve oder eine RIEMANN'sche Fläche) des Geschlechtes p definirt sein. Auf ihm sei vorgelegt eine Punktgruppe G_r, bestehend aus r Punkten (Stellen des Gebildes), unter denen auch einige mehrfach vorkommen können. Zu der Punktgruppe G_r gehört dann, wie bekannt, eine ganze Schaar g_r von »corresidualen« oder »*aequivalenten*«[1]) Gruppen.

1) Ich ziehe in dem gegenwärtigen Zusammenhange die von den Herren DEDEKIND und WEBER eingeführte Benennung »*aequivalent*« vor, weil hier an eine Restbildung nicht gedacht wird. Im Uebrigen sind die Bezeichnungen so gewählt, dass sich der Uebergang zu Anwendungen in der Geometrie ohne Umstände vollziehen lässt.

Digitized by Google

Sind G_r', G_r'', ... irgend welche aus der Schaar g_r herausgegriffene Punktgruppen, so wird man als den allgemeinsten Fall den anzusehen haben, dass sie alle die Punkte einer Gruppe G_m gemeinsam enthalten, dass sie also zerfallen in G_m und gewisse Restgruppen G_{r-m}', G_{r-m}'', ... Die Punktgruppen G_{r-m}', G_{r-m}'', ... bilden dann die Nullstellen je einer zu dem Gebilde gehörigen algebraischen Function $f^{(r-m)'}$, $f^{(r-m)''}$, ..., deren Unendlichkeitsstellen in den Punkten einer mit G_{r-m}', G_{r-m}'', ... aequivalenten Gruppe G_{r-m} liegen.

Wenn nun zwischen diesen Functionen f', f'', ... eine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten

$$c'f' + c''f'' + \cdots = 0$$

besteht, so wollen wir sagen, die Punktgruppen G_r', G_r'', ... seien »*linear-abhängig*«; im entgegengesetzten Falle nennen wir sie linear-unabhängig.

Enthält die Schaar g_r im Ganzen ϱ linear-unabhängige Punktgruppen, so kann man von einer Gruppe der Schaar noch $\varrho - 1$ Punkte willkürlich wählen; wir werden daher sagen, die einzelne Punktgruppe G_r habe die »*Beweglichkeit* $\varrho - 1$«

Wir definiren nun die »Abhängigkeit μ_r einer Punktgruppe G_m in Bezug auf die Schaar g_r« durch die Gleichung

$$\text{I)} \qquad \mu_r = m - \varrho + \mathfrak{m}_r ,$$

worin $\mathfrak{m}_r$ die Zahl der linear-unabhängigen Punktgruppen der Schaar bedeutet, in denen die Punktgruppe G_m enthalten ist; und wir bezeichnen zweitens den Ueberschuss der Abhängigkeit einer aus zwei Punktgruppen G_m und G_n zusammengesetzten Punktgruppe G_{m+n} über die Abhängigkeit der Punktgruppe G_n allein als »Abhängigkeit der Punktgruppe G_m von der Punktgruppe G_n (in Bezug auf die Schaar g_r)«.

Wir fügen noch einige Worte zur Erläuterung dieser beiden nicht allein für unseren augenblicklichen Zweck nützlichen Begriffsbildungen hinzu.

Zunächst mögen wir bemerken, dass die soeben definirten Zahlen *niemals negativ* sein können; es ist nämlich offenbar $\mathfrak{m}_r \geqq \varrho - m$.

Ferner ergibt sich für die Zahl μ_r, wenn $\mathfrak{m}_r > 0$ ist, eine einfache geometrische Bedeutung: μ_r ist dann die Maximalzahl

Digitized by Google

von solchen Punkten der Gruppe G_m, welche durch die übrigen Punkte von G_m als Punkte einer Gruppe G_r der Schaar g_r mitbestimmt sind: Man wird aus den Punkten von G_m immer $m - \mu_r$ Punkte so herausheben können, dass jede Gruppe der Schaar g_r, die diese $m - \mu_r$ Punkte enthält, in Folge dessen auch die übrigen μ_r Punkte enthalten muss.

Da die Zahl $\mathfrak{m}_r$ bekanntlich denselben Werth hat für alle mit G_m aequivalenten Punktgruppen, so gilt das Nämliche auch von der Zahl μ_r; und ebenso ändert sich die zweite oben definirte Zahl nicht, wenn man von den Punktgruppen G_m und G_n zu irgend welchen mit ihnen aequivalenten Punktgruppen übergeht.

Es kann auch ein einzelner Punkt (eine Punktgruppe G_1) abhängig sein in Bezug auf die Schaar g_r — nämlich dann, wenn er in allen Punktgruppen von g_r enthalten ist. Dieser Fall kann, wie bekannt, nur eintreten, wenn $r < 2p$ ist. Nehmen wir an, dass die Punktgruppe G_m allen Punktgruppen der Schaar g_r zugleich angehört, so ist $\mu_r = m$ — und umgekehrt. Der grösste Werth, den die Abhängigkeit einer Punktgruppe G_m in Bezug auf die Schaar g_r haben kann, ist $\mu_r = m$; es wird dieser Werth aber nur in dem eben genannten Falle wirklich erreicht.

Auch die Abhängigkeit der Punktgruppe G_m von einer anderen G_n liegt zwischen den Grenzen 0 und m. Hat sie den Werth m, so muss jede Punktgruppe der Schaar g_r, die die Punktgruppe G_n enthält, in Folge dessen auch die Punktgruppe G_m enthalten. Ein einzelner Punkt G_1 hat mithin von einer Punktgruppe G_n entweder die Abhängigkeit Null oder die Abhängigkeit Eins. Ist der Punkt von der Gruppe G_n unabhängig, so kann man Punktgruppen der Schaar g_r angeben, die die Punktgruppe G_n, nicht aber den Punkt G_1 enthalten — und umgekehrt.

Hat die Zahl ϱ den Werth Eins, d. h. enthält die Schaar g_r nur eine einzige Punktgruppe G_r (was nur eintreten kann, wenn $r \leqq p$ ist), so hat die Zahl μ_r entweder den Werth m oder den Werth $m - 1$, je nachdem die Punktgruppe G_m in der Punktgruppe G_r enthalten ist, oder nicht.

Die obige Definition der Zahl μ_r und die bis jetzt daran geknüpften Bemerkungen beziehen sich auf ganz beliebige Schaaren aequivalenter Gruppen. Unter diesen sind aber die

Digitized by Google

von besonderer Bedeutung, deren Gruppen keinen ihnen allen gemeinsamen Punkt enthalten. Wir wollen sie, im Gegensatze zu den anderen, den »uneigentlichen Schaaren«, »*eigentliche*« [1]) Schaaren nennen.

Eine eigentliche Schaar g_r hat die charakteristische Eigenschaft, dass man ihr ein System von ϱ linear unabhängigen algebraischen Functionen $f_1^{(r)} \ldots f_\varrho^{(r)}$ zuordnen kann, die in sämmtlichen Punkten einer Gruppe G_r der Schaar unendlich in der ersten Ordnung werden, während ihre Nullstellen irgend ϱ linear-unabhängige Gruppen der Schaar sind; es wird dann durch die Gleichung

$$(\text{II}) \qquad f^{(r)} = c_1 f_1^{(r)} + \cdots + c_\varrho f_\varrho^{(r)} = 0$$

die Gesammtheit aller Punktgruppen der Schaar g_r dargestellt.

Bei diesen Schaaren nun lässt sich dem Begriffe der Abhängigkeit einer Punktgruppe G_m noch eine zweite selbständige Bedeutung geben:

Die Abhängigkeit einer Punktgruppe G_m in Bezug auf die eigentliche Schaar g_r ist die Zahl der linear-unabhängigen Identitäten mit constanten Coefficienten

$$(\text{III}) \qquad \lambda_1 f^{(r)}(z_1) + \cdots + \lambda_m f^{(r)}(z_m) = 0 \ ,$$

die für die Punkte $z_1 \ldots z_m$ von G_m und für alle Werthe der Verhältnissgrössen $c_1 : \ldots : c_\varrho$ bestehen.

Eine ähnliche Bedeutung hat auch die Abhängigkeit einer Punktgruppe G_m von einer anderen G_n in Bezug auf die Schaar g_r. Bezeichnet man die Punkte von G_n mit $y_1 \ldots y_n$, so wird man nach dem Muster von (III) so viele Gleichungen der Form

$$\sum_1^m{}' \lambda_i' f^{(r)}(z_i) + \sum_1^n{}' \lambda_i'' f^{(r)}(y_i) = 0$$

bilden können, als die Abhängigkeit der zusammengesetzten Gruppe G_{m+n} angibt. Dieses Gleichungssystem denke man sich nun in der Weise geschrieben, dass die Punkte (z_i) in einer möglichst geringen Zahl von Gleichungen wirklich auftreten;

---

1) Ich entnehme auch diese Benennung der Abhandlung von Dedekind und Weber: »Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen«, Crelle's J. Bd. 92.

Digitized by Google

diese Zahl ist dann die Abhängigkeit der Punktgruppe G_m von der Punktgruppe G_n.

Wir haben hier übrigens nur Rücksicht auf den einfachen Fall genommen, wo die Punkte der Gruppen G_m und G_{m+n} getrennt sind. Setzt man voraus, dass einzelne oder auch alle Punkte dieser Gruppen zusammenrücken, so erleiden die zuletzt aufgestellten Formeln eine leicht anzugebende Abänderung. —

Die an dem Beispiel der Gruppe G_m und der Schaar g_r eingeführte Bezeichnungsweise wollen wir auch fernerhin festhalten, abgesehen von einer später anzuführenden Ausnahme. Sei also G_a irgend eine andere Punktgruppe und g_l eine ganz beliebige Schaar aequivalenter Gruppen von je l Punkten, so sollen die Zeichen α_l und α_l die entsprechende Bedeutung haben, wie die Zeichen $\mathfrak{m}_r$ und μ_r.

§ 2.
Grenzfälle.

Wollen wir die weiterhin zu entwickelnden Sätze von vorn herein in gehöriger Allgemeinheit aussprechen, so sehen wir uns genöthigt, den in § 1 definirten Zahlen noch in gewissen Grenzfällen eine Bedeutung beizulegen, in denen ihre bisherige Definition gegenstandslos wird.

Veranlassung dazu gibt die häufig wiederkehrende Aufgabe, eine Schaar g_n herzustellen, deren Punktgruppen G_n mit einer gegebenen Punktgruppe G_m zusammen je eine Punktgruppe einer vorgelegten Schaar g_r darstellen.

Nehmen wir zunächst an, das $r > m$ ist, und dass es gewisse Punktgruppen G_r der Schaar g_r gibt, die die Punktgruppe G_m enthalten. Dann ist die genannte Aufgabe lösbar: Die Schaar g_n besteht aus den Restgruppen G_{r-m}, die aus den Punktgruppen G_r hervorgehen, wenn man die Punkte von G_m weglässt.

Es kann nun nur naturgemäss erscheinen, von dem Vorhandensein einer »Restgruppe G_0« auch dann noch zu reden, wenn $r = m$ ist, und wenn die Punktgruppe G_m zu der Schaar g_r gehört; während man in dem anderen Fall, wo G_m nicht zu g_r gehört, sagen wird, es sei keine solche Restgruppe G_0 vorhanden, oder besser, die Gruppe G_0 sei nicht Rest der Punktgruppe G_m.

Digitized by Google

Wir fingiren also das Vorhandensein einer *Punktgruppe* G_0, und damit zugleich natürlich auch das Vorhandensein einer *Schaar* g_0, die als einzige Gruppe die Punktgruppe G_0 enthält [1]).

Im Anschluss hieran haben wir nun festzusetzen, was unter der Abhängigkeit einer Punktgruppe G_m in Bezug auf die Schaar g_0, und unter der Abhängigkeit der Punktgruppe G_0 in Bezug auf eine Schaar g_r verstanden werden soll.

Welche Bedeutung man der Zahl $\mathfrak{m}_r$ in den Fällen $m > 0$, $r = 0$; $m = 0$, $r > 0$; $m = 0$, $r = 0$ beizulegen hat, darüber kann kein Zweifel sein. Die Bedeutung der Zahl μ_r können wir aber dann der Definitionsgleichung (I) entnehmen, die wir auch in diesen Fällen noch aufrecht erhalten.

So ergeben sich die Bestimmungen:

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{m}_r = 0\,, & \mu_r = m - 1 & (m > 0\,, \quad r = 0) \\ \mathfrak{m}_r = \varrho\,, & \mu_r = 0 & (m = 0\,, \quad r > 0) \\ \mathfrak{m}_r = 1\,, & \mu_r = 0 & (m = 0\,, \quad r = 0)\,. \end{cases}$$

Die Abhängigkeit irgend einer Punktgruppe G_m von der Punktgruppe G_0 in Bezug auf eine Schaar g_r ist hiernach gleich der Abhängigkeit μ_r der Punktgruppe G_m selbst; die Abhängigkeit der Punktgruppe G_0 von irgend einer anderen Punktgruppe hat natürlich den Werth Null.

Wenn $r < m$ ist, und noch in einigen anderen Fällen, in denen $r - m < p$ ist, kann von dem Vorhandensein der Schaar g_n auch in dem soeben festgestellten weiteren Sinne nicht geredet werden. Gleichwohl ist es unter Umständen nützlich, sich so auszudrücken, als ob sie wirklich da wäre. Die Anzahl der in ihr enthaltenen linear-unabhängigen Gruppen ist dann natürlich gleich *Null* zu setzen, und die Anzahl der Punkte einer Gruppe G_n gleich $r - m$, auch dann, wenn dieser Ausdruck negativ sein sollte.

Vertauscht man nun die Bezeichnungen n und r, so ergibt sich, da die Bedeutung des Symbols $\mathfrak{m}_r$ wiederum nicht zweifelhaft ist, unter Zuhülfenahme der Definitionsgleichung (I) die neue Bestimmung:

---

1) Diese Punktgruppe G_0 findet sich schon bei Dedekind und Weber (a. a. O.); sie wird dort »*das Nullecк*« genannt.

Digitized by Google

(V) $\mathfrak{m}_r = 0\,, \quad \mu_r = m$ (g_r *nicht vorhanden*),

die nun auf alle wirklich vorhandenen Punktgruppen G_m mit Einschluss der Punktgruppe G_0 anwendbar ist.

Unter den Schaaren g_r aequivalenter Punktgruppen gibt es, wenn $p > 1$ ist, bekanntlich eine ausgezeichnete, die den Werthen $r = 2p - 2\,, \quad \varrho = p$ entspricht.

Bei dieser Schaar, die die sogenannten *Specialgruppen* enthält, wollen wir in Anlehnung an eine bekannte Redeweise statt der etwas zu unbestimmten Bezeichnungen g_{2p-2}, G_{2p-2}, $\mathfrak{m}_{2p-2}$, μ_{2p-2} deutlicher g_q, G_q, $\mathfrak{m}_q$, μ_q schreiben.

Alle diese Zeichen haben eine Bedeutung zunächst nur, wenn $p > 1$ ist. Wir können aber die soeben getroffenen Bestimmungen auch auf die Schaar g_q anwenden; da ergibt sich denn, dass im Falle $p = 1$ *eine* Punktgruppe G_q vorhanden ist, und dass diese mit der von uns besprochenen Punktgruppe G_0 zusammenfällt; und dass es nur im Falle $p = 0$ wirklich keine Specialgruppen G_q giebt, da die Schaar g_q hier eine g_{-2} sein müsste.

Wenden wir nun die Definitionsgleichungen (IV) und (V) auf den Fall an, wo die Schaar g_r mit der Specialschaar g_q zusammenfällt, so kommen wir zu den Gleichungen:

(VIa) $\mathfrak{m}_q = p\,, \quad \mu_q = 0 \qquad (m = 0\,, \quad p > 1)$

(VIb) $\begin{cases} \mathfrak{m}_q = 0\,, & \mu_q = m - 1 \quad (m > 0\,, \quad p = 1) \\ \mathfrak{m}_q = 1\,, & \mu_q = 0 \qquad (m = 0\,, \quad p = 1) \end{cases}$

(VIc) $\mathfrak{m}_q = 0\,, \quad \mu_q = m \qquad (m \geqq 0\,, \quad p = 0)$.

Dem Gesagten haben wir noch hinzuzufügen, dass man der Aussage: »Eine Punktgruppe G_m sei mit einer Specialgruppe G_q zusammen aequivalent mit einer anderen Punktgruppe G_n«, im Falle $p = 1$ die Bedeutung beizulegen hat, dass G_m selbst mit G_n aequivalent ist, und dass jene Aussage im Falle $p = 0$ dahin zu deuten ist, dass die Zahl m den Werth $n - 2$ hat.

Der Nutzen der bis jetzt eingeführten Definitionen zeigt sich darin, dass wir nunmehr den *Riemann-Roch'schen Satz* in einer solchen Form aussprechen können, dass auch die algebraischen Gebilde der Geschlechter Null und Eins in der allgemeinen Formulirung mitbegriffen werden:

Digitized by Google

Die Beweglichkeit einer Punktgruppe auf dem algebraischen Gebilde ist gleich ihrer Abhängigkeit in Bezug auf die Specialschaar g_q.

In der That ergibt die Anwendung der Gleichung (I) auf die Specialschaar g_q die Formel

$$\mu_q = m - p + \mathfrak{m}_q \,. \tag{VII}$$

Zufolge der Formeln (VIb) und (VIc) stellt der Ausdruck μ_q die Beweglichkeit der Punktgruppe G_m auch dann noch dar, wenn $p = 0$ oder $p = 1$ ist.

Wenden wir den Riemann-Roch'schen Satz auf eine Punktgruppe G_r der Schaar g_r an, so ergibt sich

$$\varrho = \varrho_q + 1 \,. \tag{VIII}$$

Wir können daher die Gleichung (I) jetzt besser so schreiben:

$$\mu_r = m - \varrho_q + \mathfrak{m}_r - 1 \,. \tag{IX}$$

Aus den Gleichungen (VII) und (VIII) ergibt sich uns noch eine letzte Definition, von der wir weiterhin Gebrauch zu machen haben werden. Wir wollen nämlich festsetzen, dass auch diese beiden Gleichungen dann noch Geltung haben sollen, wenn die Schaar g_m bez. g_r überhaupt nicht vorhanden ist. Schreiben wir im ersten Falle r für m, so erhalten wir, da $\varrho = 0$, noch zwei neue Definitionsgleichungen:

$$\varrho_q = -1 \,, \quad \mathfrak{r}_q = -(r - p + 1) \quad (g_r \textit{ nicht vorhanden}) \,. \tag{X}$$

Die Zahl $\mathfrak{r}_q$ ist auch in den hier besprochenen Fällen *niemals negativ*. Es ist nämlich die Zahl r, wenn g_r nicht vorhanden, an die Bedingung $r < p$ gebunden. (S. oben S. 157.)

Hiermit haben wir die Bedeutung der Zahlen $\mathfrak{m}_r$ und μ_r für alle weiterhin in Betracht kommenden Fälle festgesetzt.

Es kann nicht geleugnet werden, dass die meisten der hier aufgestellten Definitionen etwas Willkürliches und Fremdartiges an sich haben. Ueber die Berechtigung des von uns befolgten Verfahrens kann aber wohl kaum ein Zweifel bestehen. Wenn

Digitized by

irgend eine Grösse ihre ursprüngliche Bedeutung in gewissen Fällen verliert, so wird man immer das Recht haben, über ihre Bedeutung in diesen Fällen zu verfügen, *wie man will*, wenn dadurch nur keine Widersprüche entstehen. Ob man solche Verfügungen treffen soll, und in welchem Umfange, das ist lediglich eine Frage der Zweckmässigkeit; etwas Allgemeines wird sich darüber gar nicht aussagen lassen. Ueber den Werth oder Unwerth dieser Art von Bestimmungen kann allein der Erfolg entscheiden, der darin bestehen muss, dass man mit ihnen zu einfacheren und allgemeineren Sätzen kommt, als ohne sie.

In unserem Falle haben wir durch die aufgestellten Definitionen nicht allein erreicht, dass die algebraischen Gebilde der Geschlechter Null und Eins, die man in der Regel als Ausnahmefälle hinzustellen pflegt, sich den allgemeinen Formulirungen unterordnen lassen; sondern es werden auch noch eine Reihe anderer Grenzfälle, die sonst getrennt neben einander stehen würden, unter einen gemeinsamen Gesichtspunkt gebracht, und in einer einzigen Formulirung zusammengefasst [1]).

§ 3.

Schaaren reciproker Punktgruppen.

Die einfache Beziehung ist bekannt, in der zwei solche Specialgruppen G_l und $G_{l'}$ zu einander stehen, die zusammengenommen eine vollständige Specialgruppe G_q von $2p-2$ Punkten ergeben. Nach einer im vorigen § gemachten Bemerkung können wir die charakteristische Eigenschaft dieser Punktgruppen G_l und $G_{l'}$ auch so ausdrücken, dass wir sagen, es seien G_l und $G_{l'}$ zusammen aequivalent mit G_0 und G_q zusammen. Wir wollen nun diese Definition der Punktgruppen G_l und $G_{l'}$ derart erweitern, dass wir an Stelle der Punktgruppe G_0 eine Punktgruppe einer ganz beliebigen Schaar g_n setzen. G_l und $G_{l'}$ sollen dann »in Bezug auf die Schaar g_n reciproke Punktgruppen«

1) In der mehrfach genannten Abhandlung von Dedekind und Weber hat die allgemeine Theorie bereits den Charakter der Geschlossenheit und Einfachheit, der auch hier angestrebt wird. Für unseren Zweck waren aber die dort aufgestellten Definitionen noch nicht ausreichend.

Digitized by Google

heissen [1]); und ebenso wollen wir die zugehörigen Schaaren g_l und $g_{l'}$ »*reciproke Schaaren*« nennen.

Solche reciproke Schaaren haben merkwürdige Eigenschaften, die, soviel ich weiss, bis jetzt noch nicht bekannt geworden sind; in ihrer Theorie ist die eigentliche Quelle des in der Einleitung erwähnten CAYLEY'schen Satzes aus der Lehre von den ebenen algebraischen Curven zu suchen, wie bei einer anderen Gelegenheit gezeigt werden soll.

Bevor wir zur Darlegung der gemeinten Eigenschaften übergehen, mögen wir noch bemerken, dass bei gegebener Schaar g_n die eine der beiden reciproken Schaaren, etwa die Schaar g_l noch willkürlich gewählt werden darf; die andere Schaar $g_{l'}$ ist dann eindeutig bestimmt. Allerdings kann es unter Umständen eintreten, dass zu einer Schaar g_l überhaupt keine reciproke Schaar $g_{l'}$ gehört; z. B. immer dann, wenn $l > n + 2p - 2$ ist. Das thut aber der Richtigkeit der sogleich aufzustellenden Sätze durchaus keinen Eintrag: Wir haben alle zu verwendenden Grössen so definirt, dass sie auch dann noch eine bestimmte Bedeutung behalten, wenn die Schaar $g_{l'}$ gar nicht vorhanden ist; die erwähnten Sätze aber erstrecken sich auch auf diesen Grenzfall. In gewissem Sinne können wir ja sagen, dass zu jeder Schaar g_l eine reciproke Schaar $g_{l'}$ gehört (S. 158): nur dass die Anzahl der linear-unabhängigen Punktgruppen $G_{l'}$ unter Umständen gleich Null werden kann.

Wie dem auch sein möge, in allen Fällen besteht die Relation

$$(1) \qquad l + l' = n + 2p - 2 \,.$$

Wir behaupten nun:

I. *Die Anzahl der linear-unabhängigen Specialgruppen G_q, die eine Punktgruppe G_l der Schaar g_l enthalten, ist gleich der Anzahl der linear-unabhängigen Punktgruppen $G_{l'}$ der zu g_l reciproken Schaar $g_{l'}$, die eine Punktgruppe G_n der Schaar g_n enthalten.*

---

1) Das System der Verzweigungspunkte einer algebraischen Function z. B. ist hiernach reciprok zu der Punktgruppe G_0 in Bezug auf eine Punktgruppe, die aus den Nullstellen und den Unendlichkeitsstellen der Function besteht.

Digitized by Google

Oder in Zeichen, es ist

$$(2) \qquad \mathfrak{l}_q = \mathfrak{n}_{l'} \ , \quad \mathfrak{l}_q' = \mathfrak{n}_l \ .$$

II. *Die Abhängigkeit der Punktgruppe G_n in Bezug auf die Schaar g_l und die Abhängigkeit der Gruppe G_n in Bezug auf die reciproke Schaar $g_{l'}$ sind zusammengenommen gleich der Anzahl n der Punkte der Gruppe.*

In Zeichen:

$$(3) \qquad \nu_l + \nu_{l'} = n \ .$$

III. *Die Anzahl der linear-unabhängigen Punktgruppen $G_{l'}$, die in der einen ($g_{l'}$) von beiden reciproken Schaaren vorkommen, ist gleich der Summe aus der Abhängigkeit der Punktgruppe G_n in Bezug auf die andere Schaar g_l und der Anzahl der linear-unabhängigen Specialgruppen G_q, die eine beliebige Gruppe G_l dieser anderen Schaar enthalten.* D. h. es ist

$$(4) \qquad \lambda_q' + 1 = \mathfrak{l}_q + \nu_l \ , \qquad \lambda_q + 1 = \mathfrak{l}_q' + \nu_{l'} \ .$$

Den Beweis dieser Sätze führen wir zunächst unter der Voraussetzung, dass beide Schaaren g_l und $g_{l'}$ wirklich vorhanden sind; später zeigen wir, dass sie auch dann noch richtig bleiben, wenn eine der Schaaren g_l und $g_{l'}$ nicht existirt.

Um nun zuerst die Geltung des Satzes I. darzuthun, unterscheiden wir *drei Fälle*, die zusammen alle vorliegenden Möglichkeiten erschöpfen:

a) Es wird angenommen, dass es Punktgruppen der Schaar g_l und zugleich auch Punktgruppen der Schaar $g_{l'}$ gibt, die die Punktgruppe G_n enthalten ($\mathfrak{n}_l > 0 \ , \quad \mathfrak{n}_{l'} > 0$.)

b) Es wird angenommen, dass es zwar Punktgruppen der Schaar g_l, nicht aber Punktgruppen der Schaar $g_{l'}$ gibt, die die Punktgruppe G_n enthalten — oder umgekehrt. ($\mathfrak{n}_l > 0$, $\mathfrak{n}_{l'} = 0$ oder $\mathfrak{n}_l = 0$, $\mathfrak{n}_{l'} > 0$.)

c) Es wird angenommen, dass es weder Punktgruppen der Schaar g_l, noch auch Punktgruppen der Schaar $g_{l'}$ gibt, die die Punktgruppe G_n enthalten. ($\mathfrak{n}_l = 0 \ , \quad \mathfrak{n}_{l'} = 0$.) —

a) Die G_n enthaltenden Punktgruppen von g_l und $g_{l'}$ bestimmen zwei Restgruppen G_c und $G_{c'}$, wobei $c = l - n$ und $c' = l' - n$ ist. Diese Punktgruppen G_c und $G_{c'}$ bilden dann,

Digitized by Google

zufolge unserer Voraussetzung, mit G_n zusammen eine Specialgruppe G_q. D. h., es ergeben die Punktgruppen G_q, die die Punktgruppe $G_l = G_{n+c}$ enthalten, die nämlichen Restgruppen $G_{c'}$, wie die Punktgruppen $G_{l'}$, die die Punktgruppe G_n enthalten. Hieraus ergibt sich die erste Gleichung (2), und ebenso erhält man die andere.

b) Jetzt kann, wie unter a), eine Restgruppe G_c hergestellt werden, nicht aber $G_{c'}$. Daraus folgt $\mathfrak{l}_q = 0$. Denn wäre $\mathfrak{l}_q > 0$, so würde sich sofort auch das Vorhandensein einer Punktgruppe $G_{c'}$ ergeben, die mit G_n und G_c zusammen eine Specialgruppe G_q, und also mit G_n allein zusammengenommen eine Gruppe $G_{l'}$ ausmachen würde — was wir doch gerade ausgeschlossen haben. Man hat also nunmehr

$$\mathfrak{l}_q = \mathfrak{n}_{l'} = 0 .$$

Zu der anderen Gleichung $\mathfrak{l}_q' = \mathfrak{n}_l$ kommt man ganz, wie unter a); es bilden auch jetzt noch die Gruppen $G_{l'}$ und G_c zusammen eine Specialgruppe G_q.

c) Es folgt, wie unter b) im ersten Falle:

$$\mathfrak{l}_q = \mathfrak{n}_{l'} = 0 , \quad \mathfrak{l}_q' = \mathfrak{n}_l = 0 .$$

Hiermit ist der Satz I. bewiesen, unter der oben genannten Beschränkung. Die Sätze II. und III. aber sind nur einfache Folgerungen aus dem Satze I.

Es ist nämlich nach Formel (IX):

$$(5) \qquad \begin{cases} \nu_l = n - \lambda_q + \mathfrak{n}_l - 1 \\ \nu_{l'} = n - \lambda_q' + \mathfrak{n}_{l'} - 1 \end{cases} ,$$

und nach Formel (VII):

$$(6) \qquad \begin{cases} \lambda_q = l - p + \mathfrak{l}_q \\ \lambda_q' = l' - p + \mathfrak{l}_q' \end{cases} .$$

Addirt man die durch (5) gegebenen Werthe von ν_l und $\nu_{l'}$, und berücksichtigt man die Gleichungen (6), (1) und (2), so ergibt sich die Gleichung (3). Entnimmt man sodann aus den Formeln (2) und (3) die Werthe der Grössen $\mathfrak{l}_q$ und $\nu_{l'}$ und addirt sie, so ergibt sich unter Berücksichtigung der zweiten Formel (5) die erste der Gleichungen (4).

Um nun auch den noch ausstehenden Fall zu erledigen, wo eine der beiden Schaaren g_l und $g_{l'}$, etwa die Schaar

Digitized by Google

$g_{l'}$ nicht vorhanden ist, bemerken wir, dass zufolge der Definitionen des § 2 die Zahlen $\pi_{l'}$, $\nu_{l'}$, $\mathfrak{l}_q'$, λ_q' jetzt die Werthe haben

$$\pi_{l'} = 0\,, \quad \nu_{l'} = n\,, \quad \mathfrak{l}_q' = -(l'-p+1)\,, \quad \lambda_q' = -1\,.$$

Die Behauptung wird also dargestellt durch die Gleichungen

$$\mathfrak{l}_q = 0\,, \quad \nu_l = 0\,, \quad \pi_l = -(l'-p+1)\,, \quad \lambda_q = n-l'+p-2\,,$$

die sich alle auf die beiden ersten zurückführen lassen:

$$\mathfrak{l}_q = 0\,, \quad \nu_l = 0\,.$$

D. h. zu der Schaar g_l gehört immer dann und nur dann keine reciproke Schaar $g_{l'}$, wenn die Schaar g_l keine Specialschaar ist, und wenn zugleich die Abhängigkeit der Punktgruppe G_n in Bezug auf die Schaar g_l den Werth Null hat.

Dass in diesem Falle eine Schaar $g_{l'}$ nicht vorhanden sein kann, ist gewiss. Denn wäre sie vorhanden, so würde sich aus der ersten Gleichung (4) ein negativer Werth der Zahl λ_q' ergeben, was unmöglich ist.

Wir haben also nur noch nachzuweisen, dass es umgekehrt immer dann eine Schaar $g_{l'}$ geben muss, wenn entweder $\mathfrak{l}_q$ oder ν_l grösser als Null ist.

Das zeigen wir natürlich in der Weise, dass wir irgend eine Punktgruppe $G_{l'}$ der Schaar $g_{l'}$ wirklich herstellen.

Sei zunächst $\mathfrak{l}_q > 0$, so ist g_l eine Specialschaar. Zu ihr gehört eine gewisse (in Bezug auf die Punktgruppe G_0) reciproke Specialschaar g_m. Fasst man nun eine Punktgruppe G_m von g_m mit der gegebenen Punktgruppe G_n zusammen, so hat man damit bereits eine zu G_l in Bezug auf die Schaar g_n reciproke Punktgruppe $G_{l'}$ gefunden.

Sei zweitens $\nu_l > 0$, so werden wir annehmen dürfen, es sei $\mathfrak{l}_q = 0$, da wir den Fall $\mathfrak{l}_q > 0$ soeben erledigt haben.

Ist $\pi_l > 0$, so kann man wiederum sofort eine Punktgruppe $G_{l'}$ angeben. Es wird nämlich durch die Punktgruppe G_n eine Schaar von Restgruppen $G_c = G_{l-n}$ bestimmt, die nothwendig Specialgruppen sein müssen, da sich sonst für die Zahl ν_l der Werth Null ergeben würde. Die zu G_c reci-

Digitized by Google

proken Specialgruppen sind dann die gesuchten Punktgruppen $G_{l'}$.

Es bleibt also nur noch der Fall zu erledigen, wo $\nu_l > 0$, $\mathfrak{l}_q = 0$ und $\mathfrak{n}_l = 0$ ist.

Jetzt wird in G_n wenigstens eine Punktgruppe $G_{\bar{a}}$ $(0 \leqq \bar{a} < n)$ vorhanden sein, die gerade noch in einer Punktgruppe G_l enthalten ist, während keine grössere, $G_{\bar{a}}$ einschliessende Gruppe zu G_n gehöriger Punkte mehr einer Punktgruppe der Schaar g_l angehört. Die so bestimmte Punktgruppe $G_{\bar{a}}$ muss ihrerseits wenigstens eine Gruppe G_a von $a = \lambda_q$ Punkten enthalten, die in Bezug auf die Schaar g_l unabhängig sind, und zur Festlegung der natürlich nicht mehr beweglichen Punktgruppe G_l gerade ausreichen.

Wir bezeichnen nun mit G_d und $G_{a'}$ die Restgruppen, die aus den Punktgruppen G_l und G_n durch Wegnahme der Punkte G_a entstehen.

Dann ist nothwendig $d \leqq p$, weil sonst die Punktgruppe G_d beweglich wäre, und $a' \geqq 2$, weil sich im Falle $a = \lambda_q = n - l$ für die Zahl ν_l der Werth Null ergeben würde.

Nehmen wir jetzt die Punktgruppe $G_{a'}$ mit einer Specialgruppe G_q zusammen, so erhalten wir eine Gruppe $G_{a'+2p-2}$ von wenigstens $2p$ Punkten, eine Gruppe also, die wenigstens die Beweglichkeit p hat. Wir werden folglich immer eine mit $G_{a'+2p-2}$ aequivalente Punktgruppe angeben können, die die Punktgruppe G_d enthält. Lässt man dann aus der gefundenen Gruppe die Punkte G_d weg, so bleibt eine Restgruppe von $a' + 2p - 2 - d = n - l + 2p - 2$ Punkten, und diese ist die gesuchte Gruppe $G_{l'}$.

Hiermit sind die ausgesprochenen Sätze in ihrem ganzen Umfange bewiesen.

§ 4.

Weitere Eigenschaften reciproker Schaaren.

An die Entwickelungen des vorigen § lässt sich leicht der Beweis der beiden folgenden Sätze anschliessen:

IV. *Theilt man die Punktgruppe G_n irgendwie in zwei Gruppen G_a und $G_{a'}$, so ist die Anzahl der linear-unabhängigen Gruppen der Schaar g_l, in denen die Punktgruppe G_a enthalten ist, gleich*

Digitized by Google

der Anzahl der Punktgruppen von g_l, in denen die ganze Gruppe G_n enthalten ist, vermehrt um die Abhängigkeit der Restgruppe $G_{a'}$ in Bezug auf die zu g_l reciproke Schaar $g_{l'}$. D. h. es ist

$$\mathfrak{a}_l = \mathfrak{n}_l + \alpha'_{l'} , \quad \mathfrak{a}'_{l'} = \mathfrak{n}_{l'} + \alpha_l . \tag{7}$$

V. *Theilt man die Punktgruppe G_n irgendwie in drei Gruppen G_a, G_b, G_c, so ist die Abhängigkeit der Gruppe G_c von der Gruppe G_a in Bezug auf die Schaar g_l vermehrt um die Abhängigkeit der Gruppe G_c von der Gruppe G_b in Bezug auf die Schaar $g_{l'}$ gleich der Anzahl c der Punkte von G_c.*

Auch diese Sätze gelten *ohne irgend eine Einschränkung.* Die Schaaren g_l und $g_{l'}$ können eigentliche oder uneigentliche Schaaren sein, es kann eine von ihnen mit der Schaar g_0 zusammenfallen oder auch gar nicht vorhanden sein; die Punkte der Gruppen G_a, $G_{a'}$, G_b, G_c können nach Belieben zusammenrücken; es kann auch jede der Zahlen a, a', b, c, n den Werth Null haben, soweit dies mit den Voraussetzungen

$$a + a' = n , \quad a + b + c = n$$

verträglich ist. Nimmt man z. B. im Satze V. $a = b = 0$, so erhält man einen richtigen Satz, nämlich den Satz II.

Bei dem Beweise des Satzes IV. wollen wir den Fall vorwegnehmen, wo die eine Schaar, etwa $g_{l'}$, nicht vorhanden ist. Man hat dann nach den Definitionen des § 2 und den Sätzen des vorigen §

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_l &= l - a - p + 1 , & \mathfrak{a}'_{l'} &= 0 \\ \mathfrak{n}_l &= l - n - p + 1 , & \mathfrak{n}_{l'} &= 0 \\ \alpha_l &= 0 , & \alpha'_{l'} &= a' ; \end{aligned}$$

die Gleichungen (7) sind also erfüllt.

Wir nehmen nunmehr an, es seien beide reciproke Schaaren g_l und $g_{l'}$ zugleich vorhanden.

Die Behauptung des Satzes IV. wird gleichmässig durch jede der beiden Formeln (7) dargestellt, da man ja jede der beiden Punktgruppen, in die man G_n getheilt hat, nach Belieben mit G_a oder mit $G_{a'}$ bezeichnen kann. In unserem Beweise aber müssen wir uns für eine bestimmte Bezeichnung jener beiden Gruppen entscheiden, und wir müssen ausserdem annehmen,

Digitized by Google

dass auch die Schaaren g_l und $g_{l'}$ in ganz bestimmter Weise gewählt sind. Unter dieser Voraussetzung stellen dann die beiden Formeln (7) offenbar zwei *verschiedene* Behauptungen dar, die gesondert bewiesen werden müssen.

Es lässt sich aber immer eine dieser Gleichungen aus der anderen ableiten, so dass man in Wirklichkeit doch nur die Richtigkeit einer von ihnen zu erhärten braucht. Man kann nämlich aus den Gleichungen (1), (6) und (7) und den nach dem Muster der Formel (IX) gebildeten Gleichungen

$$(8) \qquad \begin{cases} \alpha_l = a - \lambda_q + \mathfrak{a}_l - 1 \\ \alpha'_{l'} = a' - \lambda_q' + \mathfrak{a}'_{l'} - 1 \end{cases}$$

die Grössen α_l, $\alpha'_{l'}$, λ_q, λ_q', a, a' eliminiren. Die so entstehende Gleichung ist eine Folge von (2).

Um nun die Richtigkeit z. B. der zweiten Gleichung (7) darzulegen, unterscheiden wir wieder die in § 3 auseinandergehaltenen drei Fälle a), b), c).

a) Da $\mathfrak{n}_l > 0$, $\mathfrak{n}_{l'} > 0$ ist, so ist um so mehr auch $\mathfrak{a}_l > 0$, $\mathfrak{a}'_{l'} > 0$. Man kann daher zwei Restgruppen G_d und $G_{d'}$ herstellen, von denen G_d mit G_a zusammen eine Gruppe der Schaar g_l bildet, während $G_{d'}$ mit $G_{a'}$ vereinigt eine Gruppe der Schaar $g_{l'}$ ausmacht. Diese Punktgruppen G_d und $G_{d'}$ bilden dann ihrerseits zusammen eine Specialgruppe G_q.

Schreibt man nun die erste Gleichung (8) so:

$$\alpha_l = a - \lambda_q + \delta_q ,$$

und drückt man mit Hülfe der Gleichungen

$$\lambda_q = l - p + \mathfrak{l}_q , \quad \delta_q = d - p + \mathfrak{r}_q$$

die Grössen λ_q und δ_q durch $\mathfrak{l}_q$ und $\mathfrak{r}_q$ aus, so ergibt sich

$$(9) \qquad \alpha_l = \mathfrak{r}_q - \mathfrak{l}_q ,$$

eine Gleichung, die auch unmittelbar durch eine einfache begriffliche Betrachtung erhalten werden kann.

Es ist aber

$$\mathfrak{r}_q = \delta_q' + 1 , \quad \delta_q' = \mathfrak{a}'_{l'} - 1 ,$$

also

$$\alpha_l = \mathfrak{a}'_{l'} - \mathfrak{l}_q ;$$

Digitized by Google

diese Gleichung aber erweist sich vermöge der Gleichung (2) als mit der zweiten Gleichung (7) identisch.

b) ($n_l > 0$, $n_{l'} = 0$.) Auch jetzt ist, wie unter a), $\mathfrak{a}_l > 0$, aber nicht nothwendig auch $\mathfrak{a}'_{l'} > 0$. Nehmen wir zuerst an, es sei auch $\mathfrak{a}'_{l'} > 0$, so kann man, wie soeben, die Punktgruppen G_d und $G_{d'}$ herstellen. Man gelangt dann zu den Formeln (7) genau wie unter a). Sei zweitens $\mathfrak{a}'_{l'} = 0$, so gibt es keine Restgruppe $G_{d'}$. Es wird dann nothwendig auch $\mathfrak{b}_q = 0$. Da überdies auch $\mathfrak{l}_q = 0$ ist, so folgt aus der auch hier geltenden Gleichung (9) $\alpha_l = 0$. Man hat daher $\mathfrak{a}'_{l'} = n_{l'} + \alpha_l = 0$. Die zweite Gleichung (7) gilt also auch in diesem Falle.

c) ($n_l = 0$, $n_{l'} = 0$.) Hier liegen drei Möglichkeiten vor. Entweder, es ist $\mathfrak{a}_l > 0$, $\mathfrak{a}'_{l'} > 0$: dann kommt man zu den Formeln (7), wie unter a). Oder es ist z. B. $\mathfrak{a}_l > 0$, $\mathfrak{a}'_{l'} = 0$. Dann ergibt sich die zweite Gleichung (7) wie bei der unter b) an zweiter Stelle gemachten Annahme. Oder endlich, es ist $\mathfrak{a}_l = 0$, $\mathfrak{a}'_{l'} = 0$. Im letzten Falle hat man

$$\mathfrak{a} \geqq \lambda_q + 1 , \quad \mathfrak{a}' \geqq \lambda_q' + 1 ,$$

woraus durch Addition, unter Berücksichtigung von (1), folgt:

$$l + l' - 2p \geqq \lambda_q + \lambda_q' .$$

Es zeigen aber die Formeln (6), in Verbindung mit (2), dass hier nur das Gleichheitszeichen möglich ist. Man hat also

$$a = \lambda_q + 1 , \quad a' = \lambda_q' + 1 ,$$

und folglich, weil nach Voraussetzung $\mathfrak{a}_l = \mathfrak{a}'_{l'} = 0$ ist, $\alpha_l = \alpha'_{l'} = 0$. Ueberdies ist auch $n_l = n_{l'} = 0$; die Gleichungen (7) sind also wiederum erfüllt.

Hiermit ist der Satz IV. bewiesen.

Um auch den letzten Satz durch eine Formel auszudrücken, bezeichnen wir mit $G_{a'}$ die aus G_b und G_c zusammengesetzte Punktgruppe, und mit $G_{b'}$ die Punktgruppe, die aus G_a und G_c besteht. Die Behauptung ist dann:

$$(\beta_l' - \alpha_l) + (\alpha'_{l'} - \beta_{l'}) = c . \tag{10}$$

In der That hat man nach Formel (V)

Digitized by Google

$$\beta_l' = b' - \lambda_q + \mathfrak{b}_l' - 1\,, \qquad \alpha_l = a - \lambda_q + \mathfrak{a}_l - 1\,,$$
$$\alpha'_{l'} = a' - \lambda_{q'} + \mathfrak{a}'_{l'} - 1\,, \qquad \beta_{l'} = b - \lambda_{q'} + \mathfrak{b}_{l'} - 1\,,$$

woraus sich unter Berücksichtigung von (7) sofort die Formel (10) ergibt.

§ 5.

Besondere Fälle.

Hervorgehoben zu werden verdient der Specialfall des Satzes IV., in dem die Zahl $\alpha'_{l'}$ den Werth Null hat. Man erhält dann ein Kennzeichen dafür, dass eine Punktgruppe der Schaar g_l, die einen Theil G_a der Punkte von G_n enthält, in Folge dessen auch sämmtliche Punkte der Restgruppe $G_{a'}$ enthalten muss; und ebenso gibt der Satz V. ein Kennzeichen dafür, dass die G_a enthaltenden Punktgruppen der Schaar g_l nur einen Theil G_c der Punkte von $G_{a'}$ enthalten:

Wenn alle die Punktgruppen der Schaar g_l, in denen die Punktgruppe G_a enthalten ist, noch gewisse weitere Punkte G_c der Punktgruppe G_n enthalten, so ist die Punktgruppe G_c von den noch übrigen Punkten G_b der Punktgruppe G_n unabhängig in Bezug auf die reciproke Schaar $g_{l'}$, und umgekehrt.

Um aus der Punktgruppe $G_{a'} = G_{n-a}$ die *grösste* Punktgruppe G_c der genannten Eigenschaft herauszufinden, hat man offenbar nur eine endliche Zahl von Versuchen nöthig: Es kommt darauf an, die kleinste in $G_{a'}$ enthaltene Punktgruppe G_b zu bestimmen, die in Bezug auf die Schaar $g_{l'}$ schon die nämliche Abhängigkeit hat, wie die Punktgruppe $G_{a'}$ selbst. Nimmt man z. B. den einfachsten Fall, dass die Punkte von $G_{a'}$ alle getrennt sind, so braucht man nur alle a' in $G_{a'}$ enthaltenen Punktgruppen $G_{a'-1}$ zu untersuchen. Gibt es eine Punktgruppe der Schaar $g_{l'}$, die eine solche Punktgruppe $G_{a'-1}$, aber nicht zugleich auch den letzten Punkt von $G_{a'}$ enthält, so gehört dieser Punkt zu der Punktgruppe G_c.

Das hier aufgestellte Kriterium, das eine Eigenschaft der Schaar g_l durch Betrachtung der reciproken Schaar $g_{l'}$ zu erkennen lehrt, ist *erschöpfend*; denn eine Abhängigkeit der Punktgruppe G_n in Bezug auf die Schaar g_l kann überhaupt nur

Digitized by Google

dann eintreten, wenn die reciproke Schaar $g_{l'}$ wirklich vorhanden ist. (S. 165.)

Die Maximalzahl der Punkte von G_n, die unabhängig sind in Bezug auf die Schaar $g_{l'}$, ist nach dem Satze II. gleich ν_l. Die übrigen $\nu_{l'}$ Punkte sind dann, nach dem Satze IV., immer unabhängig in Bezug auf die Schaar g_l. Wie man aber auch die Punktgruppe G_n in eine G_{ν_l} und eine $G_{\nu_{l'}}$ zerlegt haben möge, immer ist die Abhängigkeit von G_{ν_l} in Bezug auf die Schaar $g_{l'}$ gleich der Abhängigkeit von $G_{\nu_{l'}}$ in Bezug auf die Schaar g_l.

Wie in der Einleitung bereits angedeutet wurde, kann das Hauptergebniss dieser Untersuchung, der Satz IV., als eine Erweiterung des Riemann-Roch'schen Satzes angesehen werden, von dem wir bei der Beweisführung ausgegangen sind. Identificirt man nämlich die Schaar $g_{l'}$ mit der Specialschaar g_q selbst, so nimmt die erste Gleichung (7) die einfachere Form

$$\mathfrak{a}_l - 1 = \alpha_{q'}$$

an. Die linke Seite bedeutet hier die Beweglichkeit der Punktgruppe $G_{a'}$, die rechte ihre Abhängigkeit in Bezug auf die Schaar g_q. Zugleich geht auch der Satz auf S. 170 in eine bekannte Folgerung des Riemann-Roch'schen Satzes über.

Zum Schluss mag noch der beiden Fälle $p = 1$ und $p = 0$ gedacht werden. Auch in diesen einfachsten Fällen bleiben die aufgestellten Sätze richtig, wie schon hervorgehoben worden ist — sie verlieren aber ihren eigentlichen Inhalt.

Nimmt man z. B. an, es sei $p = 0$, so hat man nach Formel (1) $l + l' = n - 2$. Man wird dann, ohne der Allgemeinheit Abbruch zu thun, voraussetzen dürfen, es sei $a \geqq l + 1$, $a' \leqq l' + 1$. Auf Grund der Definitionen des § 2 ergeben sich nunmehr, wenn g_l und $g_{l'}$ vorhanden sind, die Werthe

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{l}_q = 0, & \lambda_q = l, & \mathfrak{n}_l = 0, & \nu_l = l' - 1 \\ \mathfrak{l}_{q'} = 0, & \lambda_{q'} = l', & \mathfrak{n}_{l'} = 0, & \nu_{l'} = l - 1 \\ \mathfrak{a}_l = 0, & \mathfrak{a}'_{l'} = l' - a' + 1, & \alpha_l = a - l - 1, & \alpha'_{l'} = 0, \end{array}$$

die thatsächlich mit den entwickelten Formeln in Einklang stehen.

Digitized by Google

E. Study, *Ueber quadratische Formen und Liniencomplexe.*

1.

Die fundamentale Bedeutung der Reihenentwickelungen der Invariantentheorie für das Studium der projectiven Geometrie eines Gebietes λ^{ter} Stufe ist von dem Verfasser vor Kurzem ausführlich dargelegt worden. (S. dessen »Methoden zur Theorie der ternären Formen« §§ 3—9, § 12. Wir werden diese Schrift weiterhin mit M. T. F. citiren.) Im Folgenden soll zunächst gezeigt werden, dass eine beliebig vorgelegte quadratische Form von nicht verschwindender Discriminante zur Entstehung einer neuen Reihenentwickelung ganz ähnlicher Art Veranlassung gibt, die für die continuirliche Gruppe der linearen Transformationen jener quadratischen Form auch eine ganz ähnliche Bedeutung hat, wie die bekannten Reihenentwickelungen für die allgemeine projective Gruppe.

Das *erste Glied* der aufzustellenden Reihenentwickelung ist in dem Falle $\lambda = 3$ bereits von Herrn Lindemann angegeben worden [1].

Zur Darstellung der symbolischen Producte des Gebietes λ^{ter} Stufe bedienen wir uns grosser deutscher Buchstaben und geschweifter Klammern, desselben Systems von Bezeichnungen also, das in M. T. F. für Gebiete höherer Stufe eingeführt und consequent angewandt worden ist.

Eine quadratische Form des Gebietes λ^{ter} Stufe, in der die Coordinaten $\mathfrak{U}_1 \ldots \mathfrak{U}_\lambda$ einer linearen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{U}$ $(\lambda-1)^{ter}$

1) Bull. de la Soc. math. t. VI, p. 199.

Digitized by Google

Stufe oder $(\lambda-2)^{\text{ter}}$ Dimension auftreten, sei dargestellt durch den Ausdruck

$$(1)\quad \Gamma = (\mathfrak{U}\mathfrak{Q})^2 = \sum_1^\lambda{}_i \sum_1^\lambda{}_k \mathfrak{Q}_i \mathfrak{Q}_k u_i u_k = \sum_1^\lambda{}_i \sum_1^\lambda{}_k \mathfrak{Q}_{ik} u_i u_k \ .$$

Wir bilden nun die Covariante

$$(2)\quad G = (\mathfrak{G}\mathfrak{x})^2 = \frac{1}{(\lambda-1)!}(\mathfrak{Q}_1 \ldots \mathfrak{Q}_{\lambda-1}\mathfrak{x})^2 \ ,$$

oder in unsymbolischer Form

$$G = -\begin{vmatrix} \mathfrak{Q}_{11} & \mathfrak{Q}_{12} & \ldots & \mathfrak{Q}_{1\lambda} & \mathfrak{x}_1 \\ \mathfrak{Q}_{21} & \mathfrak{Q}_{22} & \ldots & \mathfrak{Q}_{2\lambda} & \mathfrak{x}_2 \\ . & . & \ldots & . & . \\ \mathfrak{Q}_{\lambda 1} & \mathfrak{Q}_{\lambda 2} & \ldots & \mathfrak{Q}_{\lambda\lambda} & \mathfrak{x}_\lambda \\ \mathfrak{x}_1 & \mathfrak{x}_2 & \ldots & \mathfrak{x}_\lambda & 0 \end{vmatrix}$$

und die Invariante

$$(3)\quad \mathfrak{Z} = \frac{1}{\lambda}(\mathfrak{G}\mathfrak{Q})^2 = \frac{1}{\lambda!}(\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2 \ldots \mathfrak{Q}_\lambda)^2 = |\mathfrak{Q}_{11}\mathfrak{Q}_{22}\ldots\mathfrak{Q}_{\lambda\lambda}| \ .$$

Zwischen den Formen Γ und G besteht bekanntlich ein Reciprocitätsverhältniss, das seinen analytischen Ausdruck in den Identitäten

$$(4)\quad \frac{1}{(\lambda-1)!}(\mathfrak{G}_1 \ldots \mathfrak{G}_{\lambda-1}\mathfrak{U})^2 = \mathfrak{Z}^{\lambda-2}\cdot(\mathfrak{U}\mathfrak{Q})^2$$

und

$$(5)\quad \frac{1}{\lambda!}(\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2 \ldots \mathfrak{G}_\lambda)^2 = \mathfrak{Z}^{\lambda-1}$$

findet; ausserdem hat man die für das Folgende wichtige Relation

$$(6)\quad (\mathfrak{G}\mathfrak{Q})(\mathfrak{G}\mathfrak{x})(\mathfrak{U}\mathfrak{Q}) = (\mathfrak{U}\mathfrak{x})\cdot\mathfrak{Z} \ .$$

Wie die aufgestellten Formeln zeigen, wird die Beziehung zwischen den Formen G und Γ völlig umkehrbar, wenn man

Digitized by Google

die Invariante $\mathfrak{Z}$ gleich Eins setzt. Um den folgenden Entwickelungen mehr Symmetrie zu geben, wollen wir auch wirklich diese Voraussetzung einführen; es wird dann keine Schwierigkeit haben, aus jeder einzelnen Formel nachträglich die andere wieder abzuleiten, die an ihre Stelle treten muss, wenn man der Invariante $\mathfrak{Z}$ einen beliebigen von Null verschiedenen Werth beilegt.

Es seien nun $F = \{\mathfrak{A}\mathfrak{x}\}^m$ und $\Phi = \{\mathfrak{U}\mathfrak{P}\}^n$ irgend welche Formen des Gebietes λ^{ter} Stufe, deren Ordnungszahlen der Bedingung $m \geqq n$ genügen. Wir führen dann für die Polare der Form Φ in Bezug auf die Form F die Bezeichnung $[F, \Phi]$ ein: so dass

$$[F, \Phi] = \{\mathfrak{A}\mathfrak{P}\}^n \{\mathfrak{A}\mathfrak{x}\}^{m-n} ,$$

dass also insbesondere

$$[F, \Gamma^k] = [\{\mathfrak{A}\mathfrak{Q}\}^2]^k \{\mathfrak{A}\mathfrak{x}\}^{m-2k} . \tag{7}$$

(Vgl. M. T. F. § 3 u. ff.) Bilden wir jetzt den Ausdruck $[G^k . F, \Gamma]$, so erhalten wir nach den allgemeinen Regeln der Polarenbildung

$$\begin{aligned}
&\frac{(m+2k)(m+2k+1)}{2} \cdot [(\{\mathfrak{G}\mathfrak{x}\}^2)^k \cdot \{\mathfrak{A}\mathfrak{x}\}^m, \{\mathfrak{U}\mathfrak{Q}\}^2] \\
&= \frac{m(m-1)}{2} \cdot G^k . [F, \Gamma] + k . G^{k-1} . \{\mathfrak{G}\mathfrak{Q}\}^2 . F \\
&+ 2mk . G^{k-1} . \{\mathfrak{G}\mathfrak{Q}\}\{\mathfrak{G}\mathfrak{x}\}\{\mathfrak{A}\mathfrak{Q}\}\{\mathfrak{A}\mathfrak{x}\}^{m-1} \\
&+ 2k(k-1) . G^{k-2} . \{\mathfrak{G}_1\mathfrak{Q}\}\{\mathfrak{G}_2\mathfrak{Q}\}\{\mathfrak{G}_1\mathfrak{x}\}\{\mathfrak{G}_2\mathfrak{x}\} . F ;
\end{aligned}$$

und hieraus geht bei Anwendung des Formel (6) die Identität hervor:

$$\left.\begin{aligned}
&(m+k)(m+2k-1) . [G^k . F, \Gamma] \\
&= G^{k-1} . 2k(2m+2k+\lambda-2) . F + m(m-1) . G . [F, \Gamma] .
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Wir behaupten nun:

Die Form $(F = \mathfrak{A}\mathfrak{x})^m$ lässt sich auf eine einzige Art in eine nach Potenzen von $G = \{\mathfrak{G}\mathfrak{x}\}^2$ fortschreitende Reihe entwickeln, so dass die Form $\Gamma = \{\mathfrak{U}\mathfrak{Q}\}^2$ zu dem Coefficienten eines jeden Gliedes apolar ist.

In der That gelingt es, in dem System der Formen F und Γ

Digitized by Google

zunächst eine lineare Covariante von F herzustellen, zu der die Form Γ apolar ist. Man hat nur in dem Ausdruck

$$(9)\quad F_0 = F + \mathfrak{a}_1 \,.\, G \,.\, [F, \Gamma] + \mathfrak{a}_2 \,.\, G^2 \,.\, [F, \Gamma^2] + \cdots$$

die Zahlencoefficienten $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots$ so zu bestimmen, dass $[F_0, \Gamma] = 0$ wird. Es ergibt sich aber nach Formel (8):

$$\begin{aligned}
[F_0, \Gamma] = &\left\{1 + \frac{2\,.\,1\,.\,(2m+\lambda-4)}{m(m-1)}\,\mathfrak{a}_1\right\}.[F, \Gamma] \\
&+\left\{\frac{(m-2)\,(m-3)}{m(m-1)}\,\mathfrak{a}_1 + \frac{2\,.\,2\,.\,(2m+\lambda-6)}{m(m-1)}\,\mathfrak{a}_2\right\}.G\,.\,[F, \Gamma^2] \\
&+\left\{\frac{(m-4)\,(m-5)}{m(m-1)}\,\mathfrak{a}_2 + \frac{2\,.\,3\,.\,(2m+\lambda-8)}{m(m-1)}\,\mathfrak{a}_3\right\}.G^2.[F, \Gamma^3] \\
&+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .
\end{aligned}$$

Setzt man hier jeden einzelnen Coefficienten gleich Null, so ergeben sich für die Grössen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \ldots$ die Werthe

$$(10)\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{a}_1 &= -\frac{1}{1}\cdot\frac{\binom{m}{2}}{2m+\lambda-4}, \\
\mathfrak{a}_2 &= +\frac{1}{1\,.\,2}\cdot\frac{\binom{m}{2}\binom{m-2}{2}}{(2m+\lambda-4)\,(2m+\lambda-6)}, \\
\mathfrak{a}_3 &= -\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\cdot\frac{\binom{m}{2}\binom{m-2}{2}\binom{m-4}{2}}{(2m+\lambda-4)\,(2m+\lambda-6)\,(2m+\lambda-8)} \\
&\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .,
\end{aligned}\right.$$

deren Bildungsgesetz augenfällig ist.

Indem wir nun denselben Process, durch den die Covariante F_0 aus F hervorgeht, auf die ganze Reihe der Formen $[F, \Gamma]$, $[F, \Gamma^2], \ldots$ anwenden, erhalten wir eine Reihe von Covarianten der Form F, von den Ordnungen m, $m-2$, $m-4, \ldots$, zu deren jeder die Form Γ apolar ist; und aus diesen Covarianten und Potenzen von G lässt sich dann die Form F selbst wieder zusammensetzen.

Schreiben wir allgemein

Digitized by Google

$$(11)\quad \mathfrak{a}_{ik} = \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{\binom{m-2i}{2}\binom{m-2i-2}{2}\ldots\binom{m-2i-2k+2}{2}}{(2m-2i+\lambda-4)(2m-2i+\lambda-6)\ldots(2m-2i+\lambda-2k-2)},$$

so können wir die Entwickelung ansetzen

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} F = \{F &+ \mathfrak{a}_{01} \,.\, G \,.\, [F, \Gamma] + \mathfrak{a}_{02} \,.\, G^2 \,.\, [F, \Gamma^2] + \cdots\cdots\} \\ &+ \mathfrak{b}_1 \,.\, G \,.\, \{[F, \Gamma] + \mathfrak{a}_{11} \,.\, G \,.\, [F, \Gamma^2] + \cdots\cdots\} \\ &+ \mathfrak{b}_2 \,.\, G^2 \,.\, \{[F, \Gamma^2] + \cdots\cdots\} \\ &+ \cdots\cdots \\ &\cdots \end{aligned}\right.$$

Hier lassen sich die Constanten b_1, b_2, ... so bestimmen, dass die Gleichung eine Identität wird; es ergeben sich dann die Ausdrücke

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{1} \cdot \frac{\binom{m}{2}}{(2m+\lambda-4)}, \\ b_2 &= \frac{1}{1\,.\,2} \cdot \frac{\binom{m}{2}\binom{m-2}{2}}{(2m+\lambda-6)(2m+\lambda-8)}, \\ b_3 &= \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} \cdot \frac{\binom{m}{2}\binom{m-2}{2}\binom{m-4}{2}}{(2m+\lambda-8)(2m+\lambda-10)(2m+\lambda-12)} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}\right.$$

deren Bildungsgesetz wiederum deutlich ist.

Die Reihenentwickelung, deren Glieder wir hiermit bestimmt haben, hat Eigenschaften ähnlich den gewöhnlichen Reihenentwickelungen der Invariantentheorie (vgl. M. T. F., § 3 und § 4):

1) Sie ist *eindeutig*.

2) Die Coefficienten der einzelnen Entwickelungsglieder sind von einander unabhängig, abgesehen natürlich von der Beschränkung, die durch die Gleichungen $[F_0, \Gamma] = 0$ u. s. w. ausgedrückt wird.

3) Das Verschwinden der k ersten Glieder unserer Reihe

Digitized by Google

ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Form F den Factor G^k hat.

4) Das Verschwinden aller Glieder vom $(k+1)^{\text{ten}}$ an ist der Ausdruck dafür, dass die Form Γ^k zu der Form F apolar ist.

5) Der Reihenentwickelung der Form $F = \{\mathfrak{A}\mathfrak{X}\}^m$ steht dualistisch eine Reihenentwickelung einer Form $\Phi = \{\mathfrak{U}\mathfrak{P}\}^m$ gegenüber, bei der die Formen G und Γ nur ihre Rollen gewechselt haben.

6) Verschwindet in der Reihenentwickelung der Form F das k^{te} Glied, so ist F conjugirt zu jedem Product $\Gamma^k.\{\mathfrak{U}\mathfrak{P}_k\}^{m-2k}$, worin $\{\mathfrak{U}\mathfrak{P}_k\}^{m-2k}$ eine Form bedeutet, zu der die Form G apolar ist — und umgekehrt.

7) Jedes Entwickelungsglied der Form F ist conjugirt zu jedem Entwickelungsglied der Form Φ, mit Ausnahme des Gliedes, das denselben Index hat; u. s. w.

Als eine besondere Folgerung der hier entwickelten Theorie mag ein Satz genannt werden, der als eine Verallgemeinerung eines bereits von Herrn Lindemann ausgesprochenen Theorems betrachtet werden kann:

Durch die Schnittcurve einer allgemeinen Fläche 2. Classe und einer beliebigen Fläche n. O. kann eine einzige Fläche n. O. gelegt werden, zu der die Fläche 2. Classe apolar ist.

Von besonderem Interesse ist der Fall $n = 3$. Hier wird die Schnittcurve die allgemeine Normalcurve des Geschlechtes 4. Es zeigt sich also die Möglichkeit, die Theorie der algebraischen Functionen vom Geschlecht 4 z. B. mit der Theorie des Pentaeders einer Fläche 3. O. oder mit der Theorie der 27 Geraden in Verbindung zu bringen.

Die in diesem § entwickelten Sätze haben noch eine besondere, ihnen im Allgemeinen nicht zukommende Bedeutung in den Fällen $\lambda = 3$, $\lambda = 4$, $\lambda = 5$ und $\lambda = 6$. Indem ich mir vorbehalte, die erstgenannten besonderen Fälle demnächst ausführlich zu behandeln, werde ich hier nur auf den Fall $\lambda = 6$ näher eingehen.

Ist $\lambda = 6$, so kann man bekanntlich die 6 Grössen $\mathfrak{U}_1 \ldots \mathfrak{U}_6$ den Coefficienten der Gleichung eines linearen Complexes im dreifach ausgedehnten Raume gleich setzen. Die Gleichung $\{\mathfrak{U}\mathfrak{P}\}^2 = 0$ kann dann mit der quadratischen Relation identificirt werden, deren Bestehen besagt, dass der lineare Complex

Digitized by Google

ausartet und sich auf die Gesammtheit aller Geraden reducirt, die eine gewisse gerade Linie treffen.

Es ergibt sich daraus, dass unsere Reihenentwickelung im Falle $\lambda = 6$ auch für die Theorie der *quaternären* Formen von Bedeutung ist.

Um den hier angedeuteten Zusammenhang in invarianter Form darstellen zu können, ist es nothwendig, zuvor die bekannte Abbildung der linearen Complexe des dreifach ausgedehnten Raumes auf die Punkte eines Raumes von fünf Dimensionen etwas näher zu untersuchen.

2.

Wir werden weiterhin Formen zu betrachten haben, die Veränderliche eines Gebietes 6ter Stufe und quaternäre Veränderliche zugleich enthalten. Für die Veränderlichen und invarianten Processe des Gebietes 6ter Stufe werden wir dabei die bisherige Bezeichnungsweise: deutsche Buchstaben und geschweifte Klammern beibehalten; zur Darstellung der Operationen des quaternären Gebiets wollen wir dagegen, um Verwechslungen vorzubeugen, ausschliesslich Buchstaben des grossen lateinischen Alphabets und runde Klammern verwenden.

$P, Q, R, \ldots, X, Y, Z, \ldots$ seien Symbole von Punkten,

$A, B, C, \ldots, U, V, W, \ldots$ Symbole von Ebenen;

$$(UX) = U_1X_1 + U_2X_2 + U_3X_3 + U_4X_4$$

sei der Ausdruck, dessen Verschwinden anzeigt, dass der Punkt X und die Ebene U vereinigt liegen:

$$(XX'YY') = |\, X_1X_2'Y_3Y_4' \,|$$
$$(UU'VV') = |\, U_1U_2'V_3V_4' \,|$$

seien die Ausdrücke, die verschwinden müssen, wenn die Punkte X, X', Y, Y' in einer Ebene liegen oder die Ebenen U, U', V, V' durch einen Punkt gehen sollen.

In der Theorie der quaternären Formen oder der projectiven Geometrie des dreifach ausgedehnten Raumes steht mitten inne zwischen den Punkten und Ebenen als ein drittes, jenen gleichwerthiges, zu sich selbst dualistisches Gebilde die gerade Linie, oder mit einer leichten Verallgemeinerung der *lineare Complex*.

Digitized by Google

Dies Gebilde hat eine doppelte Entstehungsweise, da man sowohl die Punkte, als auch die Ebenen des Raumes als die ursprünglichen Raumelemente ansehen kann; ein und dieselbe gerade Linie kann als Schnittlinie zweier Ebenen A, A' und als Verbindungslinie zweier Punkte P, P' aufgefasst werden. Die linke Seite ihrer Gleichung erscheint daher in zwei verschiedenen Formen:

$$(AA'UU') \ , \quad (PP'XX') \ , \tag{14}$$

deren Identität durch jede der beiden Formeln

$$\begin{aligned} (AA'UU') &= (UP)(U'P') - (U'P)(UP') \\ (PP'XX') &= (AX)(A'X') - (AX')(A'X) \end{aligned} \tag{15}$$

vollständig zum Ausdruck gebracht wird; und dieselbe doppelte Bezeichnung kommt auch den linearen Complexen zu, wenn man festsetzt, dass in (14) erst die zweireihigen Determinanten der Grössen A_i, A_i' einerseits und der Grössen P_i, P_i' andrerseits eine reale Bedeutung haben sollen.

Um nun die Mannigfaltigkeit der linearen Complexe des gewöhnlichen Raumes auf die Punkte eines Raumes von fünf Dimensionen abzubilden, haben wir nur eine Form herzustellen, die die Veränderliche $\mathfrak{U}$ eines Gebietes sechster Stufe und zugleich eine Linie eines Gebietes vierter Stufe linear enthält; wir bezeichnen sie symbolisch durch

$$\mathfrak{M} = \{\mathfrak{U}\,\mathfrak{M}\}(MM'XX') \ , \tag{16}$$

wobei festgesetzt werden muss, dass erst die Producte der 6 Grössen $\mathfrak{M}_i$ mit den 6 zweizeiligen Determinanten der Grössen $M_i M_i'$ zusammen eine reale Bedeutung haben. (Vgl. M. T. F. § 11.) Die Form (16) enthält also 36 Coefficienten; und diese kann man noch in mannichfacher Weise so wählen, dass der Ausdruck (16), gleich Null gesetzt, bei veränderlichem $\mathfrak{U}$ die Gesammtheit aller linearen Complexe des Raumes darstellt. Eine derartige, besonders zweckmässige Wahl der Coefficienten der Form $\mathfrak{M}$ ist z. B. bei der folgenden Annahme getroffen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} = {} & \mathfrak{U}_1(X_1X_2' - X_2X_1') + \mathfrak{U}_2(X_1X_3' - X_3X_1') + \mathfrak{U}_3(X_1X_4' - X_4X_1') \\ & + \mathfrak{U}_4(X_3X_4' - X_4X_3') + \mathfrak{U}_5(X_4X_2' - X_2X_4') + \mathfrak{U}_6(X_2X_3' - X_3X_2') \ ; \end{aligned}$$

Digitized by Google

da es uns aber auf die invarianten Processe ankommt, durch die aus der Form $\mathfrak{M}$ gewisse ihrer Covarianten hervorgehen, so werden wir die weiterhin zu entwickelnden Formeln so schreiben, wie sie sich bei allgemeinster Wahl von $\mathfrak{M}$ darstellen, da sonst die Natur jener Processe nicht hervortreten würde.

Wie in M. T. F. § 11 gezeigt worden ist, ist mit der Form (16) noch eine zweite verbunden, die ihr in doppelter Hinsicht dualistisch gegenübersteht und die nämliche Abbildung, aber im umgekehrten Sinne vermittelt; wir bezeichnen sie durch

$$(17) \qquad \mathfrak{N} = \{\mathfrak{N}\mathfrak{X}\}\,(NN'UU') \quad .$$

Wir denken uns diese Form irgendwie als Covariante fünften Grades der Form $\mathfrak{M}$ dargestellt, und normiren die Form $\mathfrak{M}$ dann nachträglich so, dass die simultane Invariante

$$(18) \qquad J = \tfrac{1}{8}\,\{\mathfrak{N}\mathfrak{M}\}\,[(NM)\,(N'M') - (NM')\,(N'M)]$$

den Werth Eins erhält, und dass die Grundform $\mathfrak{M}$ aus ihrer Covariante $\mathfrak{N}$ selbst wieder durch den nämlichen Process hervorgeht, durch den $\mathfrak{N}$ aus $\mathfrak{M}$ entstanden ist. Damit ist dann die Form $\mathfrak{N}$ völlig bestimmt; bei der obigen besonderen Wahl von $\mathfrak{M}$ z. B. erhält sie den Werth

$$\begin{aligned}\mathfrak{N} = {} & \mathfrak{X}_1(U_1U_2' - U_2U_1') + \mathfrak{X}_2(U_1U_3' - U_3U_1') + \mathfrak{X}_3(U_1U_4' - U_1U_4') \\ & + \mathfrak{X}_4(U_3U_4' - U_4U_3') + \mathfrak{X}_5(U_1U_2' - U_2U_4') + \mathfrak{U}_6(U_2U_3' - U_3U_2').\end{aligned}$$

(Bei dieser Annahme von $\mathfrak{M}$ ist es also nicht mehr nöthig, $\mathfrak{M}$ durch Hinzufügung eines Zahlenfactors nachträglich abzuändern.)

Zwischen den nunmehr als bekannt anzusehenden Formen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ bestehen zwei Relationen, deren jede besagt, dass beide Formen dieselbe Abbildung darstellen (vgl. M. T. F. § 11, Formel (3) und (4 a) oder (5)):

$$(19) \qquad \{\mathfrak{U}\mathfrak{M}\}\,\{\mathfrak{N}\mathfrak{X}\}\,[(NM)\,(N'M') - (NM')\,(N'M)] = \{\mathfrak{U}\mathfrak{X}\}$$

und

$$(20) \qquad \{\mathfrak{N}\mathfrak{M}\}\,(MM'XX')\,(NN'UU') = (UX)\,(U'X') - (UX')\,(U'X)\,,$$

von denen die letzte auch in einer der drei folgenden Gestalten geschrieben werden kann:

Digitized by Google

$$(20b)\quad \{\mathfrak{N}\mathfrak{M}\}\,(MM'XX')\,[(NY)\,(N'Y') - (NY')(N'Y)] = (XX'YY'),$$

$$(20c)\quad \{\mathfrak{N}\mathfrak{M}\}\,(NN'UU')\,[(VM)\,(V'M') - (V'M)(VM')] = (UU'VV')$$

$$(20d)\quad \{\mathfrak{N}\mathfrak{M}\}[(UM)(U'M') - (U'M)(UM')][(NX)(N'X') - (NX')(N'X)] = (UX)\,(U'X') - (UX')\,(U'X).$$

Setzt man die Form (16) gleich Null, so wird dadurch jeder linearen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{U}$ fünfter Stufe des Gebietes sechster Stufe ein linearer Complex des Raumes von drei Dimensionen zugeordnet, umgekehrt aber jedem Complex ein Punkt des Gebietes sechster Stufe. Sucht man nun zu der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{U}$ den entsprechenden Complex, hierauf zu diesem Complex wieder den entsprechenden Punkt, so enthält man den *Pol* der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{U}$ in Bezug auf eine quadratische Mannigfaltigkeit, die durch Nullsetzen der Covariante

$$(21)\qquad \mathfrak{Q} = \{\mathfrak{U}\mathfrak{Q}\}^2 = \{\mathfrak{U}\mathfrak{M}_1\}\,\{\mathfrak{U}\mathfrak{M}_2\}\,(M_1 M_1' M_2 M_2')$$

dargestellt wird. Ebenso gelangt man zu der Covariante

$$(22)\qquad \mathfrak{G} = \{\mathfrak{G}\mathfrak{X}\}^2 = \{\mathfrak{N}_1\mathfrak{X}\}\ \{\mathfrak{N}_2\mathfrak{X}\}\ (N_1 N_1' N_2 N_2')\ .$$

Die quadratischen Mannigfaltigkeiten, die durch die Gleichungen $\mathfrak{Q} = 0$ und $\mathfrak{G} = 0$ dargestellt werden, haben selbst eine einfache geometrische Bedeutung: Die ihnen angehörigen Räume $\mathfrak{U}$ und Punkte $\mathfrak{X}$ sind dieselben Räume und Punkte, die durch die Formen $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{M}$ den Geraden des Raumes zugeordnet werden. In der That findet man sofort die Relationen

$$(23)\quad \begin{aligned} \{\mathfrak{N}_1\mathfrak{Q}\}\,\{\mathfrak{N}_2\mathfrak{Q}\}\,(N_1N_1'UU')(N_2N_2'VV') &= (UU'VV') \\ \{\mathfrak{G}\mathfrak{M}_1\}\,\{\mathfrak{G}\mathfrak{M}_2\}\,(M_1M_1'XX')\,(M_2M_2'YY') &= (XX'YY')\ , \end{aligned}$$

die gerade dieses Verhältniss zum Ausdruck bringen, wenn man die Gerade $\widehat{UU'}$ mit der Geraden $\widehat{VV'}$ und die Gerade $\widehat{XX'}$ mit der Geraden $\widehat{YY'}$ zusammenfallen lässt. Macht man nicht diese besonderen Ausnahmen, so wird man die geometrische Bedeutung der Formeln (21) ... (23) wie folgt aussprechen können:

Es seien $(A_1A_1'UU')$, $(P_1P_1'XX')$ und $(A_2A_2'UU')$, $(P_2P_2'XX')$ die doppelten Darstellungen zweier linearer Complexe C_1 und C_2, so dass zwischen den Symbolen $\widehat{A_1A_1'}$ und den Symbolen $\widehat{P_1P_1'}$, sowie zwischen den Symbolen $\widehat{A_2A_2'}$ und den

Digitized by Google

Symbolen $\widehat{P_2 P_2'}$ die Relationen (15) bestehen; und es mögen beide Complexe *conjugirt* sein, d. h. es möge die simultane Invariante

$$[C_1\ C_2] = (A_1 A_1' A_2 A_2') = (P_1 P_1' P_2 P_2')$$
$$= (A_1 P_2)(A_1' P_2') - (A_1 P_2')(A_1' P_2) = (A_2 P_1)(A_2' P_1') - (A_2 P_1')(A_2' P_1)$$

den Werth Null haben.

Dann werden den Complexen C_1 und C_2 durch die Form $\mathfrak{M}$ zwei Punkte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ des Gebietes sechster Stufe, und durch die Form $\mathfrak{N}$ zwei Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ zugeordnet.

Es sind nun nach (23) $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ *conjugirt* in Bezug auf die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{G} = 0$ und $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ conjugirt in Bezug auf die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{Q} = 0$; d. h. es bestehen die Gleichungen

$$\{\mathfrak{G}\mathfrak{P}_1\}\{\mathfrak{G}\mathfrak{P}_2\} = 0\ , \quad \{\mathfrak{A}_1\mathfrak{Q}\}\{\mathfrak{A}_2\mathfrak{Q}\} = 0\ .$$

Ferner aber sind nach dem über die Bedeutung der Formen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{Q}$ Gesagten $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{P}_1$ und natürlich ebenso $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{P}_2$ *Polare und Pol* sowohl in Bezug auf die quadratische Mannigfaltigkeit $\mathfrak{G} = 0$ als auch in Bezug auf die quadratische Mannigfaltigkeit $\mathfrak{Q} = 0$.

Beide quadratische Mannigfaltigkeiten stehen also in der Beziehung zu einander, dass jede von ihnen das Umhüllungsgebilde der anderen ist. Es lässt sich aber noch mehr aussagen: Auch die Beziehung der quadratischen *Formen* $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{Q}$ ist umkehrbar, und nahezu identisch mit der Beziehung der in § 1 und G und Γ bezeichneten Formen. Gibt man nämlich den Formen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ die oben angeführte besondere Gestalt, so findet sich

$$\mathfrak{Q} = 2\,[\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_4 + \mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_5 + \mathfrak{U}_3\mathfrak{U}_6]$$
$$\mathfrak{G} = 2\,[\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_4 + \mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_5 + \mathfrak{X}_3\mathfrak{X}_6]\ ,$$

und hieraus ergeben sich sogleich die auch im allgemeinen Falle gültigen Relationen

$$\{\mathfrak{G}\mathfrak{X}\}^2 = -\frac{1}{120}\{\mathfrak{Q}_1 \ldots \mathfrak{Q}_5\mathfrak{X}\}^2\ ,$$
(24)
$$\{\mathfrak{U}\mathfrak{Q}\}^2 = -\frac{1}{120}\{\mathfrak{G}_1 \ldots \mathfrak{G}_5\mathfrak{U}\}^2\ ,$$

Digitized by Google

$$(25) \qquad \frac{1}{6}\{\mathfrak{G}\mathfrak{Q}\}^2 = 1 \ .$$

In der Formel (21) haben wir die Covariante $\mathfrak{Q}$ aus der Grundform $\mathfrak{M}$ durch einen einfachen invarianten Process hergeleitet; in der Formel (24) haben wir sodann die Covariante $\mathfrak{G}$ ebenso durch die Form $\mathfrak{Q}$ ausgedrückt. Nunmehr gelingt es uns auch die Form $\mathfrak{N}$, oder genauer, das Product der Form $\mathfrak{N}$ und der von uns gleich Eins gesetzten Invariante J einfach darzustellen.

Die Form $\mathfrak{N}$ gibt nämlich, gleich Null gesetzt, zu irgend einem Punkt $\mathfrak{X}$ des Gebietes fünfter Stufe den entsprechenden linearen Complex. Denselben Complex muss man aber, nach unseren bisherigen Entwickelungen, auch dann erhalten, wenn man zu dem Punkte $\mathfrak{X}$ erst die Polare in Bezug auf die quadratische Mannigfaltigkeit $\mathfrak{G} = 0$, sodann zu dieser Polare vermöge der Form $\mathfrak{M}$ den entsprechenden linearen Complex aufsucht. Man bestätigt diesen Satz sofort durch die Rechnung: er wird dargestellt durch die erste der Identitäten:

$$(26) \quad \begin{array}{l} \{\mathfrak{G}\mathfrak{X}\}\{\mathfrak{G}\mathfrak{M}\}[(UM)(U'M')-(U'M)(UM')] = \{\mathfrak{N}\mathfrak{X}\}(NN'UU') \\ \{\mathfrak{U}\mathfrak{Q}\}\{\mathfrak{N}\mathfrak{Q}\}(NX)(N'X') - (NX')(N'X)] = \{\mathfrak{U}\mathfrak{M}\}(MM'XX'). \end{array}$$

Von der hier entwickelten Theorie lassen sich zahlreiche Anwendungen machen, wiewohl wir erst einen kleinen Theil des wahrscheinlich sehr grossen Formensystems der Form $\mathfrak{M}$ betrachtet haben.

Es lassen sich z. B. die linearen Transformationen, die die quadratischen Formen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{Q}$ in sich selbst überführen, leicht durch quaternäre bilineare Formen darstellen; und es hat keine Schwierigkeit, den begrifflich selbstverständlichen Isomorphismus der von jenen Transformationen gebildeten Gruppe mit der Gruppe der linearen Transformationen des gewöhnlichen Raumes auch *durch wirkliche Ausrechnung* nachzuweisen. Es gestaltet sich diese Betrachtung ganz analog der in M. T. F. § 16 durchgeführten Untersuchung. Wir wenden uns im nächsten § zu einer anderen Anwendung, zur Uebertragung der in § 1 aufgestellten Reihenentwickelung aus dem Gebiet sechster Stufe in das quaternäre Gebiet.

Digitized by Google

3.

Wiewohl man die im vorigen § eingeführten Formen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{Q}$ nicht schlechthin an Stelle der in § 1 betrachteten Formen G und Γ setzen darf, da die Identitäten (2) und (4) bei Substitution der Werthe $\vartheta = 1$ und $\lambda = 6$ nicht unmittelbar in die Formeln (24) übergehen, so können doch die in § 1 aufgestellten Reihenentwickelungen unverändert auf die Formen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{Q}$ übertragen werden; denn die simultane Invariante $[\mathfrak{G}, \mathfrak{Q}] = \{\mathfrak{G}\mathfrak{Q}\}^2$, auf die es hier allein ankommt, hat thatsächlich den numerischen Werth Eins. (Formel (25).)

Um nun die Reihenentwickelung (12) in das quaternäre Gebiet zu übertragen, denken wir uns den veränderlichen Punkt $\mathfrak{X}$ des Gebietes fünfter Stufe dargestellt durch einen linearen Complex $\widehat{XX'}$; d. h. wir setzen

$$\{\mathfrak{U}\mathfrak{X}\} = \{\mathfrak{U}\mathfrak{M}\}\,(MM'XX')\,, \tag{27}$$

und nehmen an, dass erst den zweizeiligen Determinanten der Grössen $X_i X_i'$ eine reale Bedeutung zukommt. (Vgl. M. T. F. § 11, S. 111.)

Seien

$$(XX'YY') = (X_1X_1'YY') = (X_2X_2'YY') = \cdots \tag{28}$$

verschiedene Darstellungsformen desselben Complexes, so erhalten wir dann auf Grund der zweiten Formel (23) die Identität

$$\{\mathfrak{G}\mathfrak{X}\}^2 = (X_1X_1'X_2X_2')\,. \tag{29}$$

Durch die Substitution (27) geht aus jeder Form $\{\mathfrak{A}\mathfrak{X}\}^m$, in der die Veränderliche $\mathfrak{X}$ des Gebietes sechster Stufe im m^{ten} Grade auftritt, eine Form des quaternären Gebietes hervor, in der die sechs Coordinaten des linearen Complexes, die Determinanten der Symbole X_i, X_i' ebenfalls im m^{ten} Grade auftreten.

Wir wollen für diese Form eine besondere symbolische Bezeichnung einführen, indem wir schreiben

$$f = [\{\mathfrak{A}\mathfrak{M}\}\,(MM'XX')]^m = (PP'XX')^m\,. \tag{30}$$

Das Bildungsgesetz des Ausdrucks auf der rechten Seite ist natürlich so zu verstehen, dass erst die zweizeiligen Determi-

Digitized by Google

nanten der Grössen P_i, P_i' elementare Symbole sind, von denen je m mit einander multiplicirt eine reale Bedeutung haben.

Setzen wir fest, dass der Ausdruck

$$(\widehat{PP'}\,\widehat{PP'})^k\,(PP'XX')^{m-2k}$$

in der Weise berechnet werden soll, dass man in jeder Determinante die durch das Zeichen $\widehat{\ }$ vereinigten Symbole zuerst zu zweizeiligen Determinanten verbindet, diese durch Elementarsymbole ersetzt, und hierauf erst die Determinanten ausrechnet und mit einander multiplicirt, so hat der angeführte Ausdruck einen völlig bestimmten, im Allgemeinen von Null verschiedenen Werth; er ist eine Covariante der Form f. Diese Covariante nun entspricht der in § 1 betrachteten Covariante

$$[F, \Omega^k] = [\{\mathfrak{A}\Omega\}^2]^k\,\{\mathfrak{A}\mathfrak{X}\}^{m-2k}\ .$$

Man findet bei gehöriger Berücksichtigung der Formeln (21) und (30) die Identität:

$$[F, \Omega^k] = (\widehat{PP'}\,\widehat{PP'})^k\,(PP'XX')^{m-2k}\ . \tag{31}$$

Hiermit haben wir alle Hülfsmittel beisammen, um die Reihenentwickelung des § 1 aus dem Gebiet sechster Stufe in das quaternäre Gebiet zu übertragen: Man hat nur G und Γ durch $\mathfrak{G}$ und Ω zu ersetzen, der Zahl λ den Werth sechs beizulegen, f an Stelle von F zu schreiben, und dann für $\mathfrak{G}$ und $[F, \Omega^k]$ ihre Werthe aus den Formeln (29) und (31) einzutragen.

Wir wollen diesen Übergang in der Weise ausführen, dass wir noch die Covariante (31) durch das Symbol eines Processes darstellen, durch dessen wiederholte Anwendung sie entsteht. Setzen wir

$$\Delta f = \binom{m}{2}\,(\widehat{PP'}\,\widehat{PP})PP'X\,X')^{m-2}\ , \tag{32}$$

so wird

$$\Delta^k f = \binom{m}{2}\binom{m-2}{2}\cdots\binom{m-2k+2}{2}(\widehat{PP'}\,\widehat{PP'})^k\,(PP'XX')^{m-2k}\,; \tag{33}$$

setzen wir ferner

$$P = \tfrac{1}{2}\,(\widehat{XX'}\widehat{XX'}) = \tfrac{1}{2}\,(X_1X_1'X_2X_2') \tag{34}$$

Digitized by Google

(Vgl. Formel (29)), so erhalten wir nunmehr folgende Reihenentwickelung:

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} f = \{f &+ \eta_{01} P \,.\, \Delta f + \eta_{02} P^2 \,.\, \Delta^2 f + \eta_{03} P^3 \,.\, \Delta^3 f + \cdots\} \\ &+ \vartheta_1 P \,.\, \{\Delta f + \eta_{11} P \,.\, \Delta^2 f + \eta_{12} P^2 \,.\, \Delta^3 f + \cdots\} \\ &+ \vartheta_2 P^2 \,.\, \{\Delta^2 f + \eta_{21} P \,.\, \Delta^3 f + \cdots\} \\ &+ \vartheta_3 P^3 \,.\, \{\Delta^3 f + \cdots\} \\ &\quad\cdots\cdots, \end{aligned}\right.$$

worin die Coefficienten die Werthe haben:

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} \eta_{i1} &= -\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{m-2i+1}, \\ \eta_{i2} &= +\frac{1}{1\,.\,2}\cdot\frac{1}{(m-2i+1)(m-2i)}, \\ \eta_{i3} &= -\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\cdot\frac{1}{(m-2i+1)(m-2i)(m-2i-1)} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}\right.$$

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} \vartheta_0 &= \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{m+1}, \\ \vartheta_1 &= \frac{1}{1\,.\,2}\cdot\frac{1}{m(m-1)}, \\ \vartheta_2 &= \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\cdot\frac{1}{(m-1)(m-2)(m-3)} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right.$$

Sagen wir, die identische Covariante $\Pi = \frac{1}{2}(\widehat{UU'}\widehat{UU'})$ sei zu der Form f »*apolar*«, wenn die Covariante Δf identisch verschwindet, so können wir nunmehr folgenden Satz aussprechen:

Im quaternären Gebiete lässt sich eine jede algebraische Form, in der die Coordinaten eines linearen Complexes $\widehat{XX'}$ im m^{ten} Grade vorkommen, auf eine einzige Art nach Potenzen der identischen Covariante

$$P = \tfrac{1}{2}(\widehat{XX'}\widehat{XX'})$$

entwickeln, so dass die identische Covariante

$$\Pi = \tfrac{1}{2}(\widehat{UU'}\widehat{UU'})$$

zu dem Coefficienten eines jeden Entwickelungsgliedes apolar ist.

Digitized by Google

Natürlich lassen sich auch die übrigen Eigenschaften der in § 1 betrachteten Reihe ohne Weiteres übertragen: Das Verschwinden der k ersten Glieder ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Form f den Factor P^k hat, u. s. f.

Besondere Beachtung verdient der Umstand, dass die Reihenentwickelung, die unserer Reihe dualistisch gegenübersteht, von ihr nicht wesentlich verschieden ist.

Die zu (35) dualistische Reihenentwickelung erhalten wir nämlich, wenn wir die Symbole $\widehat{XX'}$ und $\widehat{PP'}$ mit $\widehat{UU'}$ und $\widehat{AA'}$ vertauschen, und zugleich die Operation Δ durch die dualistisch gegenüberstehende Operation D ersetzen. Nun können wir aber die algebraischen Formen $(PP'XX')^m$ und $(AA'UU')^m$ als identisch betrachten, d. h. wir dürfen annehmen, dass zwischen den Symbolen A, A' und P, P' die Relationen (15) bestehen.

So erhalten wir jede unserer Reihenentwickelungen noch in einer zweiten Gestalt; die zweite Gestalt der ersten Reihe z. B. entsteht, wenn man den Ausdruck

$$(\widehat{PP'}\,\widehat{PP'})^k\ (PP'XX')^{m-2k}$$

durch den ihm identisch gleichen Ausdruck

$$(\widehat{AA'}\,\widehat{AA'})^k\,[(AX)(A'X') - (AX')(A'X)]^{m-2k}$$

ersetzt. Nimmt man nun überdies noch an, dass die Complexe $\widehat{XX'}$ und $\widehat{UU'}$ identisch sind, so geht die zweite Gestalt der ersten Reihe über in die erste Gestalt der zweiten Reihe, und umgekehrt.

Auch die beiden in § 1 betrachteten Reihenentwickelungen des Gebietes λ^{ter} Stufe hätten wir von vorn herein als nicht wesentlich verschieden ansehen können. Durch die quadratischen Formen G und Γ wird nämlich jedem Punkt $\mathfrak{X}$ des Gebietes λ^{ter} Stufe eine lineare Mannigfaltigkeit $\lambda - 1^{\text{ter}}$ Stufe $\mathfrak{U}$, die Polare von $\mathfrak{X}$, zugeordnet.

Beide Gebilde bestimmen sich gegenseitig, und können daher, bei geeigneter Abänderung der symbolischen Bezeichnung, durch ein und dasselbe Zeichen dargestellt werden. Statt der beiden Reihenentwickelungen des § 1 erhält man dann nur noch eine einzige Reihenentwickelung. Indessen überschreitet die Ausführung dieses Gedankens, der in seiner weiteren Entwickelung zu einer *Invariantentheorie der Gruppe der reciproken Radien*

Digitized by Google

im Raume von $\lambda - 2$ Dimensionen führt, bei Weitem die Grenzen dieser Arbeit; sie mag einer späteren Darstellung vorbehalten bleiben.

Ein Theil der Ergebnisse dieses § ist nicht neu: das *erste Glied* der Reihenentwickelung (35) ist schon vor langer Zeit von Clebsch angegeben worden[1]). Clebsch sprach den auf S. 186 angegebenen Satz, soweit er sich auf das erste Glied der Reihe bezieht, so aus:

»*Die Gleichung* $f(p) = 0$ *lässt sich immer, und nur auf eine Weise durch Anwendung von* $P = 0$ *so modificiren, dass man sie als symbolische Potenz eines speciellen linearen Complexes, d. h. eines solchen betrachten darf, dessen Gerade sämmtlich eine feste Gerade schneiden.*«

Hier bedeutet $f(p)$ einen homogenen Ausdruck m^{ten} Grades in Liniencoordinaten p_{ik}, d. h. in zweizeiligen Determinanten der Grössen X_i, X_i';

$$P = \tfrac{1}{2}(\widehat{XX'}\widehat{XX'}) = 0$$

ist die auch von uns gebrauchte Bezeichnung für die zwischen den sechs Liniencoordinaten bestehende quadratische Identität. Der Satz besagt, dass man jeden Liniencomplex m^{ten} Grades durch eine Gleichung

$$(PP'XX')^m = 0$$

darstellen kann, worin das Symbol $\widehat{PP'}$ die Eigenschaft des Symbols eines speciellen linearen Complexes hat, dass nämlich jede Form mit dem Factor $(\widehat{PP'}\widehat{PP'})$ identisch verschwindet.

Der Unterschied der hier gegebenen Darstellung von der Clebsch's liegt darin, dass wir den genannten Satz aus einer allgemeinen Eigenschaft der quadratischen Formen hergeleitet und ihn dadurch mit der allgemeinen Apolaritätstheorie in Zusammenhang gebracht haben. Natürlich hätten wir aber, auf dem von Clebsch betretenen Wege noch etwas weiter gehend, unsere Reihenentwickelung und alle ihre charakteristischen Eigenschaften ganz eben so leicht auch unmittelbar herleiten können, ohne aus dem quaternären Gebiete herauszutreten.

1) *Über die Plücker'schen Complexe*, Math. Ann. Bd. 2, S. 1 (1869).

Digitized by Google

SITZUNG VOM 9. JUNI 1890.

W. Ostwald, *Ueber Autokatalyse.*

Bei Gelegenheit früherer Arbeiten über Oxydations- und Reductionsvorgänge bei Gegenwart »katalytischer« Stoffe hatte sich mir die Frage entgegengestellt, ob ein Stoff, welcher einer langsam verlaufenden Reaction unterliegt, auf sich selbst katalytisch einwirken könne, wenn er im übrigen die zur katalytischen Wirksamkeit erforderlichen Eigenschaften besitzt. Die allzu verwickelte Beschaffenheit der damals untersuchten Vorgänge gestattete mir nicht, die Frage befriedigend zu beantworten.

Während einer auf meine Veranlassung von Dr. Paul Henry ausgeführten Untersuchung über die Gesetze, welchen die Umwandlung der γ-Oxysäuren in Lactone unterliegt, ergab sich eine Gelegenheit, diese für die Theorie der chemischen Vorgänge wesentliche Frage in entscheidender Weise, und zwar bejahend zu beantworten. Die Thatsachen, auf welche sich diese Entscheidung stützt, sind folgende.

Das aus der Lävulinsäure durch Reduction mit Natriumamalgam zu erhaltende Valerolacton $CH^3\text{-}CH\text{-}CH^2\text{-}CH^2$

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\quad | \\ \qquad\qquad\quad O\text{—}CH \end{array}$$

ist eine weit stabilere Verbindung, als die entsprechende γ-Oxyvaleriansäure $CH^3CH(CH)CH^2\text{-}CH^2\text{-}COOH$. Dementsprechend verwandeln sich wässerige Lösungen der Säure, (die man aus dem gut krystallisirenden Silbersalz durch Zersetzen mit verdünnter Salzsäure bei 0^0 rein erhält) unter Wasserverlust allmählich in solche des Lactons. Es war vorauszusehen, dass dieser Vorgang wie viele andere durch die Gegenwart fremder Säuren

Digitized by Google

»katalytisch« beschleunigt werden würde. Dies trifft nun in der That zu; in salzsäurehaltiger Lösung geht die Bildung des Lactons (welche man durch Titriren der Flüssigkeit mit verdünntem Barytwasser leicht verfolgen kann) weit schneller vor sich, als für sich.

Da hier wie in allen früher untersuchten Fällen die zugesetzten Säuren ihre beschleunigende Wirkung nach Massgabe ihrer Affinitätscoefficienten, d. h. ihres Gehaltes an activem oder elektrolytisch dissociirtem Wasserstoff ausüben, so gab es für die Thatsache, dass die wässerige Lösung der Säure freiwillig in das Lacton übergeht, zwei Erklärungen. Entweder die γ-Oxyvaleriansäure katalysirt sich selbst vermöge des in ihrer Lösung vorhandenen Antheils elektrolytisch dissociirter Molekeln, speciell des Wasserstoffs, oder es ist unabhängig von dem dissociirten Antheil die Säure als ein unbeständiger Stoff anzusehen, welcher auch ohne die Gegenwart katalysirender Säurewasserstoffatome der allmählichen Umwandlung unter Wasserverlust unterliegt.

Die Alternative liess sich auf folgende Weise zur Entscheidung bringen. Setzt man zu der Lösung der Säure eine gewisse Menge ihres Natriumsalzes, so geht der Dissociationszustand derselben stark zurück. Denn sei a die Anzahl der Säurejonen, h die der Wasserstoffjonen, so findet nach den Gesetzen der Massenwirkung Gleichgewicht statt, wenn das Product ah einen bestimmten Werth, etwa c angenommen hat. Wird nun durch Zusatz eines Salzes, welches dasselbe Jon a enthält, die Menge dieses Jons vermehrt, so wird, da immer die Gleichung $ah = c$ bestehen muss, die Grösse h entsprechend abnehmen, d. h. die Dissociation der Säure geht zurück. In unserem Falle ist der Rückgang ein bedeutender, da der dissociirte Antheil der Säure nicht gross ist.

Wenn also die freiwillige Umsetzung der Säure in Lakton aus der Beschaffenheit derselben heraus, und nicht infolge des katalytischen Einflusses der vorhandenen Wasserstoffjonen erfolgt, so müsste der Zusatz eines Salzes dieser Säure den Vorgang nicht wesentlich beeinflussen. Im anderen Falle aber müsste, da durch diesen Zusatz die Wasserstoffjonen fast zum Verschwinden gebracht werden, die Selbstzersetzung der Säure fast völlig aufhören. Der Versuch hat im zweiten Sinne entschieden: bei Gegenwart des Neutralsalzes behält die γ-Oxyvaleriansäure ihren Säuretiter tagelang fast unverändert bei und

Digitized by Google

lässt nur einen äusserst langsamen Uebergang in das Lacton erkennen.

Umgekehrt geht der Uebergang bei Gegenwart von Salzsäure, wie schon erwähnt wurde, mit grosser Schnelligkeit vor sich. Da in diesem Falle durch die Salzsäure eine grosse Anzahl von Wasserstoffjonen in die Lösung gebracht wird, so wird in dem constanten Product $ah = c$ wegen des starken Anwachsens von h der Factor a sehr klein werden müssen, d. h. auch bei Gegenwart von Salzsäure geht die Dissociation der Oxysäure sehr stark zurück. Da trotzdem die Umwandlung in das Lacton sehr schnell erfolgt, so ist daraus zu schliessen, dass der *nicht dissociirte* Antheil der Säure derjenige ist, welcher die Umbildung zu Lacton erleidet.

Es wirken also in der reinen Lösung der Säure die Wasserstoffjonen, welche aus dem dissociirten Antheil stammen, katalytisch auf den nicht dissociirten ein. Aus diesem Ergebniss lässt sich ein weiterer beachtenswerther Schluss ziehen. Da es sich hier um die Betheiligung zweier Factoren handelt, welche beide mit der Menge der noch nicht in das Lacton umgewandelten Säure veränderlich sind, so muss der Vorgang durch eine Reactionsgleichung von der Gestalt, wie sie für die Wechselwirkung *zweier verschiedener Stoffe* gilt, darstellbar sein und nicht den Gesetzen solcher Vorgänge folgen, bei denen nur ein einziger Stoff eine Aenderung seiner Menge erfährt. In der That wurden wir auf die Bedeutung der vorbeschriebenen Erscheinungen aufmerksam, als Dr. Henry vergeblich seine Versuche über die Selbstzersetzung der Säure ohne fremde Zusätze durch die Reactionsgleichung erster Ordnung darzustellen versuchte. Die Reactionsgleichung zweiter Ordnung erwies sich dagegen im Einklang mit den Ergebnissen der Beobachtungen.

Die Einzelheiten dieser Untersuchungen, welche von Dr. P. Henry mit bemerkenswerther Ausdauer und Geschicklichkeit durchgeführt wurden, werden in der Zeitschrift für physikalische Chemie zum Abdruck gelangen.

Digitized by Google

Friedrich Engel, *Zur Invariantentheorie der Systeme von Pfaffschen Gleichungen.* (Zweite Mittheilung.)

In einer früheren Mittheilung (diese Berichte 1889, S. 157—176) habe ich bereits einige Sätze über Systeme von PFAFF'schen Gleichungen entwickelt. Ich ging davon aus, dass jedes solche System zwei verschiedene Auffassungen zulässt (a. a. O. S. 158). erstens nämlich kann es als ein System von Differentialgleichungen betrachtet, zweitens aber auch so gedeutet werden, dass es eine Schaar von unendlich vielen infinitesimalen Transformationen bestimmt. Der Grundgedanke meiner Arbeit bestand nun darin, dass ich diese Doppelnatur der Systeme von PFAFF-schen Gleichungen benutzte, um Gleichungensysteme zu bilden, welche mit einem vorgelegten Systeme von PFAFF'schen Gleichungen invariant verknüpft sind.

Die Fruchtbarkeit der hiermit bezeichneten Methode ist mir inzwischen erst recht klar geworden. Im Folgenden will ich einige neue Sätze mittheilen, zu denen ich durch Anwendung dieser Methode gelangt bin. Bevor ich aber zur Ableitung der betreffenden Sätze übergehe, stelle ich in § 1 eine Reihe von allgemeinen Bemerkungen über den Begriff: »System von PFAFF-schen Gleichungen« zusammen. Der § 1 enthält also nichts Neues, sondern dient nur zur Orientirung für das Spätere.

§ 1.

Es sei:

$$(1.)\quad dx_{m+k} - \sum_{1}^{m}{}_{\mu} a_{\mu,m+k}(x_1 \cdots x_n)\, dx_\mu = 0 \quad (k = 1 \cdots n - m)$$

Digitized by Google

ein System von $n - m$ unabhängigen Pfaff'schen Gleichungen in den n Veränderlichen $x_1 \dots x_n$. Deuten wir darin $dx_1 \dots dx_n$ als die unendlich kleinen Zuwachse, welche die Veränderlichen $x_1 \dots x_n$ bei einer infinitesimalen Transformation erhalten, so bestimmt unser System (1.) eine Schaar von infinitesimalen Transformationen. Die allgemeinste infinitesimale Transformation dieser Schaar erscheint bei Benutzung der Abkürzungen:

$$A_\mu f = \frac{\partial f}{\partial x_\mu} + \sum_1^{n-m} {}_j \, a_{\mu, m+j} \frac{\partial f}{\partial x_{m+j}} \quad (\mu = 1 \dots m)$$

in der Form:

$$\sum_1^m {}_\mu \, \chi_\mu (x_1 \dots x_n) \, \mathfrak{A}_\mu f \,, \tag{2.}$$

wo die χ_μ willkürliche Functionen von $x_1 \dots x_n$ bezeichnen. Das Symbol (2.) ist daher im Grunde nur eine neue analytische Darstellung des Systems Pfaff'scher Gleichungen (1.).

Man kann mit dem Systeme (1.) auch eine anschauliche Vorstellung verbinden. Durch die Gleichungen (1.) wird nämlich jedem Punkte des Raumes $x_1 \dots x_n$ ein ebenes Bündel von ∞^{m-1} Fortschreitungsrichtungen: $dx_1 : dx_2 : \dots : dx_n$ zugeordnet. Denkt man sich in jedem Punkte des Raumes das zugehörige Bündel von Fortschreitungsrichtungen, so erhält man eine Figur, welche das genaue geometrische Bild des Systems (1.) ist. Zu derselben Figur gelangt man natürlich, wenn man sich in jedem Punkte des Raumes alle die Fortschreitungsrichtungen construirt denkt, welche der Inbegriff aller infinitesimalen Transformationen (2.) dem Punkte zuordnet.

Wir werden im Folgenden diese von Lie herrührende geometrische Deutung des Systems (1.) häufig anwenden.

Mit der Schaar der infinitesimalen Transformationen (2.) und also auch mit dem Systeme (1.) ist das System der linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$A_1 f = 0 \,, \quad \dots \quad A_m f = 0 \tag{3.}$$

invariant verknüpft und zwar ist diese Verknüpfung eindeutig umkehrbar; man kann deshalb in vielen Fällen mit dem Systeme (3.) operiren, das Ergebniss lässt sich dann sofort auf die Schaar der infinitesimalen Transformationen (2.) und auf das System (1.) übertragen.

Digitized by Google

Es ist selbstverständlich, dass die geometrische Deutung des Systems der PFAFF'schen Gleichungen (1.) auch auf das System der linearen partiellen Differentialgleichungen (3.) anwendbar ist.

Wir wollen im Folgenden immer voraussetzen, dass das System der Pfaff'schen Gleichungen (1.) *nicht unbeschränkt integrabel ist.* Diese Forderung kommt darauf hinaus, dass die m Gleichungen (3.) kein m-gliedriges vollständiges System bilden dürfen; mit andern Worten: die Ausdrücke:

$$(\mathfrak{A}_\mu \mathfrak{A}_\nu) \quad (\mu, \nu = 1 \cdots m)$$

dürfen nicht alle identisch verschwinden.

Endlich wollen wir noch eine Ausdrucksweise einführen, welche in vielen Fällen ausserordentlich bequem ist. Wenn nämlich zwei infinitesimale Transformationen Yf und Zf in einer solchen Beziehung stehen, dass Zf sich in der Form:

$$(4.) \qquad Zf = Yf + \sum_1^m{}_\mu \varphi_\mu(x_1 \cdots x_n)\, \mathfrak{A}_\mu f$$

darstellen lässt, so wollen wir sagen, dass diese beiden infinitesimalen Transformationen in Bezug auf $\mathfrak{A}_1 f \cdots \mathfrak{A}_m f$ als Moduln congruent sind, also schreiben wir an Stelle der Gleichung (4.) die Congruenz:

$$Zf \equiv Yf \ (\text{modd. } \mathfrak{A}_1 f \cdots \mathfrak{A}_m f) \ .$$

§ 2.

Unter den infinitesimalen Transformationen der Schaar (2.) wählen wir irgend eine aus, etwa diese:

$$Uf = \sum_1^m{}_\mu u_\mu(x_1 \cdots x_n)\, \mathfrak{A}_\mu f$$

und führen sie auf das Gleichungensystem (3.) aus. Wir erhalten auf diese Weise ein dem Systeme (3.) unendlich benachbartes System:

$$(5.) \qquad \mathfrak{A}_\mu f + \delta t\, (\mathfrak{A}_\mu U) = 0 \quad (\mu = 1 \cdots m) \ ,$$

welches mit dem Systeme (3.) und der infinitesimalen Trans-

Digitized by Google

formation Uf invariant verknüpft ist; es ist sozusagen eine simultane Covariante von beiden.

Werden die Systeme (3.) und (4.) mit einander vereinigt, so ergiebt sich ein neues Gleichungensystem:

$$\mathfrak{A}_\mu f = 0\,, \quad (\mathfrak{A}_\mu U) = 0\,, \quad (\mu = 1 \cdots m)\,,$$

das wegen der Congruenz:

$$(\mathfrak{A}_\mu U) \equiv \sum_1^m{}_\nu\, u_\nu (\mathfrak{A}_\mu \mathfrak{A}_\nu) \pmod{\mathfrak{A}_1 f \cdots \mathfrak{A}_m f}$$

die Form:

$$\text{(6.)} \qquad \mathfrak{A}_\mu f = 0\,, \quad u_1(\mathfrak{A}_\mu \mathfrak{A}_1) + \cdots + u_m(\mathfrak{A}_\mu \mathfrak{A}_m) = 0 \qquad (\mu = 1 \cdots m)$$

erhalten kann oder, wenn wir setzen: $(\mathfrak{A}_\mu \mathfrak{A}_\nu) = \mathfrak{B}_{\mu\nu} f$, die Form:

$$\text{(6'.)} \qquad \mathfrak{A}_\mu f = 0,\ u_1 \mathfrak{B}_{\mu 1} f + \cdots + u_m \mathfrak{B}_{\mu m} f = 0 \qquad (\mu = 1 \cdots m)\,.$$

Es versteht sich von selbst, dass auch dieses System eine simultane Covariante von (3.) und Uf ist oder, was auf dasselbe hinauskommt: eine simultane Covariante von (1.) und Uf.

Das gewonnene Ergebniss wollen wir etwas anders ausdrücken.

Sind nämlich $dx_1 \ldots dx_n$ die unendlich kleinen Zuwachse, welche $x_1 \ldots x_n$ bei der infinitesimalen Transformation Uf erhalten, so bestehen Gleichungen von der Form:

$$dx_1 = u_1 \cdot \delta t\,, \quad \cdots \quad dx_m = u_m \cdot \delta t$$

und ausserdem:

$$dx_{m+k} = \sum_1^m{}_\nu\, a_{\nu, m+k}\, dx_\nu \quad (k = 1 \cdots n - m)\,.$$

Bedenken wir nun, dass die Gleichungen (1.) die allgemeinste der Schaar (2.) angehörige infinitesimale Transformation Uf bestimmen, so erkennen wir Folgendes: Statt zu sagen: »das Gleichungensystem (6'.) ist mit dem System (1.) und mit der infinitesimalen Transformation Uf invariant verknüpft« können wir auch sagen: »durch Vereinigung der Gleichungen:

Digitized by Google

$$(7.) \qquad \mathfrak{A}_\mu f = 0\,, \quad dx_1 \mathfrak{B}_{\mu 1} f + \cdots + dx_m \mathfrak{B}_{\mu m} f = 0 \qquad (\mu = 1 \cdots m)$$

mit den Gleichungen (1.) erhalten wir ein Gleichungensystem, welches mit dem System (1.) invariant verknüpft ist.« Also haben wir den

Satz 1. *Mit dem System der Pfaff'schen Gleichungen:*

$$(1.) \quad dx_{m+k} - \sum_1^m{}_\mu \mathfrak{a}_{\mu,m+k}(x_1 \cdots x_n)\, dx_\mu = 0 \qquad (k = 1 \cdots n - m)$$

ist das Gleichungensystem:

$$(8.) \quad \begin{cases} dx_{m+k} - \sum_1^m{}_\nu \mathfrak{a}_{\nu,m+k}\, dx_\nu = 0 \\ \mathfrak{A}_\mu f = 0\,, \; dx_1 \mathfrak{B}_{\mu 1} f + \cdots + dx_m \mathfrak{B}_{\mu m} f = 0 \\ \qquad (k = 1 \cdots n - m; \quad \mu = 1 \cdots m) \end{cases}$$

invariant verknüpft. Hier bedeuten $\mathfrak{A}_\mu f$ und $\mathfrak{B}_{\mu\nu} f$ Ausdrücke von der folgenden Form:

$$\mathfrak{A}_\mu f = \frac{\partial f}{\partial x_\mu} + \sum_1^{n-m}{}_k \mathfrak{a}_{\mu,m+k} \frac{\partial f}{\partial x_{m+k}}$$

$$\mathfrak{B}_{\mu\nu} f = (\mathfrak{A}_\mu \mathfrak{A}_\nu) = \sum_1^{n-m}{}_k (\mathfrak{A}_\mu \mathfrak{a}_{\nu,m+k} - \mathfrak{A}_\nu \mathfrak{a}_{\mu,m+k}) \frac{\partial f}{\partial x_{m+k}}\,.$$

Das System (1.) sollte nicht unbeschränkt integrabel sein, es sollten also die Ausdrücke $\mathfrak{B}_{\mu\nu} f$ nicht alle identisch verschwinden. Hieraus folgt, dass es, jedenfalls solange man $dx_1 \cdots dx_m$ nicht ganz besondere Werthe ertheilt, unter den Gleichungen (7.) mehr als m von einander unabhängige giebt. Wir können daher annehmen, dass das Gleichungensystem (7. für allgemeine Werthe von $dx_1 \ldots dx_m$ gerade $m + h > m$ unabhängige Gleichungen enthält, oder, was auf dasselbe hinauskommt, dass in der Matrix:

$$(9.) \quad \begin{vmatrix} \sum_1^m{}_\nu dx_\nu \cdot \mathfrak{B}_{1\nu} x_{m+1} & \cdots & \sum_1^m{}_\nu dx_\nu \cdot \mathfrak{B}_{1\nu} x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_1^m{}_\nu dx_\nu \cdot \mathfrak{B}_{m\nu} x_{m+1} & \cdots & \sum_1^m{}_\nu dx_\nu \cdot \mathfrak{B}_{m\nu} x_n \end{vmatrix}$$

Digitized by Google

zwar alle $(h+1)$-reihigen, nicht aber alle h-reihigen Determinanten identisch verschwinden.

Versuchen wir jetzt das Gleichungensystem (8.) begrifflich zu deuten.

Es sei $x_1 \dots x_n$ ein Punkt von allgemeiner Lage und $dx_1 \dots dx_n$ ein Werthsystem, welches die Gleichungen (1.) befriedigt, doch wollen wir zunächst voraussetzen, dass für die betreffenden Werthe von $dx_1 \dots dx_m$ nicht alle h-reihigen Determinanten der Matrix (9.) verschwinden. Wir betrachten also in dem ebenen Bündel von ∞^{m-1} Richtungen, welches dem Punkte $x_1 \dots x_n$ durch das System (1.) zugeordnet wird, irgend eine Richtung $dx_1 : dx_2 : \cdots : dx_n$ von allgemeiner Lage. Für das gewählte Werthsystem $dx_1 \dots dx_n$ reducirt sich das Gleichungensystem (8.) auf (7.). Dieses letztere enthält unter den gemachten Voraussetzungen gerade $m+h$ unabhängige Gleichungen, es ordnet also dem Punkte $x_1 \dots x_n$ eine ebenes Bündel von ∞^{m+h-1} Richtungen zu, welches selbstverständlich durch das vorhin erwähnte Bündel von ∞^{m-1} Richtungen hindurchgeht. Also ergiebt sich Folgendes:

Ist B das ebene Bündel von ∞^{m-1} Richtungen, welches dem Punkte $x_1 \dots x_n$ durch das System der Pfaff'schen Gleichungen (1.) zugeordnet wird, so entspricht jeder in B enthaltenen Richtung von allgemeiner Lage ein ebenes Bündel von ∞^{m+h-1} Richtungen, welches durch B geht.

Betrachten wir andrerseits eine Richtung: $dx_1 \dots dx_n$, für welche alle h-reihigen Determinanten der Matrix (9.) verschwinden. Einer solchen Richtung entspricht offenbar ein durch B gehendes ebenes Bündel von höchstens ∞^{m+h-2} Richtungen. Zugleich ist klar, dass der Inbegriff aller Richtungen $dx_1 : \dots : dx_n$, für welche die angegebene Bedingung erfüllt ist, zu dem Punkte $x_1 \dots x_n$ und dem Bündel B in einer invarianten Beziehung steht. Also erhalten wir den

Satz 2. *Verschwinden in der Matrix* (9.) *alle $(h+1)$-reihigen Determinanten identisch, nicht aber alle h-reihigen und sind $D_1 \dots D_q$ die h-reihigen Determinanten, welche nicht identisch verschwinden, so ist das Gleichungensystem:*

$$(10.) \qquad \begin{cases} dx_{m+k} - \sum_1^m{}_\mu \, a_{\mu,m+k}\, dx_\mu = 0\,, \quad D_j = 0 \\ (k = 1 \cdots n-m, \quad j = 1 \cdots q) \end{cases}$$

Digitized by Google

mit dem Systeme der Pfaff'schen Gleichungen:

$$(1.)\quad dx_{m+k} - \sum_1^m{}^{\mu} a_{\mu,m+k}\, dx_\mu = 0 \quad (k = 1 \cdots n - m)$$

invariant verknüpft.

Natürlich könnte man statt der h-reihigen Determinanten von (9.) auch die h'-reihigen $(h' < h)$ gleich Null setzen.

§ 3.

Um die Ergebnisse des vorigen Paragraphen auf einen besonderen Fall anzuwenden, betrachten wir in sechs Veränderlichen $x_1 \ldots x_6$ ein System von drei PFAFF'schen Gleichungen:

$$(11.)\quad dx_{3+k} - \sum_1^3{}^{\mu} a_{\mu,3+k}(x_1 \cdots x_6)\, dx_\mu = 0 \quad (k = 1 \cdots 3)\,.$$

Das mit (11.) invariant verknüpfte System von drei unabhängigen linearen partiellen Differentialgleichungen lautet:

$$\mathfrak{A}_\mu f = \frac{\partial f}{\partial x_\mu} + \sum_1^3{}^{k} a_{\mu,3+k}\, \frac{\partial f}{\partial x_{3+k}} = 0 \quad (\mu = 1 \cdots 3)\,.$$

Ferner wollen wir setzen:

$$(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2) = \mathfrak{B}_3 f\,, \quad (\mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3) = \mathfrak{B}_1 f\,, \quad (\mathfrak{A}_3 \mathfrak{A}_1) = \mathfrak{B}_2 f\,.$$

Dann ergiebt sich aus Satz 1, S. 196:

Mit dem Systeme (11.) ist das Gleichungensystem:

$$(12.)\quad \begin{cases} dx_{3+k} - \sum_1^3{}^{\mu} a_{\mu,3+k}\, dx_\mu = 0 \quad (k = 1 \cdots 3) \\ \mathfrak{A}_1 f = 0\,, \quad \mathfrak{A}_2 f = 0\,, \quad \mathfrak{A}_3 f = 0 \\ dx_1 : dx_2 : dx_3 = \mathfrak{B}_1 f : \mathfrak{B}_2 f : \mathfrak{B}_3 f \end{cases}$$

invariant verknüpft.

Hier sind nun drei Fälle zu unterscheiden, denn die Zahl der von einander unabhängigen unter den Gleichungen:

$$(13.)\qquad \mathfrak{B}_1 f = 0\,, \quad \mathfrak{B}_2 f = 0\,, \quad \mathfrak{B}_3 f = 0$$

kann entweder drei oder zwei oder eins sein. Wir wollen alle diese Fälle der Reihe nach durchgehen.

Digitized by Google

I. *Die drei Gleichungen* (13.) *sind von einander unabhängig.*

Das System (11.) ordnet jedem Punkte $x_1 \dots x_6$ ein ebenes Bündel B von ∞^2 Richtungen zu. Vermöge (12.) ist nun jeder Richtung von B ein durch B gehendes ebenes Bündel von ∞^1 Richtungen zugeordnet. Auf diese Weise ist zwischen den ∞^2 Richtungen von B und den ∞^2 durch B gehenden ebenen Bündeln von ∞^1 Richtungen eine eindeutig umkehrbare projective Beziehung hergestellt. Der Satz 2, S. 197 liefert hier nichts.

II. *Zwischen* $\mathfrak{B}_1 f$, $\mathfrak{B}_2 f$ *und* $\mathfrak{B}_3 f$ *besteht eine Identität von der Form:*

$$\mathfrak{B}_3 f = \alpha_1(x)\,\mathfrak{B}_1 f + \alpha_2(x)\,\mathfrak{B}_2 f \ , \tag{14.}$$

während $\mathfrak{B}_1 f = 0$ *und* $\mathfrak{B}_2 f = 0$ *von einander unabhängig sind.*

In diesem Falle ergiebt der Satz 2, dass mit dem Systeme (11.) das System der vier PFAFF'schen Gleichungen:

$$\begin{cases} dx_{3+k} - \sum_1^3{}^{\mu}\, \mathfrak{a}_{\mu,3+k}\, dx_\mu = 0 \quad (k = 1, 2, 3) \\ dx_3 - \alpha_1 dx_1 - \alpha_2 dx_2 = 0 \end{cases} \tag{15.}$$

invariant verknüpft ist. Jedem Punkte $x_1 \dots x_6$ wird von (15.) ein ebenes Büschel von ∞^1 Richtungen zugeordnet, welches in dem durch (11.) bestimmten Bündel B liegt.

III. *Es bestehen zwei Identitäten von der Form:*

$$\mathfrak{B}_2 f = \beta_2(x)\,\mathfrak{B}_1 f\,, \quad \mathfrak{B}_3 f = \beta_3(x)\,\mathfrak{B}_1 f \ . \tag{16.}$$

In diesem Falle liefert der Satz 2 ein simultanes System:

$$\begin{cases} dx_{3+k} - \sum_1^3{}^{\mu}\, \mathfrak{a}_{\mu,3+k}\, dx_\mu = 0 \quad (\mu = 1, 2, 3) \\ dx_2 - \beta_2 dx_1 = 0\,, \quad dx_3 - \beta_3 dx_1 = 0\ , \end{cases} \tag{17.}$$

das mit (11.) invariant verknüpft ist und das jedem Punkte eine in B liegende Richtung zuordnet.

Durch das simultane System (15.) ist eine Schaar von infinitesimalen Transformationen definirt, deren Symbol lautet:

$$\chi(x_1 \dots x_6)\,(\mathfrak{A}_1 f + \beta_2 \mathfrak{A}_2 f + \beta_3 \mathfrak{A}_3 f)\ , \tag{18.}$$

unter χ eine willkürliche Function verstanden. Bezeichnet man die infinitesimale Transformation (18.) kurz mit Xf und bildet

Digitized by Google

man die Ausdrücke: $(X\mathfrak{A}_1)$, $(X\mathfrak{A}_2)$, $(X\mathfrak{A}_3)$, so findet man unter Berücksichtigung der Identitäten (16.) sofort:

$$(X\mathfrak{A}_\mu) \equiv 0 \quad (\text{modd. } \mathfrak{A}_1 f, \mathfrak{A}_2 f, \mathfrak{A}_3 f)$$
$$(\mu = 1, 2, 3),$$

mit andern Worten: das System: $\mathfrak{A}_1 f = 0$, $\mathfrak{A}_2 f = 0$, $\mathfrak{A}_3 f = 0$ bleibt bei allen infinitesimalen Transformationen von der Form (18.) invariant. Von dem System der PFAFF'schen Gleichungen (11.) gilt das natürlich ebenfalls.

§ 4.

Jetzt zu einer anderen Anwendung der Entwickelungen des § 2.

In meiner Dissertation (Math. Ann. XXII, S. 1 ff.) habe ich auf S. 33 ff. alle Transformationen eines $(m+n)$-fach ausgedehnten Raumes R_{m+n} bestimmt, bei welchen die n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten dieses Raumes derart unter einander vertauscht werden, dass Berührung erster Ordnung erhalten bleibt. Ich fand damals durch sehr umständliche Rechnungen, dass es im Falle $m > 1$ keine anderen wirklichen Transformationen von dieser Beschaffenheit giebt als die Punkttransformationen des R_{m+n}. Ich werde jetzt zeigen, dass dieses Ergebniss aus den Sätzen des § 2 mit Leichtigkeit erhalten werden kann.

Sind $z_1 \dots z_m$, $x_1 \dots x_n$ Punktcoordinaten des R_{m+n} und setzt man:

$$\frac{\partial z_\mu}{\partial x_i} = p_{\mu i} \quad (\mu = 1 \dots m; \quad i = 1 \dots n),$$

so handelt es sich darum in den $m + n + mn$ Veränderlichen:

$$z_\mu, \; x_i, \; p_{\mu i} \quad (\mu = 1 \dots m; \quad i = 1 \dots n)$$

alle Transformationen zu finden, welche das System der m PFAFF-schen Gleichungen:

$$19.) \qquad dz_\mu - \sum_1^n p_{\mu i} dx_i = 0 \quad (\mu = 1 \dots m)$$

invariant lassen.

Digitized by Google

Dem Systeme (19.) entspricht ein System von $n + mn$ linearen partiellen Differentialgleichungen, welches folgendermassen lautet:

$$(20.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{A}_i f = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^m{}_\nu\, p_{\nu i} \dfrac{\partial f}{\partial z_\nu} = 0 \\ \mathfrak{A}_{\mu i} f = \dfrac{\partial f}{\partial p_{\mu i}} = 0 \\ (\mu = 1 \ldots m; \quad i = 1 \ldots n)\ . \end{cases}$$

Aus dem Satze 1, S. 196 folgt daher, dass mit dem System (19.) das Gleichungensystem:

$$(21.)\qquad \begin{cases} dz_\mu - \sum_1^n{}_j\, p_{\mu j}\, dx_j = 0 \\ \mathfrak{A}_i f = 0\ , \quad \mathfrak{A}_{\mu i} f = 0 \\ \sum_1^m{}_\nu\, dp_{\nu i} \dfrac{\partial f}{\partial z_\nu} = 0\ , \quad dx_i \dfrac{\partial f}{\partial z_\mu} = 0 \\ (\mu = 1 \ldots m; \quad i = 1 \ldots n) \end{cases}$$

invariant verknüpft ist.

Um jetzt den Satz 2, S. 197 anwenden zu können, müssen wir die Matrix (9.) bilden, welche in dem vorliegenden Falle die Gestalt:

$$(22.)\qquad \begin{vmatrix} dp_{11} & dp_{12} \cdot dp_{1n} & dx_1 & 0 & \cdot & 0 & dx_2 & 0 & \cdot & dx_n & 0 & \cdot & 0 \\ dp_{21} & dp_{22} \cdot dp_{2n} & 0 & dx_1 & \cdot & 0 & 0 & dx_2 & \cdot & 0 & dx_n & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ dp_{m1} & dp_{m2} \cdot dp_{mn} & 0 & 0 & \cdot & dx_1 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & dx_n \end{vmatrix}$$

erhält, sodann haben wir von dieser Matrix alle m-reihigen Determinanten gleich Null zu setzen und die erhaltenen Gleichungen zu dem Systeme (19.) hinzuzufügen. Wir bekommen auf diese Weise das folgende mit (19.) invariant verknüpfte Gleichungensystem:

$$(23.)\qquad \begin{cases} dz_1 = 0\ , \ \ldots\ dz_m = 0\ , \ dx_1 = 0\ , \ \ldots\ dx_n = 0 \\ \Delta_1 = 0\ , \ \ldots\ \Delta_\varrho = 0\ . \end{cases}$$

Digitized by Google

Hierin bezeichnen $\Delta_1 \ldots \Delta_q$ die m-reihigen Determinanten der Matrix:

$$(24.) \qquad \begin{vmatrix} dp_{11} & \cdot & dp_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ dp_{m1} & \cdot & dp_{mn} \end{vmatrix}$$

doch treten die Gleichungen: $\Delta_1 = 0, \ldots \Delta_q = 0$ natürlich nur dann auf, wenn $m \leqq n$ ist.

Jede Transformation in den Veränderlichen $z_\mu, x_i, p_{\mu i}$, welche (19.) invariant lässt, muss auch das System (23.) invariant lassen. Ist nun $m > n$, so hat (23.) die einfache Form:

$$(25.) \qquad dz_1 = 0, \ldots dz_m = 0, \; dx_1 = 0, \; \ldots dx_n = 0 \; .$$

Ist andererseits $m \leqq n$, aber > 1, so werden die Δ ganze Functionen zweiter oder höherer Ordnung von den $dp_{\mu i}$ und es ist daher klar, dass eine Transformation, welche das System (23.) invariant lässt, auch das durch Fortlassung der Gleichungen: $\Delta_1 = 0, \ldots \Delta_q = 0$ entstehende Gleichungensystem invariant lassen muss. Wir bekommen somit den

Satz 3. *Ist $m > 1$, so lässt jede Transformation in den Veränderlichen $z_\mu, x_i, p_{\mu i}$, welche das System*

$$(19.) \qquad dz_\mu - \sum_1^n{}_i \, p_{\mu i} \, dx_i = 0 \quad (\mu = 1 \ldots m)$$

invariant lässt, auch das System:

$$(25.) \qquad dz_\mu = 0, \; dx_i = 0 \quad (\mu = 1 \ldots m; \; i = 1 \ldots n)$$

invariant und ist daher eine erweiterte Punkttransformation des Raumes $z_1 \ldots z_m, \; x_1 \ldots x_n$.

Auch für $m = 1$ liefern uns die obigen Betrachtungen ein bemerkenswerthes Ergebniss. Sie zeigen nämlich, dass mit der PFAFF'schen Gleichung:

$$(26.) \qquad dz - \sum_1^n{}_i \, p_i \, dx_i = 0$$

das System:

$$(27.) \qquad dz = 0, \; dx_i = 0, \; dp_i = 0 \quad (i = 1 \ldots n)$$

Digitized by Google

invariant verknüpft ist und zwar gilt diese Beziehung offenbar nicht blos gegenüber Transformationen in den Veränderlichen z, x, p allein, sondern auch gegenüber allen Transformationen in $z, x_1 \dots x_n, p_1 \dots p_n$ und beliebig vielen anderen Veränderlichen: $u_1 \dots u_q$. Es gilt also der

Satz 4. *Jede Transformation in den Veränderlichen: $z, x_1 \dots x_n$, $p_1 \dots p_n$, $u_1 \dots u_q$, welche die Pfaff'sche Gleichung:*

$$(26.) \qquad dz - \sum_1^n p_i\, dx_i = 0$$

invariant lässt, lässt auch das System:

$$(27.) \qquad dz = 0,\ dx_i = 0,\ dp_i = 0 \quad (i = 1 \dots n)$$

invariant und transformirt daher die $2n + 1$ Veränderlichen: $z, x_1 \dots x_n, p_1 \dots p_n$ unter sich.

Vor längerer Zeit schon hat A. V. BÄCKLUND bewiesen, dass die LIE'schen Berührungstransformationen des Raumes $z, x_1 \dots x_n$ die einzigen Transformationen dieses Raumes sind, bei welchen n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten, die sich in der m-ten Ordnung berühren, in eben solche übergeführt werden (s. Math. Ann. IX, S. 297 ff.). Auf Grund des Satzes 4 und des Satzes 4 auf S. 165 meiner vorigen Mittheilung (diese Berichte 1889) ist es nun sehr leicht, das BÄCKLUND'sche Theorem zu beweisen. Ich will mich damit begnügen, das für den Fall der Transformationen zu zeigen, bei welchen Berührung zweiter Ordnung erhalten bleibt, also für den Fall der Osculationstransformationen. Im allgemeinen Falle verfährt man ganz ähnlich.

Eine Osculationstransformation des Raumes $z, x_1 \dots x_n$ ist eine Transformation in den Veränderlichen:

$$z,\ x_i,\ p_i,\ p_{ik} = p_{ki} \quad (i, k = 1 \dots n)\ ,$$

welche das System von PFAFF'schen Gleichungen:

$$(28.) \qquad \begin{cases} dz - \sum_1^n p_k\, dx_k = 0 \\ dp_i - \sum_1^n p_{ik}\, dx_k = 0 \\ (i = 1 \dots n) \end{cases}$$

Digitized by Google

invariant lässt. Mit dem Systeme (28.) ist nun das System der linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial z} + \sum_1^n{}_k \, p_{ki} \frac{\partial f}{\partial p_k} = 0 \,, \quad \frac{\partial f}{\partial p_{ji}} = 0$$

$$(i, j = 1 \ldots n)$$

invariant verknüpft und also nach Satz 4 der vorigen Mittheilung auch das System:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \,, \quad \frac{\partial f}{\partial p_i} = 0 \,, \quad \frac{\partial f}{\partial p_{ik}} = 0$$

$$(i, k = 1 \ldots n)$$

oder was auf dasselbe hinauskommt: die PFAFF'sche Gleichung:

$$(26.) \qquad dz - \sum_1^n{}_i \, p_i \, dx_i = 0 \,.$$

Jede Transformation in den Veränderlichen z, x_i, p_i, p_{ik}, welche (28.) invariant lässt, lässt daher auch die PFAFF'sche Gleichung (26.) invariant; folglich transformirt sie nach Satz 4, S. 203 die Veränderlichen $z, x_1 \ldots x_n, p_1 \ldots p_n$ unter sich, mit andern Worten: sie entsteht aus einer LIE'schen Berührungstransformation des Raumes $z, x_1 \ldots x_n$ durch Erweiterung.

In ganz ähnlicher Weise kann man zeigen, dass die Punkttransformationen des R_{m+n} $(m > 1)$ die einzigen Transformationen dieses Raumes sind, welche n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten, die sich in der p-ten Ordnung berühren, in ebensolche überführen.

§ 5.

Wir nehmen jetzt die allgemeinen Untersuchungen wieder auf.

Es seien Uf und Vf irgend zwei infinitesimale Transformationen der Schaar (2.) und zwar:

$$Uf = \sum_1^m{}_\mu \, u_\mu(x) \, \mathfrak{A}_\mu f \,, \quad Vf = \sum_1^m{}_\mu \, v_\mu(x) \, \mathfrak{A}_\mu f \,.$$

Digitized by Google

Dann ergiebt sich:

$$(UV) = \left(\sum_1^m{}_\mu u_\mu \mathfrak{A}_\mu f, \sum_1^m{}_\nu v_\nu \mathfrak{A}_\nu f\right)$$

$$\equiv \sum_{\mu\nu}^{1\ldots m}{}' u_\mu v_\nu (\mathfrak{A}_\mu \mathfrak{A}_\nu) \quad (\text{modd. } \mathfrak{A}_1 f \ldots \mathfrak{A}_m f)$$

oder:

$$(UV) \equiv \tfrac{1}{2} \sum_{\mu\nu}^{1\ldots m}{}' (u_\mu v_\nu - u_\nu v_\mu)(\mathfrak{A}_\mu \mathfrak{A}_\nu) \quad (\text{modd. } \mathfrak{A}_1 f \ldots \mathfrak{A}_m f) \ .$$

Nun ist die Gleichung $(UV) = 0$ mit Uf und Vf invariant verknüpft, also muss das Gleichungensystem:

$$\mathfrak{A}_1 f = 0, \ldots \mathfrak{A}_m f = 0, \quad (UV) = 0$$

eine simultane Covariante von Uf, Vf und von dem Systeme: $\mathfrak{A}_1 f = 0, \ldots \mathfrak{A}_m f = 0$ sein, oder, was auf dasselbe hinauskommt: Das Gleichungensystem:

$$\mathfrak{A}_1 f = 0, \ldots \mathfrak{A}_m f = 0, \sum_{\mu\nu}^{1\ldots m}{}' (u_\mu v_\nu - u_\nu v_\mu)(\mathfrak{A}_\mu \mathfrak{A}_\nu) = 0$$

ist eine simultane Covariante von Uf, Vf und von dem Systeme Pfaff'scher Gleichungen (1.).

Dieses Ergebniss können wir etwas anders aussprechen, wenn wir die unendlich kleinen Zuwachse einführen, welche Uf und Vf den x ertheilen. Die Zuwachse, welche $x_1 \ldots x_n$ bei Uf erhalten, mögen $dx_1 \ldots dx_n$ heissen, die entsprechenden Zuwachse bei Vf: $\delta x_1 \ldots \delta x_n$. Durch eine ähnliche Betrachtung wie auf S. 195 f. finden wir den

Satz 5. *Mit dem Systeme der Pfaff'schen Gleichungen:*

$$dx_{m+k} - \sum_1^m{}_\mu \mathfrak{a}_{\mu, m+k}\, dx_\mu = 0 \quad (k = 1 \ldots n - m)$$

ist das Gleichungensystem:

Digitized by Google

$$(29.)\quad \begin{cases} dx_{m+k} - \sum_1^m{}_\mu \mathfrak{a}_{\mu,m+k}\, dx_\mu = 0 \\ \delta x_{m+k} - \sum_1^m{}_\mu \mathfrak{a}_{\mu,m+k}\, \delta x_\mu = 0 \\ \mathfrak{A}_1 f = 0\,, \ \ldots \mathfrak{A}_m f = 0 \\ \sum_{\mu\nu}^{1\ldots m} (dx_\mu\, \delta x_\nu - dx_\nu\, \delta x_\mu)\, (\mathfrak{A}_\mu \mathfrak{A}_\nu) = 0 \\ (k = 1 \ldots n - m) \end{cases}$$

invariant verknüpft.

Dieser Satz hat einen einfachen begrifflichen Sinn. Ist nämlich $x_1 \ldots x_n$ irgend ein Punkt und sind $dx_1 \ldots dx_n$ und $\delta x_1 \ldots \delta x_n$ irgend zwei Richtungen, welche dem durch (1.) bestimmten Bündel von ∞^{m-1} Richtungen angehören, so reducirt sich das Gleichungensystem (29.) auf:

$$(30.)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}_1 f = 0\,, \ \ldots \mathfrak{A}_m f = 0 \\ \sum_{\mu\nu}^{1\ldots m} (dx_\mu\, \delta x_\nu - dx_\nu\, \delta x_\mu)\, (\mathfrak{A}_\mu \mathfrak{A}_\nu) = 0 \end{cases}$$

und dieses letztere ordnet offenbar im Allgemeinen dem Punkte $x_1 \ldots x_n$ ein durch B gehendes Bündel von ∞^m Richtungen zu. Bedenkt man weiter, dass $dx_1 \ldots dx_m$ und $\delta x_1 \ldots \delta x_m$ als homogene Coordinaten der beiden in B ausgewählten Richtungen aufgefasst werden können und dass die $dx_\mu\, \delta x_\nu - dx_\nu\, \delta x_\mu$ die homogenen Coordinaten des ebenen Büschels sind, welches durch die beiden Richtungen $dx_1 \ldots dx_m$ und $\delta x_1 \ldots \delta x_m$ bestimmt ist, so erkennt man Folgendes: Jedem ebenen Büschel von ∞^1 Richtungen, welches in B enthalten ist und nicht eine ganz specielle Lage hat, ist ein durch B gehendes ebenes Bündel von ∞^m Richtungen zugeordnet.

Wünscht man alle in B liegenden Büschel zu finden, denen kein ebenes Bündel von ∞^m Richtungen entspricht, so hat man nur die $dx_\mu\, \delta x_\nu - dx_\nu\, \delta x_\mu$ so zu bestimmen, dass die infinitesimale Transformation:

$$\sum_{\mu\nu}^{1\ldots m} (dx_\mu\, \delta x_\nu - dx_\nu\, \delta x_\mu)\, (\mathfrak{A}_\mu \mathfrak{A}_\nu)$$

Digitized by Google

identisch verschwindet. Man findet auf diese Weise als Definitionsgleichungen der betreffenden Büschel diese:

$$\sum_{\mu\nu}^{1\ldots m} (dx_\mu \delta x_\nu - dx_\nu \delta x_\mu)(\mathfrak{A}_\mu \mathfrak{a}_{\nu,m+k} - \mathfrak{A}_\nu \mathfrak{a}_{\mu,m+k}) = 0$$
$$(k = 1 \ldots n - m) .$$

Da es nun von vornherein klar ist, dass der Inbegriff aller dieser Büschel mit dem Punkte $x_1 \ldots x_n$ und dem Bündel B invariant verknüpft ist, so ergiebt sich der

Satz 6. *Mit dem System der Pfaff'schen Gleichungen:*

$$(1.) \quad dx_{m+k} - \sum_1^m{}_\mu \mathfrak{a}_{\mu,m+k} dx_\mu = 0 \quad (k = 1 \ldots n - m)$$

ist das Gleichungensystem:

$$(30.) \quad \begin{cases} dx_{m+k} - \sum_1^m{}_\mu \mathfrak{a}_{\mu,m+k} dx_\mu = 0 \\ \delta x_{m+k} - \sum_1^m{}_\mu \mathfrak{a}_{\mu,m+k} \delta x_\mu = 0 \\ \sum_{\mu\nu}^{1\ldots m} (dx_\mu \delta x_\nu - dx_\nu \delta x_\mu)(\mathfrak{A}_\mu \mathfrak{a}_{\nu,m+k} - \mathfrak{A}_\nu \mathfrak{a}_{\mu,m+k}) = 0 \\ \qquad (k = 1 \ldots n - m) \end{cases}$$

invariant verknüpft.

Ist $m = n - 1$, so liefert dieser Satz die bekannte bilineare Covariante einer PFAFF'schen Gleichung. Dass ein derartiges bilineares Gebilde auch bei *Systemen* von PFAFF'schen Gleichungen auftreten muss, liegt ja recht nahe zu vermuthen; deshalb ist der Satz 6 nicht gerade sehr merkwürdig. Um so merkwürdiger ist der Satz 5, der in dem besonderen Falle $m = n - 1$ natürlich nicht gefunden werden konnte, weil er gerade in diesem Falle bedeutungslos wird.

Digitized by Google

Rohn, *Die Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species*[1]). *Erster Theil.*

Die nachfolgenden Untersuchungen sind ursprünglich dem Gedanken entsprungen, von diesen Raumcurven, ihren abwickelbaren Flächen etc. Modelle anzufertigen, und ich denke später der Gesellschaft solche vorlegen zu können. Um nun den genannten Zweck zu erreichen, war es nothwendig, von gewissen Flächen und Raumcurven, welche mit der Raumcurve 4. Ordnung durch covariante Beziehungen verknüpft sind, einfache analytische Darstellungen zu gewinnen, sei es durch einfache Gleichungen, sei es durch Parameterdarstellung. Die Darlegung beginnt zunächst mit der Parameterdarstellung der Raumcurve 4. Ordnung zweiter Species, indem sie diese Curve im Zusammenhang mit dem zugehörigen Hyperboloid studirt. Hierbei erscheint die Raumcurve durch eine ein-dreideutige Beziehung definirt, die nach der Theorie der Covarianten zweier binärer cubischer Formen auf das Einfachste umgeformt werden kann. Die so gewonnene Parameterdarstellung bildet die Grundlage und liefert zugleich einige besonders einfache geometrische

---

1) Es mag hier auf die wesentlichsten mir bekannten Arbeiten über die rationalen Raumcurven 4. Ordnung hingewiesen werden. Cremona, Annali di Matem. Bd. 4, 1861: Intorno la curva gobba del 4. ord. etc. Weyr, Sitzungsberichte der Wiener Acad. Bd. 71, 72 u. 73: Ueber die Abbildung der rationalen Raumcurve 4. Ord. auf einen Kegelschnitt. Adler, Ebenda, Bd. 86: Ueber Raumcurven 4. Ord. zweiter Art. Jolles, Inauguraldissertation: Die Raumcurve 4. Ord. II. Species synthetisch behandelt. Study, Sitzungsberichte der kgl. sächs. Ges. d. Wissensch. 1886: Ueber die Raumcurve 4. Ord. Jolles, Theorie der Osculanten. Habilitationsschrift, Aachen 1888. Staiil, Crelle's Journal Bd. 101: Die Raumcurve 4. Ord. zweiter Art etc. Ferner Bd. 104: Ueber die Fundamentalinvolutionen auf rationalen Curven.

Digitized by Google

Eigenschaften unserer Raumcurve. Hieran schliessen sich Betrachtungen über covariante Gebilde (Flächen, Raumcurven, abwickelbare Flächen), die sich zum Theil, jedoch in anderer Form, bereits in anderen Abhandlungen vorfinden; es sei deshalb hier ein für alle Mal auf die anfangs citirten Abhandlungen verwiesen. Weiterhin sind dann Parameterdarstellungen einzelner covarianter Gebilde gegeben und ihre zwei-zweideutigen Beziehungen zur gegebenen Raumcurve 4. Ordnung aufgestellt; es sind also diese Beziehungen irrationale Covarianten. Hierdurch wird eine Reihe neuer Resultate gewonnen und gerade hierdurch gelingt es, einfache analytische Ausdrücke für die bez. covarianten Gebilde zu finden, was mit den seitherigen Methoden nicht möglich war. Zum Schluss sind dann noch einige Specialfälle der Raumcurve 4. Ordnung zweiter Species behandelt.

I. Die Parameterdarstellung der rationalen Raumcurve C_4.

Geht man zunächst von dem Hyperboloid H aus, auf dem die C_4 gelegen ist, so kann man sowohl den Erzeugenden der einen, als denen der andern Schaar Parameter zuertheilen. Die Parameter der Geraden der ersten Schaar bezeichnen wir mit $k_1 : k_2$, diejenigen der Geraden der zweiten Schaar mit $k_1' : k_2'$. Eine lineo-lineare Gleichung zwischen den Parametern $k_1 : k_2$ und $k_1' : k_2'$ bestimmt auf dem Hyperboloid H einen Kegelschnitt. Daraus folgt speciell, dass sich die Erzeugenden mit gleichen Parametern in den Punkten eines Kegelschnittes treffen. Eine Raumcurve 4. Ordnung, welche von den Geraden der ersten Schaar je ein Mal und von den Geraden der zweiten Schaar je drei Mal getroffen wird, wird dann bestimmt durch die *eindreideutige* Beziehung:

$$(1.) \qquad k_1' \varphi_3(k_1 k_2) + k_2' \psi_3(k_1 k_2) = 0 \ ,$$

wo φ_3 und ψ_3 allgemeine Ausdrücke 3. Grades in den k_1, k_2 sind.

Die Invariantentheorie[1]) lehrt aber, dass φ_3 und ψ_3 als lineare Polaren der nämlichen Form 4. Grades: $f(k_1 k_2)$ dargestellt werden können. Dazu ist ja nur nöthig, dass ein Punkt

---

1) Man vergleiche: Gordan's Vorlesungen über Invariantentheorie p. 330 ff.

Digitized by Google

$\lambda_1 : \lambda_2$ existirt, dessen lineare Polare in Bezug auf $\varphi_3 = 0$ übereinstimmt mit der linearen Polaren eines bestimmten Punktes $\mu_1 : \mu_2$ in Bezug auf $\psi_3 = 0$. Dadurch werden aber $\lambda_1 : \lambda_2 : \mu_1 : \mu_2$ linear[1]) bestimmt. Führen wir nun eine lineare Transformation aus, indem wir in φ_3 und ψ_3 statt $k_1 : k_2$ das Verhältniss $(k_1 \mu_1 + k_2 \lambda_1) : (k_1 \mu_2 + k_2 \lambda_2)$ einsetzen, so wird alsdann:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial k_2} = \frac{\partial \psi}{\partial k_1},$$

woraus sich:

$$\varphi = \frac{\partial f}{\partial k_1} = f_1 \quad \text{und} \quad \psi = \frac{\partial f}{\partial k_2} = f_2$$

ergibt.

Die ein-dreideutige Beziehung können wir also in der Form:

$$k_1' f_1(k_1 k_2) + k_2' f_2(k_1 k_2) = 0 \tag{2.}$$

schreiben, wo f_1 und f_2 die partiellen Differentialquotienten einer Form 4. Grades $f(k_1 k_2) = 0$ sind. *Zugleich ist der Parameter $k_1 : k_2$ den Punkten der C_4 eindeutig zugeordnet.*

Diese Darstellung lässt sich in der folgenden Weise geometrisch deuten. Die Relation $k_1 : k_2 = k_1' : k_2'$, oder $k_1 k_2' - k_2 k_1' = 0$ stellt auf dem Hyperboloid einen Kegelschnitt dar, den wir als *Hauptkegelschnitt* und dessen Ebene wir als *Hauptebene* der C_4 bezeichnen wollen. Die Gleichung: $f(k_1 k_2) = 0$ stellt vier Geraden der ersten Schaar dar. Bedeutet $k_1' : k_2'$ in der Gleichung (2.) den Parameter einer Geraden der *zweiten* Schaar, so stellt jene Gleichung die drei entsprechenden Geraden der ersten Schaar dar; bedeutet dagegen $k_1' : k_2'$ daselbst den Parameter einer Geraden der *ersten* Schaar, so stellt die Gleichung (2.) die erste Polare dieser Geraden in Bezug auf das Quadrupel $f(k_1 k_2) = 0$ dar. Zieht man also durch jeden Punkt des Hauptkegelschnittes eine Erzeugende der *zweiten* Schaar, welche $f(k_1 k_2) = 0$ in je einem Punktquadrupel schneidet, und bestimmt die *erste* Polare jedes Punktes in Bezug auf das zugehörige Quadrupel, so erhält man je drei Punkte der C_4. Ganz ebenso ergibt sich der weitere

---

1) Setzen wir $\varphi_3 = a_k^3 = b_k^3$ und $\psi_3 = \alpha_k^3 = \beta_k^3$, so verschwinden die linearen simultanen Covarianten: $(ab)^2 (a\alpha)(b\alpha) a_k$ und $(\alpha\beta)^2 (\alpha a)(\beta a) a_k$ für die Parameterwerthe $\lambda_1 : \lambda_2$ resp. $\mu_1 : \mu_2$.

Digitized by Google

Satz. Zieht man durch jeden Punkt des Hauptkegelschnittes eine Erzeugende der ersten Schaar, welche $f(k_1' k_2') = 0$ in je einem Quadrupel schneidet, und bestimmt die *lineare* Polare jedes Punktes in Bezug auf das zugehörige Quadrupel, so erhält man je einen Punkt der nämlichen C_4. Selbstverständlich gehören die Schnittpunkte des Quadrupels $f = 0$ mit dem Hauptkegelschnitte der C_4 an. Man gewinnt also die Sätze:

Wählt man auf einem Hyperboloid beliebig einen Kegelschnitt und ein Quadrupel aus den Erzeugenden einer Schaar, und construirt zu allen Punkten des Kegelschnittes die erste Polare in Bezug auf das Quadrupel (indem man jedes Mal eine Erzeugende der andern Schaar zieht und die erste Polare in Bezug auf die vier Schnittpunkte construirt), *so erhält man eine allgemeine Raumcurve 4. Ordnung zweiter Species. Umgekehrt kann jede derartige Curve auf eine und nur auf eine Art in der genannten Weise erzeugt werden. Wählt man auf dem Hyperboloid den gleichen Kegelschnitt wie vorher und ausserdem ein Quadrupel aus den Erzeugenden der andern Schaar, welches den Kegelschnitt in den gleichen Punkten trifft, wie das vorhergenannte, und construirt zu allen Punkten des Kegelschnittes die lineare Polare in Bezug auf dieses Quadrupel, so erhält man die gleiche Raumcurve 4. Ordnung wie vorher.* Auch hier ist eine derartige Erzeugung nur auf eine einzige Weise möglich.

Wir werden weiterhin die Raumcurve 4. Ordnung entweder durch die beiden Gleichungen:

$$(3.)\qquad \begin{aligned} &f(k_1 k_2) = A k_1^4 + 4 B k_1^3 k_2 + 6 C k_1^2 k_2^2 + 4 D k_1 k_2^3 + E k_2^4 , \\ &k_1' f_1(k_1 k_2) + k_2' f_2(k_1 k_2) = 0 , \end{aligned}$$

oder durch die beiden Gleichungen:

$$(4.)\qquad \begin{aligned} &f(k_1 k_2) = k_1^4 + 6 a k_1^2 k_2^2 + k_2^4 , \\ &k_1' f_1(k_1 k_2) + k_2' f_2(k_1 k_2) = 0 = k_1'(k_1^3 + 3 a k_1 k_2^2) + k_2'(k_2^3 + 3 a k_2 k_1^2) \end{aligned}$$

definiren, wo $k_1 : k_2$ den Parameter des Curvenpunktes bedeutet. Die Gleichungen (4.) werden aus den Gleichungen (3.) erhalten, indem man die Variablen $k_1 : k_2$ und $k_1' : k_2'$ der nämlichen linearen Transformation unterwirft.

Digitized by Google

II. Die Transformationen der C_4 in sich; die Erzeugenden des Hyperboloides H, welche C_4 tangiren.

Es gibt drei lineare Transformationen der $k_1 : k_2$, welche die Gleichung $f(k_1 k_2) = 0$ ungeändert lassen; unterwirft man die Parameter $k_1' : k_2'$ der gleichen Transformation, so bleiben beide Gleichungen (3.) und somit die C_4 ungeändert. Bekanntlich besitzt $f(k_1 k_2)$ eine Covariante 6. Grades T, welche in drei quadratische Factoren zerfällt und drei Paar Erzeugenden der ersten Schaar darstellt. Bei jeder der genannten drei linearen Transformationen bleiben die Geraden eines Paares ungeändert, während die Geraden der andern Paare sich vertauschen; ebenso bleiben die Geraden des entsprechenden Paares der zweiten Schaar ungeändert. Eine solche Transformation der Parameter $k_1 : k_2$ und $k_1' : k_2'$ lässt also die vier Punkte des Hyperboloides fest, in denen sich ein Geradenpaar der Covariante $T(k_1 k_2) = 0$ mit dem entsprechenden Geradenpaar der Covariante $T(k_1' k_2'$ schneidet; von diesen vier Punkten liegen zwei auf dem Hauptkegelschnitt und die beiden andern auf der C_4. Man kann nun ersichtlich die Transformation der Parameter durch eine *geschaart-involutorische Raumtransformation* ersetzen, deren Leitstrahlen das windschiefe Viereck jener festen Paare von Erzeugenden zu einem Tetraëder ergänzen. Da ferner die Geradenpaare von $T(k_1 k_2) = 0$ sich gegenseitig harmonisch trennen, so schneiden sich die Leitstrahlenpaare der drei geschaart-involutorischen Raumtransformationen gegenseitig, d. h. sie bilden die drei Paar Gegenkanten eines Tetraëders. Hieraus fliesst der bekannte Satz:

Jede rationale Raumcurve 4. Ordnung geht durch drei geschaart-involutorische Raumtransformationen in sich über, deren Leitstrahlenpaare die Gegenkanten eines Tetraëders bilden, das zugleich Polartetraëder des Hyperboloides ist, dem die C_4 angehört. Eine Seite des Tetraëders fällt mit der Hauptebene zusammen und die drei Eckpunkte in ihr sind die Diagonalpunkte des Quadrupels $f(k_1 k_2) = 0$, das die C_4 aus ihr ausscheidet. Der vierte Eckpunkt ist der Pol der Hauptebene in Bezug auf H *und soll Hauptpunkt heissen. Die drei Tetraëderkanten durch den Hauptpunkt sind Doppelsecanten der C_4 und schneiden aus ihr die drei Punktepaare der Covariante 6. Grades $T(k_1 k_2) = 0$ aus.*

Dieses Tetraëder soll *Fundamentaltetraëder* heissen. Machen wir dasselbe zum Coordinatentetraëder, so bedeuten jene Raum-

Digitized by Google

transformationen einen Vorzeichenwechsel für je zwei der vier Coordinaten. Ist die Parametervertheilung auf der C_4 durch die Gleichungen (4.) gegeben, so führen jene drei Raumtransformationen den Curvenpunkt $k_1 : k_2$ in den Curvenpunkt $k_1 : -k_2$, resp. in $k_2 : k_1$, resp. in $k_2 : -k_1$ über.

Unter den Erzeugenden des Hyperboloides H, welche Trisecanten der C_4 sind, giebt es vier, die die C_4 berühren. Für die Parameter $k_1' : k_2'$ dieser tangirenden Erzeugungen oder Trisecanten muss die Gleichung 3. Grades:

$$k_1^3(Ak_1' + Bk_2') + 3k_1^2k_2(Bk_1' + Ck_2') + 3k_1k_2^2(Ck_1' + Dk_2') + k_2^3(Dk_1' + Ek_2') = 0$$

eine Doppelwurzel aufweisen. *Die Parameter der tangirenden Erzeugenden befriedigen also die Discriminante:*

$$\begin{vmatrix} (Ak_1'+Bk_2') & 2(Bk_1'+Ck_2') & (Ck_1'+Dk_2') & 0 \\ 0 & (Ak_1'+Bk_2') & 2(Bk_1'+Ck_2') & (Ck_1'+Dk_2') \\ (Bk_1'+Dk_2') & 2(Ck_1'+Dk_2') & (Dk_1'+Ek_2') & 0 \\ 0 & (Bk_1'+Ck_2') & 2(Ck_1'+Dk_2') & (Dk_1'+Ek_2') \end{vmatrix} = 0 .$$

Setzen wir die Gleichungsform (4.) voraus, so ergeben sich die Parameter der *berührenden Trisecanten* aus:

$$(5.) \qquad 4a^3(k_1'^4 + k_2'^4) - (3a^4 + 6a^2 - 1)k_1'^2k_2'^2 = 0 .$$

Auf den tangirenden Trisecanten, die wir mit $E_1E_2E_3E_4$ bezeichnen wollen, liegen die Berührungspunkte $b_1b_2b_3b_4$ und die einfachen Punkte $p_1p_2p_3p_4$ respective. Für die *Berührungspunkte* müssen die ersten Ableitungen der Gleichung: $k_1'f_1(k_1k_2)+k_2'f_2(k_1k_2) = 0$ verschwinden; d. h. die Hesse'sche Form von $f(k_1k_2)$, nämlich:

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{vmatrix} = 0$$

liefert die Parameter der Berührungspunkte. Unter Annahme der Gleichungsform (4.) bestimmen sich die *Berührungspunkte* b_i aus der Gleichung:

$$(6.) \qquad a(k_1^4 + k_2^4) - (3a^2 - 1)k_1^2k_2^2 = 0 .$$

Digitized by Google

Die Parameter zweier Punkte $k_1 : k_2$ und $\lambda_1 : \lambda_2$, welche der nämlichen Erzeugenden angehören, genügen der Gleichung:

$$f_1(k_1 k_2) f_2(\lambda_1 \lambda_2) - f_1(\lambda_1 \lambda_2) f_2(k_1 k_2) = 0 \ .$$

Ist die Erzeugende Tangente der C_4, so muss diese Gleichung zwei gleiche Wurzeln $\lambda_1 : \lambda_2$ besitzen; das zugehörige $k_1 : k_2$ liefert dann den einfachen Punkt auf der Erzeugenden. Legt man die Gleichung (4.) zu Grunde, so geht die vorstehende Gleichung über in:

$$\lambda_1^3(k_2^3 + 3ak_1^3) + \lambda_2^3(k_1^3 + 3ak_2^3) + (1 - 9a^2)\lambda_1\lambda_2 k_1 k_2 = 0 \ .$$

Ihre Discriminante:

$$(7.) \qquad 4a(k_1^4 + k_2^4) - (27a^4 - 18a^2 - 1) k_1^2 k_2^2 = 0$$

stellt die Parameter der *einfachen Punkte* p_i auf den vier berührenden Trisecanten dar.

III. Vier Punkte der C_4 in einer Ebene; die aus der Parametervertheilung auf dem Hyperboloid H folgenden Raumcoordinaten.

Die Parameter der Punkte eines beliebigen Kegelschnittes auf H genügen einer lineo-linearen Gleichung:

$$\frac{k_1'}{k_2'} = \frac{\alpha k_1 + \beta k_2}{\gamma k_1 + \delta k_2} \ ,$$

wo $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ willkürliche Constanten sind.

Für die vier Punkte der C_4, welche diesem Kegelschnitte angehören, gilt ferner die Gleichung: $k_1' f_1(k_1 k_2) + k_2' f_2(k_1 k_2) = 0$. Die Parameter von vier Punkten der C_4, welche einer Ebene angehören, sind demnach die Wurzeln der Gleichung:

$$(8.) \qquad (\alpha k_1 + \beta k_2) f_1(k_1 k_2) + (\gamma k_1 + \delta k_2) f_2(k_1 k_2) = 0 \ ,$$

oder:

$$(8a.) \qquad \begin{aligned} & k_1^4(A\alpha + B\gamma) + k_1^3 k_2(3B\alpha + A\beta + 3C\gamma + B\delta) \\ & + k_1^2 k_2^2(3C\alpha + 3B\beta + 3D\gamma + 3C\delta) \\ & + k_1 k_2^3(D\alpha + 3C\beta + E\gamma + 3D\delta) + k_2^4(D\beta + E\delta) = 0. \end{aligned}$$

Digitized by Google

Sind nun $k_1 : k_2$, $\lambda_1 : \lambda_2$, $\mu_1 : \mu_2$, $\nu_1 : \nu_2$ *die Parameter von vier Punkten der* C_4, *die in einer Ebene liegen, und setzen wir die symmetrischen Functionen:*

$$(9.)\quad \left|\begin{array}{l} k_1\lambda_1\mu_1\nu_1 = S_0\,, \quad k_2\lambda_2\mu_2\nu_2 = S_4\,, \\ k_1\lambda_1\mu_1\nu_2 + k_1\lambda_1\mu_2\nu_1 + \cdot + \cdot = -S_1\,, \\ k_1\lambda_1\mu_2\nu_2 + k_2\lambda_2\mu_1\nu_1 + \cdot + \cdot + \cdot + \cdot = S_2\,, \\ k_1\lambda_2\mu_2\nu_2 + k_2\lambda_1\mu_2\nu_2 + \cdot + \cdot = -S_3\,, \end{array}\right.$$

so müssen jene Parameter die Gleichung erfüllen:

$$(10.)\quad \left|\begin{array}{ccccc} S_4 & S_3 & S_2 & S_1 & S_0 \\ A & 3B & 3C & D & 0 \\ 0 & A & 3B & 3C & D \\ B & 3C & 3D & E & 0 \\ 0 & B & 3C & 3D & E \end{array}\right| = 0\,.$$

Denn die symmetrischen Functionen $S_4\ S_3\ S_2\ S_1\ S_0$ sind nichts anderes als die Coefficienten der Gleichung (8a.), d. h. man erhält die erste Horizontalreihe der Determinante (10.), indem man die übrigen der Reihe nach mit α, β, γ, δ multiplicirt und addirt.

Nimmt man in der Determinante (10.) alle vier Parameter gleich, d. h. setzt man:

$$S_4 : S_3 : S_2 : S_1 : S_0 = k_2^4 : -4k_1k_2^3 : 6k_1^2k_2^2 : -4k_1^3k_2 : k_1^4\,,$$

so erhält man die Gleichung der *vier Punkte mit stationären Ebenen*, oder wie wir kurz sagen wollen, der *vier Wendepunkte.* Werden drei Parameter gleich gesetzt, so wird die Ebene Schmiegungsebene; setzt man zwei Mal zwei Parameter einander gleich, so wird die Ebene Doppeltangentialebene.

Geht man von der Gleichungsform (4.) aus, *so liegen vier Punkte in einer Ebene, wenn ihre Parameter die Relation:*

$$3a(S_0 + S_4) - S_2 = 0\,,$$

oder:

$$(11.)\quad 0 = 3a(k_1\lambda_1\mu_1\nu_1 + k_2\lambda_2\mu_2\nu_2)$$
$$-(k_1\lambda_1\mu_2\nu_2 + k_2\lambda_2\mu_1\nu_1 + k_1\lambda_2\mu_1\nu_2 + k_2\lambda_1\mu_2\nu_1 + k_1\lambda_2\mu_2\nu_1 + k_2\lambda_1\mu_1\nu_2)$$

erfüllen.

Digitized by Google

Die Wendepunkte bestimmen sich demnach aus der Gleichung:

$$(12.) \qquad k_1^4 + k_2^4 - \frac{2}{a} k_1^2 k_2^2 = 0 \ .$$

Zwischen Berührungspunkt $k_1 : k_2$ und Schnittpunkt $\lambda_1 : \lambda_2$ einer beliebigen Schmiegungsebene der C_4 besteht die Beziehung:

$$(13.) \qquad (a k_1^3 - k_1 k_2^2)\,\lambda_1 + (a k_2^3 - k_2 k_1^2)\,\lambda_2 = 0 \ .$$

Zwischen den beiden Berührungspunkten einer Doppeltangentialebene endlich gilt die Beziehung:

$$(14.) \quad k_1^3(\lambda_2^3 - 3a\lambda_1^2) + k_2^3(\lambda_1^3 - 3a\lambda_2^3) + 4 k_1 k_2 \lambda_1 \lambda_2 = 0 \ .$$

Um ein *System von Raumcoordinaten* aufzustellen, welches zu der C_4 in einfachster Beziehung steht, legen wir das Fundamentaltetraëder dem System zu Grunde. Die Hauptebene machen wir zur Ebene $x_4 = 0$; die Ebenen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ schneiden dann aus dem Hauptkegelschnitt die drei Punktepaare der Covariante 6. Grades $T(k_1 k_2) = 0$ aus, während die Kanten: $x_2 = x_3 = 0$, $x_3 = x_1 = 0$, $x_4 = x_2 = 0$ aus der C_4 die Punktepaare der Covariante $T(k_1 k_2) = 0$ ausschneiden. Unter Annahme der Gleichungsform (4.) mag der Hauptkegelschnitt von $x_1 = 0$ in dem Punktepaar $\frac{k_1}{k_2} = 0$ resp. ∞, von $x_2 = 0$ in dem Punktepaar $\frac{k_1}{k_2} = +1$ resp. -1, von $x_3 = 0$ in dem Paar $\frac{k_1}{k_2} = +i$ resp. $-i$ getroffen werden.

Die Kante $x_2 = x_3 = 0$ trifft dann C_4 in den Punkten

$$\frac{k_1}{k_2} = 0 \ , \ \frac{k_1'}{k_2'} = \infty \text{ und } \frac{k_1}{k_2} = \infty \ , \ \frac{k_1'}{k_2'} = 0 \ ;$$

die Kante $x_3 = x_1 = 0$ trifft dann C_4 in den Punkten

$$\frac{k_1}{k_2} = 1 \ , \ \frac{k_1'}{k_2'} = -1 \text{ und } \frac{k_1}{k_2} = -1 \ , \ \frac{k_1'}{k_2'} = 1 \ ;$$

die Kante $x_1 = x_2 = 0$ trifft dann C_4 in den Punkten

$$\frac{k_1}{k_2} = i \ , \ \frac{k_1'}{k_2'} = -i \text{ und } \frac{k_1}{k_2} = -i \ , \ \frac{k_1'}{k_2'} = i \ .$$

Digitized by Google

Der Kegelschnitt in $x_1 = 0$ hat also die Gleichung: $k_1 k_2' + k_2 k_1' = 0$,
- - - $x_2 = 0$ - - - - $k_1 k_1' - k_2 k_2' = 0$,
- - - $x_3 = 0$ - - - - $k_1 k_1' + k_2 k_2' = 0$,
- - - $x_4 = 0$ - - - - $k_1 k_2' - k_2 k_1' = 0$.

Wir setzen nun noch fest, *dass das Hyperboloid* H *durch die Gleichung:*

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0 \tag{15.}$$

repräsentirt sei, dann sind die Coordinaten eines beliebigen Punktes von H gegeben durch:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 \tag{16.}$$
$$= (k_1 k_2' + k_2 k_1') : (k_1 k_1' - k_2 k_2') : (k_1 k_1' + k_2 k_2') : (k_1 k_2' - k_2 k_1') \ .$$

Eine beliebige Ebene des Raumes ist bestimmt durch die Gleichung:

$$\frac{k_1'}{k_2'} = \frac{\alpha k_1 + \beta k_2}{\gamma k_1 + \delta k_2} \ , \tag{17.}$$

oder:

$$(\alpha - \delta)(k_1 k_2' + k_2 k_1') - (\beta + \gamma)(k_1 k_1' - k_2 k_2')$$
$$+ (\beta - \gamma)(k_1 k_1' + k_2 k_2') + (\alpha + \delta)(k_1 k_2' - k_2 k_1') = 0 \ .$$

Da aber die Klammerausdrücke nach (16.) proportional den Punktcoordinaten sind, so erhalten wir als *Coordinaten der beliebigen Ebene* (17.):

$$u_1 = (\alpha - \delta), \ u_2 = -(\beta + \gamma), \ u_3 = (\beta - \gamma), \ u_4 = (\alpha + \delta) \ . \tag{18.}$$

Speciell ergeben sich hieraus für eine Tangentialebene von H mit den Erzeugenden $k_1 : k_2$ und $k_1' : k_2'$ die Coordinaten:

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 \tag{16a.}$$
$$= (k_1 k_2' + k_2 k_1') : (k_1 k_1' - k_2 k_2') : -(k_1 k_1' + k_2 k_2') : -(k_1 k_2' - k_2 k_1') \ ,$$

wie es ja nach (15.) sein muss. Endlich finden wir als *Coordinaten eines beliebigen Punktes* (des Pols der Ebene (18.)):

$$x_1 = -(\alpha - \delta), \ x_2 = (\beta + \gamma), \ x_3 = (\beta - \gamma), \ x_4 = (\alpha + \delta). \tag{18a.}$$

Digitized by Google

IV. Die Coordinaten einer Ebene durch drei Punkte der C_4: die Schmiegungsebenen.

Eine Ebene soll einerseits bestimmt sein durch drei Punkte $\lambda_1 : \lambda_2$. $\mu_1 : \mu_2$, $\nu_1 : \nu_2$ der Raumcurve 4. Ordnung, andererseits durch die Relation:

$$\frac{k_1'}{k_2'} = \frac{\alpha k_1 + \beta k_2}{\gamma k_1 + \delta k_2} .$$

Die Schnittpunkte mit der C_4 ergeben sich aus der Gleichung (8a.). Sind also $k_1 : k_2$, $\lambda_1 : \lambda_2$, $\mu_1 : \mu_2$, $\nu_1 : \nu_2$ die vier Schnittpunkte und sind S_0, S_1, S_2, S_3. S_4 die durch (9.) definirten symmetrischen Functionen, so haben wir:

$$\begin{aligned}
S_0 &= D\beta + E\delta , \quad S_4 = A\alpha + B\gamma , \\
S_1 &= D\alpha + 3C\beta + E\gamma + 3D\delta , \\
S_2 &= 3C\alpha + 3B\beta + 3D\gamma + 3C\delta , \\
S_3 &= 3B\alpha + A\beta + 3C\gamma + B\delta .
\end{aligned}$$

Hieraus bestimmen sich aber die Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, k_1, k_2$ eindeutig. Schreiben wir nämlich zur Abkürzung:

$$\begin{aligned}
-s_0 &= \lambda_1\mu_1\nu_1 ; \qquad s_1 = \lambda_1\mu_1\nu_2 + \lambda_1\mu_2\nu_1 + \lambda_2\mu_1\nu_1 , \\
s_3 &= \lambda_2\mu_2\nu_2 ; \quad -s_2 = \lambda_2\mu_2\nu_1 + \lambda_2\mu_1\nu_2 + \lambda_1\mu_2\nu_2 ,
\end{aligned}$$

so werden jene Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\cdot + D\beta + \cdot + E\delta + s_0 k_1 + \cdot &= 0 , \\
D\alpha + 3C\beta + E\gamma + 3D\delta + s_1 k_1 - s_0 k_2 &= 0 , \\
3C\alpha + 3B\beta + 3D\gamma + 3C\delta + s_2 k_1 - s_1 k_2 &= 0 , \\
3B\alpha + A\beta + 3C\gamma + B\delta + s_3 k_1 - s_2 k_2 &= 0 , \\
A\alpha + \cdot + B\gamma + \cdot + \cdot - s_3 k_2 &= 0 .
\end{aligned}$$

d. h. wir erhalten[1]):

4) Man hätte auch $\alpha : \beta : \gamma : \delta$ aus der Gleichung (8.) durch die Gleichung:

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta = \left\| \begin{matrix} \lambda_1 f_1(\lambda) & \lambda_2 f_1(\lambda) & \lambda_1 f_2(\lambda) & \lambda_2 f_2(\lambda) \\ \mu_1 f_1(\mu) & . & . & \mu_2 f_2(\mu) \\ \nu_1 f_1(\nu) & . & . & \nu_2 f_2(\nu) \end{matrix} \right\|$$

darstellen können, wo die Determinanten noch den Factor $\lambda\mu \cdot \mu\nu \cdot \nu\lambda$ enthalten, doch ist diese Darstellung viel zu complicirt.

Digitized by Google

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta : k_1 : k_2 = \begin{Vmatrix} 0 & D & 0 & E & s_0 & 0 \\ D & 3C & E & 3D & s_1 & -s_0 \\ 3C & 3B & 3D & 3C & s_2 & -s_1 \\ 3B & A & 3C & B & s_3 & -s_2 \\ A & 0 & B & 0 & 0 & -s_3 \end{Vmatrix} .$$

Legen wir wieder die Gleichungsform (4.) zu Grunde, so erhalten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Werthe:

$$(19.) \quad \left| \begin{array}{l} \alpha = (1 - 9a^2)\, s_3 (s_2 - 3as_0) , \\ \beta = (s_2 - 3as_0)^2 - (s_1 - 3as_3)(s_3 - 3as_1) , \\ \gamma = -(s_1 - 3as_3)^2 + (s_0 - 3as_2)(s_2 - 3as_0) , \\ \delta = -(1 - 9a^2)\, s_0 (s_1 - 3as_3) . \end{array} \right.$$

Die Coordinaten der Ebene durch die drei Punkte $\lambda_1 : \lambda_2$, $\mu_1 : \mu_2$, $\nu_1 : \nu_2$ der Raumcurve 4. Ordnung werden hiernach:

$$(20.) \quad \left| \begin{array}{l} u_1 = (1 - 9a^2)[s_0 s_1 + s_2 s_3 - 6as_0 s_3] , \\ u_2 = (1 - 3a)[(s_0 + s_2)(3as_0 - s_2) - (s_3 + s_1)(3as_3 - s_1)] , \\ u_3 = (1 + 3a)[(s_0 - s_2)(3as_0 - s_2) + (s_3 - s_1)(3as_3 - s_1)] , \\ u_4 = (1 - 9a^2)[s_2 s_3 - s_0 s_1] . \end{array} \right.$$

Rücken die drei Punkte zusammen, d. h. setzen wir: $s_0 : s_1 : s_2 : s_3 = -k_1^3 : 3k_1^2 k_2 : -3k_1 k_2^2 : k_2^3$, so wird die Ebene zur Schmiegungsebene im Curvenpunkte $k_1 : k_2$.

Daraus ergeben sich als Coordinaten einer Schmiegungsebene:

$$(21.) \quad \left| \begin{array}{l} u_1 = -(1 - 9a^2) k_1 k_2 [k_1^4 + k_2^4 - 2ak_1^2 k_2^2] , \\ u_2 = +(1 - 3a)(k_1^2 - k_2^2)[a(k_1^4 + k_2^4) + 2(1 + 2a) k_1^2 k_2^2] , \\ u_3 = +(1 + 3a)(k_1^2 + k_2^2)[a(k_1^4 + k_2^4) + 2(1 - 2a) k_1^2 k_2^2] , \\ u_4 = +(1 - 9a^2) k_1 k_2 (k_1^4 - k_2^4) . \end{array} \right.$$

Unter Zuhilfenahme der Gleichung (12.) ergeben sich aus (21.) *die Coordinaten der vier Wendeebenen:*

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
u_1 &= -\sqrt{1+a}\cdot\sqrt{1-a}\ ,\\
u_2 &= \frac{2}{1+3a}\sqrt{2a}\cdot\sqrt{1+a}\ ,\\
u_3 &= \frac{2}{1-3a}\sqrt{2a}\cdot\sqrt{1-a}\ ,\\
u_4 &= 1\ ,
\end{aligned}
\qquad (21a.)
$$

wobei die Vorzeichen der Wurzeln $\sqrt{2a}$, $\sqrt{1+a}$, $\sqrt{1-a}$ beliebig gewählt werden können.

Die Gleichungen (20.) gestatten uns noch eine interessante Frage zu beantworten. Durch einen Punkt $\lambda_1 : \lambda_2$ der Raumcurve 4. Ordnung giebt es drei Schmiegungsebenen, deren Berührungspunkte sich aus der Gleichung (13.) bestimmen. Wir legen durch die drei Berührungspunkte dieser Schmiegungsebenen eine Ebene, die bekanntlich auch den Punkt $\lambda_1 : \lambda_2$ enthält, und bestimmen die Fläche, die von dieser Ebene umhüllt wird, wenn der Punkt $\lambda_1 : \lambda_2$ die Raumcurve durchläuft. Nach (13.) haben wir zu setzen:

$$s_0 : s_1 : s_2 : s_3 = -a\lambda_2 : -\lambda_1 : \lambda_2 : a\lambda_1\ ,$$

so dass wir für unsere Ebene die Coordinaten erhalten:

$$u_1 = (1-9a^2)\,2a\lambda_1\lambda_2\ , \qquad u_2 = (1-3a)(1-a)(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\ ,$$
$$u_3 = (1+3a)(1+a)(\lambda_1^2+\lambda_2^2)\ , \quad u_4 = 0\ .$$

Legt man durch je drei Punkte der C_4, deren Schmiegungsebenen C_4 in dem nämlichen weiteren Punkte schneiden, eine Ebene, so umhüllen diese Ebenen den Kegel[1]*:*

$$\frac{u_1^2}{a^2} + \frac{u_2^2(1+3a)^2}{(1-a)^2} - \frac{u_3^2(1-3a)^2}{(1+a)^2} = 0\ , \qquad (22.)$$

dessen Scheitel in den Hauptpunkt fällt.

Man kann aus (20.) den allgemeinen Satz erschliessen: Ist auf C_4 eine beliebige cubische Involution gegeben, und legt man durch ihre Punktetripel Ebenen, so umhüllen dieselben einen Kegel 2. Ordnung; aus (20.) kann man leicht die Gleichung dieses Kegels ableiten. In geometrischer Form lautet dieser Satz: Legt man durch fünf Punkte der C_4 und drei beliebige Raumpunkte ein Büschel von Flächen 2. Grades, so schneidet dasselbe die C_4 in Punktetripeln, deren Ebenen einen Kegel 2. Ordnung umhüllen.

1) Vgl. CREMONA, a. a. O. pag. 98.

Digitized by Google

V. Die Fläche I_2 der aequianharmonischen Schnitte und die Fläche Φ_3 der harmonischen Schnitte; die abwickelbare Fläche der C_4.

Unter der Fläche I_2 der aequianharmonischen Schnitte verstehen wir die Fläche, deren Tangentialebenen aus der rationalen Raumcurve 4. Ordnung vier aequianharmonische Punkte ausschneiden. Vier Punkte der C_4, die in einer Ebene liegen, genügen aber der Gleichung (8.) resp. (8a.); die *quadratische Invariante* dieser Gleichung bestimmt also die Fläche I_2. Führen wir in die Gleichung (8.) statt der Grössen α, β, γ, δ die Coordinaten u_1, u_2, u_3, u_4 ein, so geht dieselbe unter Annahme der Gleichungsform (4.) über in:

$$(8\,\text{b.})\quad 0 = k_1^4(u_4+u_1) - k_1^3k_2[(1+3a)u_2-(1-3a)u_3] + 6ak_1^2k_2^2u_4 - k_1k_2^3[(1+3a)u_2+(1-3a)u_3] + k_2^4(u_4-u_1)\,.$$

Bilden wir die quadratische Invariante von (8b.), so erhalten wir als *Gleichung der Fläche* I_2:

$$(23.)\quad 4u_1^2 + (1+3a)^2u_2^2 - (1-3a)^2u_3^2 - 4(1+3a^2)u_4^2 = 0\,.$$

Bilden wir die cubische Invariante[1]) von (8b.) so erhalten wir die *Gleichung der Fläche 3. Classe* Φ_3:

$$(24.)\quad \begin{vmatrix} 2(1+a)u_4 & -(1+3a)u_2 & 2u_1 \\ -(1+3a)u_2 & 4au_4 & (1-3a)u_3 \\ 2u_1 & (1-3a)u_3 & 2(1-a)u_4 \end{vmatrix} = 0\,,$$

oder:

$$(24\,\text{a.})\quad -8a(1-a^2)u_4^3 + 8au_4u_1^2 + (1-a)(1+3a)^2u_4u_2^2 + (1+a)(1-3a)^2u_4u_3^2 + 2(1-9a^2)u_1u_2u_3 = 0\,,$$

deren Ebenen die C_4 in vier *harmonischen* Punkten schneiden.

---

1) Ist: $ax_1^4 + 4bx_1^3x_2 + 6cx_1^2x_2^2 + 4dx_1x_2^3 + ex_2^4 = 0$ die Gleichung 4. Grades, so ist die cubische Invariante in der Form

$$i = \begin{vmatrix} a+2c+e & b+d & a-e \\ b+d & c & b-d \\ a-e & b-d & a-2c+e \end{vmatrix}$$

zu Grunde gelegt.

Digitized by Google

Aus der Gleichungsform dieser Fläche erkennt man leicht, dass dieselbe vier Doppelebenen besitzt, die sich aus:

$$8a u_1^2 = (1-a)(1+3a)^2 u_2^2 = (1+a)(1-3a)^2 u_3^2 = 8a(1-a^2) u_4^2;$$
$$(1-9a^2) u_1 u_2 u_3 = -8a(1-a^2) u_4^3$$

bestimmen; sie fallen also mit den vier *Wendeebenen* der C_4 zusammen. *Die Fläche Φ_3 ist deshalb eine Steiner'sche Fläche, deren dreifacher Punkt der Hauptpunkt und deren Doppelgeraden die Doppelsecanten der C_4 aus ihm sind.* Weitere Eigenschaften dieser Fläche finden sich später.

Fallen drei Wurzeln einer biquadratischen Gleichung zusammen, so verschwindet sowohl ihre quadratische, als auch ihre cubische Invariante; die Schmiegungsebenen der C_4 berühren also gleichzeitig die Flächen I_2 und Φ_3. *Die abwickelbare Fläche der C_4, die wir mit Γ_6 bezeichnen wollen, ist die gemeinsame Developpable der Flächen I_2 und Φ_3.*

Soll die Gleichung der Fläche Γ_6 in Ebenencoordinaten aufgestellt werden, so ist zu berücksichtigen, dass die Ebenenbüschel durch die Tangenten der C_4 dieser Gleichung Genüge leisten müssen, d. h. die gesuchte Gleichung ist nichts anderes als die Discriminante der Gleichung 4. Grades (8b.). Da sich aber die Discriminante durch die beiden Invarianten darstellen lässt, so wird die *Gleichung der abwickelbaren Fläche Γ_6 von C_4 in Ebenencoordinaten*:

$$I_2^3 + 27\Phi_3^2 = 0 \quad , \tag{25.}$$

wo unter I_2 und Φ_3 die linken Seiten von (23.) respective (24a.) zu verstehen sind. Aus dieser Gleichungsform können wir aber wichtige Schlüsse ziehen. Ein Ebenenbüschel durch eine beliebige Tangente von C_4 hat mit I_2 zwei consecutive Tangentialebenen, also mit I_2^3 deren sechs gemein; da dieser Büschel aber die Gleichung (25.) befriedigen muss, so muss er auch mit Φ_3^2 sechs, also mit Φ_3 drei consecutive Tangentialebenen gemein haben. Die Tangenten der C_4 sind also Haupttangenten der Φ_3, woraus dann weiter folgt, *dass die C_4 eine Haupttangentencurve der Steiner'schen Fläche Φ_3 ist.*

Wir haben soeben gesehen, wie sich die abwickelbare Fläche Γ_6 der STEINER'schen Fläche gegenüber verhält, und wollen noch die *Curve B_6 bestimmen, längs deren die Γ_6 die*

Digitized by Google

Fläche 2. Ordnung I_2 berührt. Es kommt das ersichtlich darauf hinaus, dass wir die Pole der Schmiegungsebenen von C_4 in Bezug auf die Fläche I_2 aufsuchen. Nach (21.) und (23.) erhalten die Punkte der B_6 also die Coordinaten:

$$(26.)\quad \begin{aligned} x_1 &= 4k_1k_2[k_1^4 + k_2^4 - 2ak_1^2k_2^2] ,\\ x_2 &= -(1+3a)(k_1^2 - k_2^2)[a(k_1^4 + k_2^4) + 2(1+2a)k_1^2k_2^2] ,\\ x_3 &= \quad (1-3a)(k_1^2 + k_2^2)[a(k_1^4 + k_2^4) + 2(1-2a)k_1^2k_2^2] ,\\ x_4 &= 4(1+3a^2)k_1k_2(k_1^4 - k_2^4) . \end{aligned}$$

Die Punkte und Ebenen der B_6 sind eindeutig auf die Ebenen und Punkte der C_4 bezogen, man kann deshalb leicht die Resultate von der C_4 auf die B_6 übertragen.

VI. Die Osculanten[1]) der Raumcurve 4. Ordnung und die Φ_3.

Ein Punkt der Raumcurve 4. Ordnung mit dem Parameter $k_1 : k_2$ hat die Coordinaten:

$$(27.)\quad \begin{aligned} x_1 &= k_1f_1 - k_2f_2 = k_1^4 - k_2^4 ,\\ x_2 &= -(k_1f_2 + k_2f_1) = -(1+3a)k_1k_2(k_1^2 + k_2^2) ,\\ x_3 &= -(k_1f_2 - k_2f_1) = (1-3a)k_1k_2(k_1^2 - k_2^2) ,\\ x_4 &= k_1f_1 + k_2f_2) = k_1^4 + 6ak_1^2k_2^2 + k_2^4 . \end{aligned}$$

Setzen wir zur Abkürzung: $k_1^2 + k_2^2 = \mathfrak{k}$, $k_1^2 - k_2^2 = \mathfrak{l}$, $k_1k_2 = \mathfrak{m}$, so dass: $\mathfrak{k}^2 - \mathfrak{l}^2 = 4\mathfrak{m}^2$ ist, so werden die Coordinaten:

$$x_1 = \mathfrak{k}\mathfrak{l},\quad x_2 = -(1+3a)\mathfrak{k}\mathfrak{m},\quad x_3 = (1-3a)\mathfrak{l}\mathfrak{m},$$
$$x_4 = \mathfrak{k}^2 - 2(1-3a)\mathfrak{m}^2 .$$

Es ergiebt sich hieraus sofort die Gleichung:

$$(28.)\quad (1-3a)^2x_1^2x_2^2 - (1+3a)^2x_1^2x_3^2 - 4x_2^2x_3^2 = 0 ;$$

sie stellt den *Kegel 4. Ordnung dar, der die C_4 aus dem Hauptpunkt projicirt.* Die Eigenschaften dieses Kegels erkennt man ohne Weiteres aus seiner Gleichung.

Alle Doppelsecanten der C_4, welche eine feste Doppelsecante schneiden, bilden bekanntlich eine Regelfläche 3. Ord-

1) Vergl. besonders die citirten Arbeiten von Study und Jolles.

Digitized by Google

nung, und zwar ist die feste Doppelsecante die Doppelgerade dieser Regelfläche. Es giebt nun drei Regelflächen 3. Ordnung von besonderer Bedeutung; ihre Doppelgeraden gehen durch den Hauptpunkt und die Erzeugenden jeder Fläche bleiben bei je einer der drei geschaart-involutorischen Transformationen, die die C_4 in sich überführen, ungeändert.

Die Gleichungen dieser drei Regelflächen 3. Ordnung kann man vermöge der obigen Coordinatenwerthe für die Punkte der C_4 sofort anschreiben, sie sind:

$$(29.)\quad \left|\begin{array}{l} (1+3a)x_1^2x_3 + 2x_2^2x_3 + (1-3a)x_1x_2x_4 = 0\ , \\ (1-3a)x_2^2x_4 + (1+3a)x_3^2x_4 + 2x_2x_3x_4 = 0\ , \\ (1-3a)x_1^2x_2 - 2x_3^2x_2 + (1+3a)x_1x_3x_4 = 0\ . \end{array}\right.$$

Endlich kann auch die Gleichung der *Steiner'schen Fläche* Φ_3, die nach den Resultaten des vorigen Paragraphen ebenfalls durch die C_4 hindurchgeht, leicht in Punktcoordinaten angegeben werden. Bedenkt man, dass der Hauptpunkt für die STEINER'sche Fläche dreifacher Punkt ist und dass die Doppelsecanten aus ihm für dieselbe Doppelgeraden sind, dass ferner die drei Raumtransformationen, die die C_4 in sich überführen, auch Gleiches mit der STEINER'schen Fläche thun, so erkennt man, dass die gesuchte Gleichung nur die Terme $x_1^2x_2^2$, $x_2^2x_3^2$, $x_3^2x_1^2$, $x_1x_2x_3x_4$ enthalten kann. Die Coefficienten dieser Terme folgen sofort aus der Bedingung, dass die Wendeebenen von C_4 die Doppelebenen [1]) von Φ_3 sind. So ergiebt sich als *Gleichung der Steiner'schen Fläche* Φ_3 *in Punktcoordinaten:*

$$(30.)\quad \begin{aligned} &8ax_2^2x_3^2 + (1-a)(1+3a)^2x_3^2x_1^2 \\ &+ (1+a)(1-3a)^2x_1^2x_2^2 + 2(1-9a^2)x_1x_2x_3x_4 = 0\ . \end{aligned}$$

Gehen wir nun zum Studium der Osculanten unserer Raumcurve 4. Ordnung über. Zieht man im Punkte $k_1 : k_2$ eine Tangente an die C_4, so hat ein beliebiger Punkt dieser Tangente die Coordinaten:

$$\left(\lambda_1\frac{\partial x_1}{\partial k_1} + \lambda_2\frac{\partial x_1}{\partial k_2}\right) : \left(\lambda_1\frac{\partial x_2}{\partial k_1} + \lambda_2\frac{\partial x_2}{\partial k_2}\right) : \left(\lambda_1\frac{\partial x_3}{\partial k_1} + \lambda_2\frac{\partial x_3}{\partial k_2}\right) : \left(\lambda_1\frac{\partial x_4}{\partial k_1} + \lambda_2\frac{\partial x_4}{\partial k_2}\right)$$

[1]) Ist die Gleichung der STEINER'schen Fläche:

$$a_1x_2^2x_3^2 + a_2x_3^2x_1^2 + a_3x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2x_3x_4 = 0\ ,$$

so sind die Coordinaten der Doppelebenen: $\sqrt{a_2}\sqrt{a_3} : \sqrt{a_3}\sqrt{a_1} : \sqrt{a_1}\sqrt{a_2} : -1$.

Digitized by Google

oder

$$(31.)\quad \left|\begin{array}{l} x_1 = 4\,(k_1^3\lambda_1 - k_2^3\lambda_2)\ , \\ x_2 = -\,(1+3a)\,[\lambda_1 k_2(3k_1^2 + k_2^2) + \lambda_2 k_1(3k_2^2 + k_1^2)]\ , \\ x_3 = (1-3a)\,[\lambda_1 k_2(3k_1^2 - k_2^2) - \lambda_2 k_1(3k_2^2 - k_1^2)]\ , \\ x_4 = 4\,[\lambda_1 k_1(k_1^2 + 3ak_2^2) + \lambda_2 k_2(k_2^2 + 3ak_1^2)]\ . \end{array}\right.$$

Ist in den Gleichungen (31.) $k_1 : k_2$ constant und $\lambda_1 : \lambda_2$ variabel, so stellen sie wie gesagt die Punkte einer Tangente der C_4 dar. Ist dagegen in den Gleichungen (31.) $\lambda_1 : \lambda_2$ constant und $k_1 : k_2$ variabel, so stellen sie die Punkte einer Raumcurve 3. Ordnung dar; dieselbe heisst die *erste Osculante der C_4 in Bezug auf den Punkt $\lambda_1 : \lambda_2$*. Auf jeder Tangente von C_4 liegt ein Punkt der Osculante; man kann deshalb sagen, dass die Strahlen der abwickelbaren Fläche Γ_6 zu den Punkten der Osculante *perspectiv* liegen. Es giebt einfach unendlich viele Osculanten der C_4, jede berührt die C_4 in einem Punkt und hat in ihm die gleiche Schmiegungsebene wie die C_4. Man kann nun zeigen, dass die Schmiegungsebenen aller ersten Osculanten die Fläche Φ_3 umhüllen, oder *dass jede Schmiegungsebene einer ersten Osculante der Raumcurve 4. Ordnung diese in vier harmonischen Punkten schneidet.*

Bestimmt man zunächst in einem Punkte $k_1 : k_2$ der Osculante $(\lambda_1 : \lambda_2)$ die Schmiegungsebene, so erhält man ihre Gleichung in der Form:

$$\left|\begin{array}{cccc} \frac{x_1}{4} & -\frac{x_2}{1+3a} & \frac{x_3}{1+3a} & \frac{x_4}{4} \\ k_1\lambda_1 & k_1\lambda_2 + k_2\lambda_1 & k_1\lambda_2 + k_2\lambda_1 & k_1\lambda_1 + ak_2\lambda_2 \\ 0 & k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 & k_1\lambda_1 - k_2\lambda_2 & a(k_1\lambda_2 + k_2\lambda_1) \\ -k_2\lambda_2 & k_1\lambda_2 + k_2\lambda_1 & -(k_1\lambda_2 + k_2\lambda_1) & ak_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 \end{array}\right| = 0\ ,$$

oder:

$$(32.)\quad \left|\begin{array}{cccc} \frac{x_1}{4} & -\frac{x_2}{1+3a} & \frac{x_3}{1-3a} & \frac{x_4}{4} \\ k_1\lambda_1 - k_2\lambda_2 & 2(k_1\lambda_2 + k_2\lambda_1) & 0 & (1+a)(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2) \\ 0 & k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 & k_1\lambda_1 - k_2\lambda_2 & a(k_1\lambda_2 + k_2\lambda_1) \\ k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 & 0 & 2(k_1\lambda_2 + k_2\lambda_1) & (1-a)(k_1\lambda_1 - k_2\lambda_2) \end{array}\right| = 0.$$

Digitized by Google

Hieraus erkennt man ohne Weiteres, dass die Schmiegungsebene im Punkte $\lambda_1 : \lambda_2$ der Osculante $(k_1 : k_2)$ identisch ist mit der Schmiegungsebene im Punkte $k_1 : k_2$ der Osculante $(\lambda_1 : \lambda_2)$.

Setzt man zur Abkürzung: $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 = p$, $k_1\lambda_1 - k_2\lambda_2 = q$, $k_1\lambda_2 + k_2\lambda_1 = r$, so ergeben sich für die Schmiegungsebenen der Oculanten die Coordinaten [1]):

$$4u_1 : (1+3a)u_2 : (1-3a)u_3 : 4u_4 = \begin{Vmatrix} q & -2r & 0 & (1+a)p \\ 0 & -p & q & ar \\ p & 0 & 2r & (1-a)q \end{Vmatrix} .$$

Es bestehen also die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 4u_1 q - 2(1+3a)u_2 r + 4(1+a)u_4 p &= 0 , \\ -(1+3a)u_2 p + (1-3a)u_3 q + 4au_4 r &= 0 , \\ 4u_1 p + 2(1-3a)u_3 r + 4(1-a)u_4 q &= 0 , \end{aligned}$$

die in p, q, r linear und homogen sind; folglich muss die Determinante ihrer Coefficienten verschwinden. Diese Determinante stimmt aber mit der früher gefundenen Determinante (24.) völlig überein; die Schmiegungsebenen der ersten Osculanten und die Ebenen, die die C_4 in harmonischen Punkten schneiden, umhüllen mithin die nämliche STEINER'sche Fläche Φ_3.

Wenden wir den gleichen Process, der zu den Coordinaten (31.) der *ersten* Osculante führte, wieder auf diese an, so entstehen die Coordinaten der *zweiten* Osculante $(\lambda_1 : \lambda_2)$:

$$(33.)\quad \begin{aligned} x_1 &= 2(k_1^2\lambda_1^2 - k_2^2\lambda_2^2) &&= 2pq , \\ x_2 &= -(1+3a)[(\lambda_1^2+\lambda_2^2)k_1k_2 + (k_1^2+k_2^2)\lambda_1\lambda_2] &&= -(1+3a)pr , \\ x_3 &= (1-3a)[(\lambda_1^2-\lambda_2^2)k_1k_2 + (k_1^2-k_2^2)\lambda_1\lambda_2] &&= (1-3a)qr , \\ x_4 &= 2[\lambda_1^2(k_1^2+ak_2^2) + \lambda_2^2(k_2^2+ak_1^2) + 4ak_1k_2\lambda_1\lambda_2] \\ &&&= 2ar^2 + (1+a)p^2 + (1-a)q^2 , \end{aligned}$$

wo wiederum die früheren Abkürzungen angewendet sind. Aus diesen Gleichungen kann man p, q, r eliminiren und kommt dann auf die Gleichung (30.) zurück. Man erkennt also, *dass einer der beiden Kegelschnitte, welche jede Schmiegungsebene der C_4 aus der Steiner'schen Fläche Φ_3 ausschneidet, die zweite Osculante der C_4 in Bezug auf den Berührungspunkt der Schmiegungsebene ist.*

[1]) Setzt man hierin $k_1 : k_2 = \lambda_1 : \lambda_2$, so gehen diese Coordinaten in diejenigen einer Schmiegungsebene der C_4 über.

Digitized by Google

VII. Vorbereitende Betrachtungen.

In Paragraph III hatten wir ein System von Raumcoordinaten aufgestellt, indem wir dabei von einer Parametervertheilung auf dem Hyperboloid H mit der Gleichung: $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$ ausgingen. Wir wollen jetzt ganz in der gleichen Weise das Hyperboloid:

$$\frac{x_1^2}{c_1^2} + \frac{x_2^2}{c_2^2} - \frac{x_3^2}{c_3^2} - \frac{x_4^2}{c_4^2} = 0$$

zu Grunde legen, auf demselben eine Parametervertheilung ausführen und darauf ein Coordinatensystem basiren; dabei soll das Hyperboloid wieder auf das Fundamentaltetraëder bezogen sein und die Coordinaten sollen ganz die frühere Bedeutung haben. Auf dem neuen Hyperboloid mögen wir die Parameter der Erzeugenden der einen Schaar mit $\varrho_1 : \varrho_2$, die der Erzeugenden der andern Schaar mit $\varrho_1' : \varrho_2'$ bezeichnen. Wir denken uns nun die lineare Transformation:

$$x_1 = c_1 x_1', \quad x_2 = c_2 x_2', \quad x_3 = c_3 x_3', \quad x_4 = c_4 x_4'$$

ausgeführt, dann geht das neue Hyperboloid über in das Hyperboloid H und zugleich gehen die Erzeugenden des ersteren in diejenigen des letzteren über. Wir denken uns ferner die Parametervertheilung auf dem neuen Hyperboloid so vorgenommen, dass jede Erzeugende desselben den gleichen Parameter aufweist, wie die entsprechende Erzeugende des Hyperboloides H. Dann müssen sich offenbar die Coordinaten $x_1' : x_2' : x_3' : x_4'$ respective $u_1' : u_2' : u_3' : u_4'$ ganz ebenso ausdrücken lassen, wie in Paragraph III die Coordinaten $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ respective $u_1 : u_2 : u_3 : u_4$. Führen wir jetzt die obige Transformation rückwärts aus, so gelangen wir zu der Beziehung zwischen dem ursprünglichen Coordinatensystem und der Parametervertheilung auf dem Hyperboloid:

$$\frac{x_1^2}{c_1^2} + \frac{x_2^2}{c_2^2} - \frac{x_3^2}{c_3^2} - \frac{x_4^2}{c_4^2} = 0 \quad . \tag{34.}$$

Diese Beziehungen sind in den folgenden Gleichungen niedergelegt. Für einen Punkt dieses Hyperboloides haben wir:

Digitized by Google

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 =$$

$$c_1(\varrho_1\varrho_2' + \varrho_2\varrho_1') : c_2(\varrho_1\varrho_1' - \varrho_2\varrho_2') : c_3(\varrho_1\varrho_1' + \varrho_2\varrho_2') : c_4(\varrho_1\varrho_2' - \varrho_2\varrho_2'),$$

und analog für eine Tangentialebene desselben:

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 =$$

$$\frac{1}{c_1}(\varrho_1\varrho_2' + \varrho_2\varrho_1') : \frac{1}{c_2}(\varrho_1\varrho_1' - \varrho_2\varrho_2') : -\frac{1}{c_3}(\varrho_1\varrho_1' + \varrho_2\varrho_2') : -\frac{1}{c_4}(\varrho_1\varrho_2' - \varrho_2\varrho_1').$$

Eine beliebige Ebene erhält die Coordinaten:

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = \frac{1}{c_1}(\alpha - \delta) : -\frac{1}{c_2}(\beta + \gamma) : \frac{1}{c_3}(\beta - \gamma) : \frac{1}{c_4}(\alpha + \delta),$$

wenn der Kegelschnitt, den dieselbe aus dem Hyperboloid (34.) ausschneidet, durch die Gleichung:

$$\frac{\varrho_1'}{\varrho_2'} = \frac{\alpha\varrho_1 + \beta\varrho_2}{\gamma\varrho_1 + \delta\varrho_2}$$

dargestellt ist.

Ganz analog besitzt ein beliebiger Punkt die Coordinaten:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = -c_1(\alpha - \delta) : c_2(\beta + \gamma) : c_3(\beta - \gamma) : c_4(\alpha + \delta).$$

Diese Resultate haben für die weiteren Betrachtungen eine einfache Bedeutung. Ist ein Hyperboloid von der Form (34.) gegeben, so bestimmen wir auf ihm zunächst eine Parameterverteilung, welche derjenigen auf H entspricht; d. h. die Erzeugenden des Hyperboloids (34.) müssen durch die erwähnte lineare Transformation in solche mit gleichen Parameter auf H übergeführt werden. Definiren wir nun auf dem neuen Hyperboloid eine Raumcurve 4. Ordnung (oder eine abwickelbare Fläche 4. Classe) durch die Gleichung:

$$\varrho_1'(\varrho_1^3 + 3b\varrho_1\varrho_2^2) + \varrho_2'(\varrho_2^3 + 3b\varrho_2\varrho_1^2) = 0,$$

so können wir nach Obigen sofort die Coordinaten ihrer Punkte, ihrer Schmiegungsebenen etc. (oder ihrer Ebenen, der Punkte ihrer Rückkehrcurve etc.) angeben. Sind wir umgekehrt in der Lage, die Coordinaten der Punkte der Raumcurve 4. Ordnung (oder der Ebenen der abwickelbaren Fläche 4. Classe) aufzu-

Digitized by Google

stellen, so können wir nach Obigem die Gleichung des zugehörigen Hyperboloides erschliessen. Ist speciell in der voranstehenden Gleichung die Constante b gleich der Constanten a der Curve C_4, so führt die Transformation $x_i = c_i x_i'$ nicht nur das neue Hyperboloid in H, sondern auch die neue Curve 4. Ordnung in die C_4 über.

VIII. Die Doppelcurve D_6 der abwickelbaren Fläche Γ_6; die zwei-zweideutige Transformation zwischen den Curven C_4 und D_6; die lineare Transformation zwischen C_4 und D_6.

Die abwickelbare Fläche Γ_6 der rationalen Raumcurve 4. Ordnung besitzt eine Doppelcurve der 6. Ordnung, die wir D_6 nennen; ihre Punkte sind mit denjenigen der C_4 durch eine zwei-zweideutige Beziehung verknüpft. Jede Tangente $k_1 : k_2$ der C_4 wird nämlich von zwei weiteren getroffen, deren Parameter $\lambda_1 : \lambda_2$ sich aus der Gleichung (14.) ergeben; so entsprechen jedem Punkte der C_4 zwei Punkte der D_6, die auf der Tangente jenes Punktes liegen. Durch jeden Punkt der D_6 gehen zwei Erzeugenden der Γ_6, oder Tangenten der C_4; es entsprechen also einem Punkte von D_6 auf der Curve C_4 die beiden Berührungspunkte der Erzeugenden, die sich in jenem Punkte schneiden.

Wählen wir eine der vier Tangenten E_i unserer C_4, welche auf dem Hyperboloid H liegen und also die C_4 noch in einem Punkte p_i schneiden, so fallen ihre beiden Schnittpunkte mit der D_6 zusammen und zwar in den Punkt p_i. Dieser Punkt bildet deshalb einen Rückkehrpunkt der Doppelcurve D_6 (der Mantel der abwickelbaren Fläche Γ_6 durchschneidet in p_i ihre Rückkehrcurve und bildet so eine Spitze der D_6). *Die Doppelcurve D_6 besitzt vier Spitzen*[1]*, welche in die Punkte $p_1\, p_2\, p_3\, p_4$ der C_4 fallen.* Die Schmiegungsebenen in diesen Spitzen der D_6 sind zugleich Schmiegungsebenen der C_4 in den Berührungspunkten b_i der tangirenden Trisecanten E_i.

In einer beliebigen Doppeltangentialebene der C_4 entsprechen dem Schnittpunkt der beiden Tangenten als Punkt der D_6 die beiden Berührungspunkte auf der C_4. Geht die Doppeltangentialebene in eine Wendeebene der C_4 über, so rücken der

1) Man vergleiche über alle diese Dinge Cremona a. a. O. pg. 92 ff.

Digitized by Google

zugehörige Punkt der D_6 und mit ihm die beiden Berührungspunkte in den Wendepunkt der C_4 (Berührungspunkt der Wendeebene) hinein. *Die Curven C_4 und D_6 schneiden sich in den Wendepunkten w_1, w_2, w_3, w_4 der C_4*; einem Wendepunkt, betrachtet als Punkt der D_6, entspricht auf der C_4 wiederum der Wendepunkt und zwar doppelt gezählt. In einer Wendeebene liegen drei consecutive Tangenten der C_4, und da jede die D_6 — abgesehen vom Wendepunkt — noch in einem Punkte schneidet, so osculirt[1]) jede Wendeebene die D_6 in einem Punkte, der auf der Tangente im Wendepunkt liegt. Ausserdem berührt jede Wendeebene die D_6 in dem Wendepunkt und schneidet sie noch in einem weiteren Punkte; es ist dies der Doppelpunkt der Curve 3. Ordnung, die von der Wendeebene aus Γ_6 ausgeschnitten wird.

Die Doppelcurve D_6 liegt auf einer Fläche 2. Grades Σ; denn man kann sofort eine solche Fläche angeben, die mit D_6 mehr als 12 Punkte gemein hat. Die D_6 muss den Schnitt von Σ mit einer Fläche 3. Ordnung bilden; denn es giebt keine Geraden, welche die Γ_6 in mehr als sechs Punkten schneiden und also keine Geraden, die die D_6 in mehr als drei Punkten treffen. Wir werden das Nähere hierüber weiter unten erfahren; jedenfalls können wir aber schliessen, *dass die Doppelcurve D_6 rational ist*, als Schnitt einer Fläche 2. Ordnung und einer Fläche 3. Ordnung, der ausserdem vier Spitzen aufweist.

Die Plücker'schen Formeln belehren uns dann des Weiteren, dass die abwickelbare Fläche der D_6, wir wollen sie K_6 nennen, von der 4. Classe ist, und da K_6 rational, so ist sie von der gleichen Beschaffenheit wie die Reciprokalfläche der gegebenen Raumcurve C_4. Hieraus ist zu schliessen, dass die Schmiegungsebenen der D_6 eine Fläche 2. Grades berühren, und dass durch die Erzeugenden der einen Schaar je drei, durch die der anderen Schaar je eine Schmiegungsebene passirt. Die linearen Transformationen, die die C_4 in sich überführen, lassen auch die D_6 ungeändert; das Fundamentaltetraëder der C_4 ist deshalb zugleich das Fundamentaltetraëder der Fläche K_6. Es ergiebt sich so auf der Fläche 2. Grades, die die Schmiegungsebenen von D_6

1) Hier ist ein Versehen bei Cremona, der angiebt, dass die Wendeebene die D_6 im Wendepunkt osculirt. Ein ähnliches Versehen macht er bei den Schmiegungsebenen in den Spitzen der D_6.

Digitized by Google

berühren, eine Parametervertheilung, welche derjenigen auf H entspricht (siehe § VII), und die Parameter dieser Schmiegungsebenen genügen einer Gleichung:

$$\varrho_1'(\varrho_1^3 + 3b\varrho_1\varrho_2^2) + \varrho_2'(\varrho_2^3 + 3b\varrho_2\varrho_1^2) = 0 \ .$$

Wir haben es wie gesagt im vorliegenden Falle mit zwei rationalen Gebieten C_4 und D_6 zu thun, die auf einander zwei-zweideutig bezogen sind; zugleich kennen wir für beide Gebiete diejenigen Punkte, deren entsprechende im anderen Gebiete coincidiren. Ueber solche zwei-zweideutigen Beziehungen sind uns aber die beiden Sätze bekannt. Das Doppelverhältnis der vier *singulären* Punkte (Punkte, deren entsprechende coincidiren) ist für beide Gebiete gleich. Jede zwei-zweideutige Beziehung kann in vierfacher Weise auf die Form [1]:

$$(35.)\ a_{11}k_1^2\varrho_1^2 + a_{11}k_2^2\varrho_2^2 + a_{22}k_1^2\varrho_2^2 + a_{22}k_2^2\varrho_1^2 + 2a_{13}k_1k_2\varrho_1\varrho_2 = 0$$

gebracht werden. Die singulären Punkte haben dann in beiden Gebieten die gleichen Parameter; aus dem Parameter *eines* singulären Punktes folgen die der übrigen, wenn man den reciproken, den negativen und den negativ-reciproken Werth desselben bildet.

Die Parametervertheilung $k_1 : k_2$ auf der C_4 hat bereits die hier erwähnten Eigenschaften, ihre singulären Punkte liegen in $b_1\,b_2\,b_3\,b_4$ und ihre Doppelpunkte [2] in $w_1\,w_2\,w_3\,w_4$. Auf der Curve D_6 ist nun die Vertheilung eines Parameters $\varrho_1 : \varrho_2$ so vorzunehmen, dass ihre singulären Punkte $w_1\ w_2\ w_3\ w_4$ die gleichen Parameter erhalten wie die singulären Punkte $b_1\ b_2\ b_3\ b_4$ auf C_4. Hiermit ist aber die Parametervertheilung auf D_6 völlig fixirt, und es erhalten dadurch die Doppelpunkte $p_1\ p_2\ p_3\ p_4$ auf D_6 von selbst die gleichen Parameter wie die Doppelpunkte $w_1\ w_2\ w_3\ w_4$ auf C_4.

Um nun den analytischen Ausdruck der zwei-zweideutigen Verwandtschaft zu gewinnen, erinnern wir uns, dass auf C_4 die Parameter der Punkte $w_1\ w_2\ w_3\ w_4$ der Gleichung:

1) Vergl. meine Abhandlung »Ueber Regelflächen 4. Ordnung« Math. Annal, Bd. 28. § 1.

2) Doppelpunkt bedeutet hier und in der Folge nicht einen Doppelpunkt der Curve, sondern einen Doppelpunkt der Verwandtschaft, d. h. einen Punkt, der einem singulären Punkte des anderen Gebietes entspricht.

Digitized by Google

$$k_1^4 + k_2^4 - \frac{2}{a} k_1^2 k_2^2 = 0 \,, \tag{12.}$$

und dass die Parameter der Punkte $b_1\, b_2\, b_3\, b_4$ auf C_4 der Gleichung

$$k_1^4 + k_2^4 + \frac{1 - 3a^2}{a} k_1^2 k_2^2 = 0 \tag{6.}$$

genügen.

Die Wurzeln der Gleichung (12.) sind reell, wenn $0 < a < 1$ ist; die Wurzeln der Gleichung (6.) sind reell, wenn $-\frac{1}{3} < a < 0$, oder wenn $1 < a < \infty$ ist. Ist demnach $+\infty > a > 1$, so besitzt die C_4 vier reelle berührende Trisecanten, dagegen keine reellen Wendeebenen; ist $1 > a > 0$, so giebt es vier reelle Wendeebenen, dagegen keine reellen Trisecanten, die tangiren; ist $0 > a > -\frac{1}{3}$, so sind wieder die vier tangirenden Trisecanten reell, aber die Wendeebenen imaginär; ist endlich $-\frac{1}{3} > a > -\infty$, so sind gleichzeitig Wendeebenen und berührende Trisecanten imaginär. *Die rationale Raumcurve vierter Ordnung kann nicht gleichzeitig vier reelle Wendeebenen und vier reelle tangirende Trisecanten besitzen.* Oder mit anderen Worten: *Existiren bei der rationalen Raumcurve vierter Ordnung vier reelle Wendeebenen, so kann die Doppelcurve ihrer Developpabeln keine reellen Spitzen aufweisen*, und umgekehrt: *wenn die Spitzen der Doppelcurve reell sind, so sind die Wendeebenen der C_4 imaginär.*

Da hiernach die singulären Punkte auf D_6 imaginär sind, wenn diejenigen auf C_4 reell sind, und da den singulären Punkten auf beiden Curven gleiche Parameter zugehören, so geht daraus hervor, dass die reellen Punkte von D_6 imaginäre Parameter und die imaginären Punkte reelle Parameter erhalten. Ist einmal die durch (35.) vermittelte Parameterdarstellung von D_6 gefunden, so braucht man nur nachträglich noch eine einfache lineare Transformation des Parameters vorzunehmen, damit die reellen Punkte von D_6 auch reelle Parameter aufweisen. Auch die Coefficienten der Relation (35.) können, wie leicht einzusehen, nicht reell sein; sie sollen nun bestimmt werden.

Die singulären Punkte b_i auf C_4 folgen aus der Gleichung:

$$k_1^4 + k_2^4 + \frac{a_{11}^2 + a_{22}^2 - a_{13}^2}{a_{11}\, a_{22}} k_1^2 k_2^2 = 0 \,, \tag{36.}$$

da alsdann (35.) eine Doppelwurzel besitzt. Für diese Doppel-

Digitized by Google

wurzel $\varrho_1 : \varrho_2$, welche den Parameter des Doppelpunktes p_i auf D_6 bildet, gilt die Gleichung:

$$\varrho_1^2 : \varrho_2^2 = (a_{22} k_1^2 + a_{11} k_2^2) : (a_{11} k_1^2 + a_{22} k_2^2) .$$

Hieraus folgt: $k_1^2 : k_2^2 = (a_{11}\varrho_2^2 - a_{22}\varrho_1^2) : (a_{11}\varrho_1^2 - a_{22}\varrho_2^2)$ und dieser Werth in (36.) eingesetzt liefert die vier Doppelpunkte, welche jenen singulären Punkten entsprechen. So bestimmen sich die vier Doppelpunkte p_i auf D_6 aus der Gleichung:

$$(37.)\quad \varrho_1^4 + \varrho_2^4 + \varrho_1^2\varrho_2^2 \frac{(a_{11}^2 - a_{22}^2)^2 - a_{13}^2(a_{11}^2 + a_{22}^2)}{a_{11} a_{22} a_{13}^2} = 0 .$$

Vergleichen wir die Gleichung (36.) mit (6.) und die Gleichung (37.) mit (12.), nachdem wir hierin $k_1 : k_2$ durch $\varrho_1 : \varrho_2$ ersetzt haben, so finden wir als Werthe der Constanten:

$$a_{11} = \sqrt{1 + 3a} + \sqrt{1 - 3a} ,$$
$$a_{22} = \sqrt{1 + 3a} - \sqrt{1 - 3a} ,$$
$$a_{13} = i\sqrt{2(1 - 9a^2)} ,$$

und als *Gleichung der zwei-zweideutigen Beziehung zwischen C_4 und D_6*:

$$(38.)\quad (k_1^2\varrho_1^2 + k_2^2\varrho_2^2)(\sqrt{1 + 3a} + \sqrt{1 - 3a}) +$$
$$+ (k_1^2\varrho_2^2 + k_2^2\varrho_1^2)(\sqrt{1+3a} - \sqrt{1-3a}) + 2i\sqrt{2(1-9a^2)}\, k_1 k_2 \varrho_1 \varrho_2 = 0 .$$

Diese Beziehung ist noch vierfacher Art, indem die Wurzelzeichen noch beliebig gewählt werden können.

Nachdem nun einmal durch diese zwei-zweideutige Verwandtschaft auf der Doppelcurve D_6 die Parametervertheilung gewonnen und somit auch eine ein-eindeutige Beziehung zwischen den Curven D_6 und C_4 hergestellt ist, können wir dazu übergehen, die Coordinaten der Punkte und Schmiegungsebenen von D_6 als Functionen ihrer Parameter darzustellen. Die Analogie der Ausdrücke, die wir hier erhalten, mit den entsprechenden bei der Curve C_4, lässt uns im Hinblick auf den Inhalt des vorigen Paragraphen zu einer Reihe von Resultaten für die Curve D_6 gelangen.

Digitized by Google

Die Punkte auf der C_4 ordnen sich derartig in Quadrupel an, dass diese bei den linearen Transformationen der C_4 in sich ungeändert bleiben und nur ihre Punkte sich vertauschen. Die Parameter der Punkte eines solchen Quadrupels genügen der Gleichung:

$$k_1^4 + k_2^4 - 2pk_1^2k_2^2 = 0 \ , \tag{39.}$$

wo p eine beliebige Constante bedeutet. Daraus folgt:

$$k_1^4 + k_2^4 = 2pk_1^2k_2^2 \ , \quad k_1^2 \pm k_2^2 = k_1k_2\sqrt{2p \pm 2} \ ,$$

so dass die Coordinaten der Punkte des Quadrupels mit Berücksichtigung der Gleichungen (27.) die Werthe erhalten:

$$\left|\begin{array}{l} x_1 = \sqrt{2p+2}\,\sqrt{2p-2} \ , \\ x_2 = -(1+3a)\sqrt{2p+2} \ , \\ x_3 = (1-3a)\sqrt{2p-2} \ , \\ x_4 = 2p+6a \ . \end{array}\right. \tag{40.}$$

Ebenso erhält man für die Coordinaten der Schmiegungsebenen in den Punkten des Quadrupels mit Rücksicht auf (21.):

$$\left|\begin{array}{l} u_1 = -(1-9a^2)(p-a) \ , \\ u_2 = (1-3a)(ap+1+2a)\sqrt{2p-2} \ , \\ u_3 = (1+3a)(ap+1-2a)\sqrt{2p+2} \ , \\ u_4 = (1-9a^2)\,\tfrac{1}{2}\sqrt{2p+2}\,\sqrt{2p-2} \ . \end{array}\right. \tag{41.}$$

Sowohl in (40.) wie in (41.) unterscheiden sich die einzelnen Punkte des Quadrupels durch die Vorzeichen ihrer Wurzelgrössen; für den nämlichen Punkt gelten in allen Gleichungen die gleichen Wurzelzeichen.

Für die Wendepunkte der C_4 haben wir in (39.) die Constante $p = \frac{1}{a}$ zu setzen, so dass die Wendepunkte $w_1\ w_2\ w_3\ w_4$ und die bez. Wendeebenen die Coordinaten bekommen:

Digitized by

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 2\sqrt{1+a}\,\sqrt{1-a}\,,\\
x_2 &= -(1+3a)\sqrt{2a}\,\sqrt{1+a}\,,\\
x_3 &= (1-3a)\sqrt{2a}\,\sqrt{1-a}\,,\\
x_4 &= 2(1+3a^2)\,;
\end{aligned}
\tag{42 a.}
$$

$$
\begin{aligned}
u_1 &= -(1-9a^2)\sqrt{1+a}\,\sqrt{1-a}\,,\\
u_2 &= (1-3a)\,2\sqrt{2a}\,\sqrt{1+a}\,,\\
u_3 &= (1+3a)\,2\sqrt{2a}\,\sqrt{1-a}\,,\\
u_4 &= (1-9a^2)\,.
\end{aligned}
\tag{42 b.}\ ^{1})
$$

Setzen wir in (39.) die Constante $p = \dfrac{27a^4 - 18a^2 - 1}{8a}$, so erhalten wir die Coordinaten der Punkte $p_1\ p_2\ p_3\ p_4$:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt{1-9a^2}\,\sqrt{1+a}\,\sqrt{1-a}\,,\\
x_2 &= -2i\sqrt{a}\,\sqrt{1-3a}\,\sqrt{1+a}\,,\\
x_3 &= 2i\sqrt{a}\,\sqrt{1+3a}\,\sqrt{1-a}\,,\\
x_4 &= 1+3a^2\,.
\end{aligned}
\tag{43.}
$$

Die Schmiegungsebenen in den Punkten $b_1\ b_2\ b_3\ b_4$ ergeben sich für $p = \dfrac{3a^2 - 1}{2a}$, also werden ihre Coordinaten:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \sqrt{1+a}\,\sqrt{1-a}\,,\\
u_2 &= i\sqrt{1+a}\,\sqrt{a}\,\sqrt{1+3a}\,,\\
u_3 &= i\sqrt{1-a}\,\sqrt{a}\,\sqrt{1-3a}\,,\\
u_4 &= -\sqrt{1-9a^2}\,.
\end{aligned}
\tag{44.}
$$

Nimmt man hierbei in (44.) die gleichen Wurzelvorzeichen wie in (43.), so beziehen sich die Coordinatenwerthe auf zwei Punkte p_i und b_i, die auf der nämlichen Erzeugenden von H liegen.

Stellen wir jetzt die entsprechenden Fragen bei der Doppelcurve D_6. Von den Schmiegungsebenen der D_6 wissen

---

1) Diese Werthe sind schon in (21 a.) gefunden.

Digitized by Google

wir, dass sie eine Fläche vierter Klasse K_6 umhüllen und dass sie eine Fläche zweiten Grades — sagen wir T — berühren. Die Fläche T sei durch die Gleichung (34.) dargestellt und es soll die Parametervertheilung auf T derjenigen auf H (siehe § VII) entsprechen; dann genügen die Parameter der Schmiegungsebenen von D_6 der Gleichung:

$$(45.) \qquad \varrho_1' (\varrho_1^3 + 3a\varrho_1\varrho_2^2) + \varrho_2' (\varrho_2^3 + 3a\varrho_2\varrho_1^2) = 0 \ ,$$

wo a den gleichen Werth hat wie in (4.). Es stimmt nämlich dann die hier bewirkte Parametervertheilung auf D_6 mit der durch die zwei-zweideutige Beziehung gegebenen überein. Das ist aber in der That nöthig; denn sonst würde das Doppelverhältniss der Parameter der vier Spitzen von D_6 in beiden Fällen verschieden sein, während es doch bei jeder Parametervertheilung stets den gleichen Werth behalten muss.

Die singulären Punkte $w_1\ w_2\ w_3\ w_4$ auf D_6 sind nun auf zweierlei Weise definirt; einmal fallen sie mit den Wendepunkten von C_4 zusammen, zum andern entsprechen sie den singulären Punkten b_i auf C_4. Ihre Coordinaten sind deshalb einerseits durch die Gleichungen (42 a.) gegeben, andererseits müssen sie den Ebenencoordinaten in (44.) entsprechend gebildet sein. Denn die Schmiegungsebenen von D_6 sind ganz ebenso definirt auf T, wie die Punkte von C_4 auf H, und in Folge dessen gilt Gleiches auch für die Punkte von D_6 und die Schmiegungsebenen von C_4. Wir erhalten also für die Punkte w_i die Doppelbestimmung:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2\sqrt{1+a}\sqrt{1-a} = c_1\sqrt{1+a}\sqrt{1-a} \ , \\
x_2 &= -(1+3a)\sqrt{2a}\sqrt{1+a} = c_2 i\sqrt{1+a}\sqrt{a}\sqrt{1+3a} \ , \\
x_3 &= (1-3a)\sqrt{2a}\sqrt{1-a} = -c_3 i\sqrt{1-a}\sqrt{a}\sqrt{1-3a} \ , \\
x_4 &= 2(1+3a^2) \qquad\qquad = +c_4\sqrt{1-9a^2} \ .
\end{aligned}$$

Hieraus bestimmen sich die Constanten:

$$c_1 = 1 \ , \quad c_2 = i\sqrt{\frac{1+3a}{2}} \ , \quad c_3 = i\sqrt{\frac{1-3a}{2}} \ , \quad c_4 = \frac{1+3a^2}{\sqrt{1-9a^2}} \ .$$

Zu den nämlichen Constanten c_i müssen wir gelangen, wenn wir die doppelte Darstellung der Punkte p_i benutzen; ihre Coor-

Digitized by Google

dinaten sind einmal durch (43.) gegeben, zum andern analog zu (42 b.) gebildet; also:

$$x_1 = \sqrt{1-9a^2}\sqrt{1+a}\sqrt{1-a} = -c_1(1-9a^2)\sqrt{1+a}\sqrt{1-a} ,$$

$$x_2 = -2i\sqrt{a}\sqrt{1-3a}\sqrt{1+a} = c_2\,2(1-3a)\sqrt{2a}\sqrt{1+a} ,$$

$$x_3 = 2i\sqrt{a}\sqrt{1+3a}\sqrt{1-a} = -c_3\,2(1+3a)\sqrt{2a}\sqrt{1-a} ,$$

$$x_4 = 1+3a^2 \qquad\qquad = -c_4(1-9a^2) .$$

Diese Gleichungen liefern ersichtlich die gleichen Werthe für die c_i.

Auch die Schmiegungsebenen in den Spitzen der Doppelcurve D_6 haben eine doppelte Darstellung nach (44.) und entsprechend (42 a.) und führen zu den nämlichen Werthen der c_i.

Es lassen sich nun unmittelbar die folgenden Resultate erschliessen.

Wendet man auf die Punkte und Schmiegungsebenen der rationalen Raumcurve C_4 die reciproke Raumtransformation

$$(46.) \qquad x_1' = u_1 , \quad x_2' = i\sqrt{\frac{1+3a}{2}}\,u_2 ,$$

$$x_3' = i\sqrt{\frac{1-3a}{2}}\,u_3 , \quad x_4' = \frac{1+3a^2}{\sqrt{1+3a}\sqrt{1-3a}}\,u_4$$

an, so gehen dieselben in die Schmiegungsebenen und Punkte der Doppelcurve D_6 ihrer Developpabeln über. Diese Transformation führt zugleich auch die Ebenen und Punkte von D_6 in die Punkte und Schmiegungsebenen von C_4 über. Die Gleichungen (46.) bestimmen vier verschiedene reciproke Transformationen, indem man die Vorzeichen der Wurzeln noch beliebig wählen kann; die Transformationen sind imaginär. Mit Berücksichtigung der Gleichungen (21.) und (27.) kann man die Coordinaten der Punkte und Schmiegungsebenen von D_6 direct anschreiben. So werden z. B. *die Coordinaten der Punkte von D_6:*

$$(47.) \qquad \begin{aligned} x_1' &= -\sqrt{1+3a}\sqrt{1-3a}\,\varrho_1\varrho_2[\varrho_1^4+\varrho_2^4-2a\varrho_1^2\varrho_2^2] ,\\ x_2' &= i\sqrt{\frac{1-3a}{2}}\,(\varrho_1^2-\varrho_2^2)[a(\varrho_1^4+\varrho_2^4)+2(1+2a)\varrho_1^2\varrho_2^2] ,\\ x_3' &= i\sqrt{\frac{1+3a}{2}}\,(\varrho_1^2+\varrho_2^2)[a(\varrho_1^4+\varrho_2^4)+2(1-2a)\varrho_1^2\varrho_2^2] ,\\ x_4' &= (1+3a^2)\,\varrho_1\varrho_2(\varrho_1^4-\varrho_2^4) . \end{aligned}$$

Digitized by Google

Die Schmiegungsebenen der Doppelcurve D_6 berühren die Fläche 2. Grades T:

$$(48.) \qquad x_1^2 - \frac{2x_2^2}{1+3a} + \frac{2x_3^2}{1-3a} - \frac{(1-9a^2)x_4^2}{(1+3a^2)^2} = 0 \ ,$$

und zwar berühren sie dieselbe längs einer rationalen Raumcurve 4. Ordnung K_4.

Wendet man die reciproke Transformation auf die Fläche I_2 an, so gewinnt man die Fläche Σ. *Die Doppelcurve D_6 liegt auf der Fläche 2. Grades Σ:*

$$(49.) \qquad x_1^2 - \frac{1+3a}{2} x_2^2 + \frac{1-3a}{2} x_3^2 - \frac{1-9a^2}{1+3a^2} x_4^2 = 0 \ .$$

Aus (34a.) ergiebt sich durch die obige Substitution auch die Fläche 3. Ordnung, welche die Curve D_6 aus der Fläche 2. Grades Σ ausschneidet.

Wir wollen hier noch einen Begriff einführen, der es uns ermöglicht, unsere Resultate in bequemer Form auszusprechen. Jede rationale Raumcurve 4. Ordnung liegt auf einem Hyperboloid und bestimmt zwei abwickelbare Flächen; die eine wird von ihren Tangenten gebildet, die andere von den Ebenen umhüllt, welche das Hyperboloid in ihren Punkten berühren. Die erstere heisst kurz die Developpable der Raumcurve, die letztere soll die *zur Raumcurve conjugirte Developpable heissen*, da ihre Erzeugenden zu den Tangenten der Raumcurve in Bezug auf das Hyperboloid conjugirt sind. Wir haben nun den Satz: *Jeder rationalen Raumcurve 4. Ordnung entspricht eine zweite in der Art, dass die abwickelbare Fläche der ersten eine Doppelcurve besitzt, welche zugleich Rückkehrcurve für die der andern conjugirte Developpable ist. Es giebt vier lineare Transformationen, welche die eine Raumcurve 4. Ordnung mit den beiden zugehörigen Developpabeln in die andere und ihre Developpabeln überführen.* So geht die Curve K_4 aus der Curve C_4 hervor durch die Transformationen:

$$x_1' = x_1 \ , \quad x_2' = i\sqrt{\frac{1+3a}{2}}\, x_2 \ ,$$

$$x_3' = i\sqrt{\frac{1-3a}{2}}\, x_3 \ , \quad x_4' = \frac{1+3a^2}{\sqrt{1+3a}\sqrt{1-3a}}\, x_4 \ .$$

Digitized by Google

Die abwickelbare Fläche der Curve D_6 — wir nannten sie K_6 — besitzt eine Doppelcurve, welche rational und von der 4. Ordnung ist. Wir werden im nächsten Paragraphen Gelegenheit finden diese Doppelcurve darzustellen, indem wir dort die zu ihr reciproke Fläche behandeln.

Die abwickelbare Fläche Γ_6 ist zugleich Doppeldeveloppable der Curve D_6, d. h. sie wird umhüllt von den Ebenen, welche D_6 zwei Mal berühren.

Ueber die Realitätsverhältnisse wird in einem späteren Paragraphen ausführlich gehandelt.

IX. Die Developpable Π_6 der Doppeltangentialebenen von C_4 und ihre Rückkehrcurve R_6; die zwei-zweideutige Verwandtschaft zwischen C_4 und der Fläche Π_6; die lineare Transformation von C_4 in Π_6; die lineare Transformation von R_6 in D_6.

Die zwei-zweideutige Beziehung zwischen den Punkten von C_4 und den Ebenen von Π_6, d. h. den Doppeltangentialebenen von C_4 ist folgender Art. In jedem Punkte von C_4 gibt es zwei Tangentialebenen, welche die C_4 noch in einem zweiten Punkte berühren, also entsprechen jedem Punkt von C_4 die beiden Doppeltangentialebenen, die durch ihn hindurchgehen. Jeder Doppeltangentialebene entsprechen die beiden Punkte, in denen sie die Curve C_4 berührt.

Die Punkte $b_1\ b_2\ b_3\ b_4$ sind die singulären Punkte der Verwandtschaft auf C_4, denen auf Π_6 Doppelebenen entsprechen, es sind das die Ebenen, die in $p_1\ p_2 p_3\ p_4$ das Hyperboloid H berühren. Die Wendeebenen von C_4 bilden die singulären Elemente auf Π_6, denen auf C_4 die Doppelpunkte $w_1\ w_2\ w_3\ w_4$ entsprechen. Legen wir der Verwandtschaft wieder die Gleichungsform (35.)

$$a_{11} k_1^2 \sigma_1^2 + a_{11} k_2^2 \sigma_2^2 + a_{22} k_1^2 \sigma_2^2 + a_{22} k_2^2 \sigma_1^2 + 2 a_{13} k_1 k_2 \sigma_1 \sigma_2 = 0$$

zu Grunde, dann gelten für die singulären Elemente $b_1\ b_2\ b_3\ b_4$ auf C_4 wieder die Gleichungen (36.) und (6.) und für die Doppelelemente $w_1\ w_2\ w_3\ w_4$ die Gleichungen (37.) und (12.). *Es ist also die zwei-zweideutige Verwandtschaft zwischen C_4 und Π_6 genau durch dieselbe Gleichung* (38.) *dargestellt, wie die zwischen*

Digitized by Google

C_4 *und* D_6. Hiermit ist für Π_6 resp. R_6 eine Parametervertheilung gegeben, und es sind dadurch offenbar die Curven R_6 und D_6 ein-eindeutig auf einander bezogen, wie das weiter unten noch genauer dargelegt wird. Auch was über die Realitätsverhältnisse von D_6 im vorigen Paragraphen gesagt wurde, gilt ganz ebenso für die Fläche Π_6 und ihre Rückkehrcurve R_6; das Weitere hierüber findet sich später.

Um die Coordinaten der Schmiegungsebenen und der Punkte von R_6 zu erhalten, verfahren wir genau wie in § VIII. Die Developpable Π_6 ist von der vierten Klasse, ihre Ebenen berühren eine Fläche zweiten Grades M längs einer rationalen Raumcurve vierter Ordnung P_4. Auf dieser Fläche zweiten Grades M wird nach § VII eine Parametervertheilung vorgenommen, die derjenigen auf H entspricht, so dass die Parameter der Punkte und Schmiegungsebenen von R_6 sich durch die Gleichung

$$\sigma_1'(\sigma_1^3 + 3a\sigma_1\sigma_2^2) + \sigma_2'(\sigma_2^3 + 3a\sigma_2\sigma_1^2) = 0$$

bestimmen, wo a wieder die nämliche Constante wie in (4.) bedeutet. Diese Parametervertheilung auf R_6 resp. Π_6 muss nämlich wieder übereinstimmen mit derjenigen, die sich aus der zwei-zweideutigen Verwandtschaft ergiebt. Dort erhalten aber die Doppelebenen auf Π_6 die gleichen Parameter, wie die Wendepunkte auf C_4, sie bestimmen sich also aus (12.); hier ergiebt sich für die Schmiegungsebenen in den Spitzen von R_6 ebenfalls die Gleichung (12.), wie das auch sein muss, da jene Doppelebenen nichts anderes als diese Schmiegungsebenen sind.

Demgemäss erhalten wir für die singulären und die Doppelebenen von Π_6 wieder eine zweifache Bestimmung. Die Doppelebenen sind einerseits die Tangentialebenen von H in den Punkten p_i, andrerseits entsprechen sie den Punkten w_i auf C_4; wir erhalten deshalb für ihre Coordinaten, wenn wir die Gleichung der Fläche M wieder in der Form (35.) voraussetzen, die doppelten Werthe:

$$u_1 = \sqrt{1-9a^2}\,\sqrt{1+a}\,\sqrt{1-a} = 2\sqrt{1+a}\,\sqrt{1-a}\cdot\frac{1}{c_1},$$

$$u_2 = -2i\sqrt{a}\,\sqrt{1-3a}\,\sqrt{1+a} = -(1+3a)\sqrt{2a}\,\sqrt{1+a}\cdot\frac{1}{c_2},$$

$$u_3 = -2i\sqrt{a}\,\sqrt{1+3a}\,\sqrt{1-a} = -(1-3a)\sqrt{2a}\,\sqrt{1-a}\cdot\frac{1}{c_3},$$

$$u_4 = -(1+3a^2) \qquad = -2(1+3a^2)\frac{1}{c_4}.$$

Digitized by Google

Demnach erhalten die Constanten c_i die Werthe:

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{1-9a^2}}, \qquad c_2 = \frac{-i}{2\sqrt{2}} \frac{1+3a}{\sqrt{1-3a}}$$

$$c_3 = \frac{-i}{2\sqrt{2}} \frac{1-3a}{\sqrt{1+3a}}, \qquad c_4 = 1 .$$

Betrachten wir die singulären Ebenen von Π_6, welche sowohl Wendeebenen von C_4 sind als auch den Punkten b_i auf C_4 entsprechen, so finden wir die doppelten Werthe ihrer Coordinaten:

$$u_1 = -(1-9a^2)\sqrt{1+a}\sqrt{1-a} = \sqrt{1+a}\sqrt{1-a}\,\frac{1}{c_1},$$

$$u_2 = (1-3a)\,2\sqrt{2a}\sqrt{1+a} = i\sqrt{1+a}\sqrt{a}\sqrt{1+3a}\,\frac{1}{c_2},$$

$$u_3 = (1+3a)\,2\sqrt{2a}\sqrt{1-a} = i\sqrt{1-a}\sqrt{a}\sqrt{1-3a}\,\frac{1}{c_3},$$

$$u_4 = (1-9a^2) \qquad = -\sqrt{1-9a^2}\,\frac{1}{c_4} .$$

Hieraus folgen aber die nämlichen Werthe für die Constanten c_i. Wir folgern nun die Sätze: *Wendet man auf die Punkte und Schmiegungsebenen der rationalen Raumcurve C_4 die reciproke Raumtransformation:*

$$(51.) \qquad x_1' = \frac{1}{\sqrt{1+3a}\sqrt{1-3a}}\,u_1, \quad x_2' = \frac{-i}{2\sqrt{2}}\,\frac{1+3a}{\sqrt{1-3a}}\,u_2,$$

$$x_3' = \frac{-i}{2\sqrt{2}}\,\frac{1-3a}{\sqrt{1+3a}}\,u_3, \qquad x_4' = u_4$$

an, so gehen dieselben in die Schmiegungsebenen und Punkte der Rückkehrcurve R_6 ihrer Doppeldeveloppabeln über; umgekehrt führt dieselbe auch die Punkte und Schmiegungsebenen von R_6 in die Ebenen und Punkte von C_4 über. Indem man in (51.) den Wurzeln verschiedene Vorzeichen beilegt, erhält man vier verschiedene reciproke Transformationen; dieselben sind imaginär.

Die Coordinaten der Doppeltangentialebenen von C_4 werden in Rücksicht auf (27.):

Digitized by Google

$$(52.)\quad \left|\begin{array}{l} u_1' = \sqrt{1+3a}\,\sqrt{1-3a}\,(\sigma_1^4 - \sigma_2^4)\ , \\ u_2' = -2i\sqrt{2}\,\sqrt{1-3a}\,\sigma_1\sigma_2\,(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\ , \\ u_3' = 2i\sqrt{2}\,\sqrt{1+3a}\,\sigma_1\sigma_2(\sigma_1^2-\sigma_2^2)\ , \\ u_4' = \sigma_1^4 + 6a\sigma_1^2\sigma_2^2 + \sigma_2^4\ . \end{array}\right.$$

Die Doppeltangentialebenen von C_4 berühren die Fläche zweiten Grades M*:*

$$(53.)\quad (1-9a^2)x_1^2 - 8\frac{1-3a}{(1+3a)^2}x_2^2 + 8\frac{1+3a}{(1-3a)^2}x_3^2 - x_4^2 = 0\ ,$$

und zwar längs einer rationalen Raumcurve vierter Ordnung P_4.

Aus der Gleichung für I_2 ergiebt sich, *dass die Rückkehrcurve R_6 der Doppeldeveloppablen von C_4 auf der Fläche zweiten Grades* Λ*:*

$$(54.)\quad (1-9a^2)x_1^2 - 2(1-3a)x_2^2 + 2(1+3a)x_3^2 - (1+3a^2)x_4^2 = 0$$

liegt. Die Spitzen von R_6 liegen in den Punkten $b_1\ b_2\ b_3\ b_4$ und die Tangenten von C_4 in diesen Punkten sind zugleich die Spitzentangenten.

Wenn wir wieder den Begriff der zu einer rationalen Raumcurve vierter Ordnung *conjugirten* abwickelbaren Fläche zu Hülfe nehmen, können wir den Satz aussprechen: *Jeder rationalen Raumcurve vierter Ordnung entspricht eine zweite in der Art, dass erstere die Doppelcurve der abwickelbaren Fläche vierter Klasse bildet, welche zu letzterer conjugirt ist.* Die Doppeltangentialebene der erstgenannten Raumcurve umhüllen die zur zweiten conjugirte abwickelbare Fläche. *Es giebt vier lineare Transformationen, welche die eine Raumcurve vierter Ordnung mit den zugehörigen Developpabeln in die andere und ihre Developpabeln überführen.* So erhält man die Curve P_4 aus der Curve C_4, wenn man die Transformationen:

$$x_1' = \frac{1}{\sqrt{1+3a}\,\sqrt{1-3a}}x_1\ , \quad x_2' = \frac{i\quad(1+3a)}{2\sqrt{2}\,\sqrt{1-3a}}x_2\ ,$$

$$x_3' = \frac{i\quad(1-3a)}{2\sqrt{2}\,\sqrt{1+3a}}x_3\ , \qquad x_4' = x_4$$

anwendet.

Digitized by Google

Untersuchen wir noch zum Schluss die ein-eindeutige Beziehung, welche zwischen der Doppelcurve D_6 und der Rückkehrcurve R_6 der Doppeldeveloppabeln besteht. Jede Doppeltangentialebene von C_4 ist einerseits Schmiegungsebene in einem Punkte der R_6, andrerseits schneiden sich die beiden in ihr liegenden Tangenten in einem Punkte von D_6; diese Punkte entsprechen sich eindeutig. Nimmt man speciell die Ebene, welche in p_i das Hyperboloid H berührt, so entspricht ihr auf D_6 die Spitze, die selbst in p_i liegt, und auf R_6 die Spitze, die nach b_i fällt. Sind nun x_i die Coordinaten eines Punktes auf R_6 und x_i' die eines Punktes auf D_6, so erhalten wir für die Spitzen auf R_6 resp. D_6:

$$x_1 = \sqrt{1+a}\sqrt{1-a}, \qquad x_1' = \sqrt{1-9a^2}\sqrt{1+a}\sqrt{1-a},$$
$$x_2 = i\sqrt{1+a}\sqrt{a}\sqrt{1+3a}, \qquad x_2' = -2i\sqrt{a}\sqrt{1-3a}\sqrt{1+a},$$
$$x_3 = -i\sqrt{1-a}\sqrt{a}\sqrt{1-3a}, \qquad x_3' = 2i\sqrt{a}\sqrt{1+3a}\sqrt{1-a},$$
$$x_4 = \sqrt{1-9a^2}, \qquad x_4' = 1+3a^2 .$$

Demnach geht die Doppelcurve D_6 der abwickelbaren Fläche von C_4 durch die lineare Transformation:

$$(55.) \qquad x_1 = x_1', \quad x_2 = -\frac{1+3a}{2}x_2', \quad x_3 = -\frac{1-3a}{2}x_3',$$
$$x_4 = \frac{1-9a^2}{1+3a^2}x_4'$$

in die Rückkehrcurve R_6 der Doppeldeveloppabeln von C_4 über. Diese Transformation ist so beschaffen, dass jeder Punkt auf D_6 in denjenigen Punkt auf R_6 übergeht, dessen Schmiegungsebene ihn passirt. Aus dieser Transformation [1]) folgen drei weitere, wenn man sie mit den linearen Transformationen der D_6 in sich combinirt, d. h. wenn man bei zwei der Coordinaten x_i' das Vorzeichen wechselt. Die Transformation (55.) welche D_6 in R_6 überführt, verwandelt auch alle zu D_6 covarianten Gebilde in die entsprechenden bei R_6. Daraus schliessen wir, dass die Doppelcurve der abwickelbaren Fläche von D_6 — sie sei mit F_4

1) Man hätte die Transformation auch erhalten können durch Combination der beiden reciproken Transformationen, die die Punkte von C_4 in die Ebenen von R_6 resp. D_6 verwandeln.

Digitized by Google

bezeichnet — aus C_4 durch die Transformation (55.) hervorgeht. Sind x_i' die Coordinaten eines Punktes von F_4 und x_i diejenigen eines Punktes von C_4, so ist:

$$x_1' = (1-9a^2)x_1, \quad x_2' = -2(1-3a)x_2, \quad x_3' = -2(1+3a)x_3,$$
$$x_4' = (1+3a^2)x_4 .$$

Die Curve F_4 liegt auf der Fläche 2. Grades N:

$$(56.) \qquad \frac{x_1^2}{(1-9a^2)^2} + \frac{x_2^2}{4(1-3a)^2} - \frac{x_3^2}{4(1+3a)^2} - \frac{x_4^2}{(1+3a^2)^2} = 0.$$

X. Uebersicht über die verschiedenen Curven und Flächen.

C_4, rationale Raumcurve 4. Ordnung,

H, Hyperboloid durch die Raumcurve C_4,

Γ_6, abwickelbare Fläche gebildet von den Tangenten der C_4,

I_2, Fläche 2. Grades, welche von der Γ_6 längs einer Curve 6. Ordnung berührt wird,

Φ_3, STEINER'sche Fläche, welche von den Erzeugenden der Γ_6 längs der Curve C_4 osculirt wird,

D_6, Doppelcurve der Fläche Γ_6,

Σ, Fläche 2. Grades durch die Curve D_6,

K_6, abwickelbare Fläche 4. Classe gebildet von den Tangenten der D_6,

T, Fläche 2. Grades, welche von der K_6 längs einer Raumcurve 4. Ordnung berührt wird,

K_4, Curve 4. Ordnung, in der sich K_6 und T berühren,

F_4, Doppelcurve 4. Ordnung der Fläche K_6,

N, Fläche 2. Grades durch die Curve F_4,

Π_6, abwickelbare Fläche, welche von den Doppeltangentialebenen der C_4 umhüllt wird,

M, Fläche 2. Grades, welche von Π_6 längs einer Raumcurve 4. Ordnung berührt wird,

P_4, Curve 4. Ordnung, in der sich Π_6 und M berühren,

R_6, Rückkehrcurve der Fläche Π_6,

Λ, Fläche 2. Grades durch die Curve R_6.

Digitized by Google

SITZUNG VOM 7. JULI 1890.

Hermann Wiener, *Ueber geometrische Analysen.*[1]) Vorgelegt von NEUMANN. Mit 2 Figuren.

VI. Das Rechnen mit Verwandtschaften.[2])

29. Für ein jedes Gebiet der Geometrie sieht man sich an einem bestimmten Punkt der Entwickelung genötigt, eine Analysis auszubilden.

Die Analysis greift in zwei Richtungen helfend ein: da wo die Anschauung wegen der Häufung der Begriffe nicht mehr ausreicht, soll sie das Vorwärtsschreiten anbahnen; da wo die Gewohnheit uns den inneren Zusammenhang der Dinge verwischt, soll sie die Begriffe zergliedern helfen. Denn wir können uns nur schwer von den inneren Gründen dessen Rechenschaft geben, was uns durch häufigen Gebrauch selbstverständlich geworden ist. Und so bestimmen das »zu schwer« und das trügerische »zu leicht« die beiden Grenzen des rein anschaulichen Denkens. Dem *Fortschritt* auf der einen Seite steht daher auf der anderen die *Erkenntniss der Grundlagen* gegenüber, auf

---

1) Dieser Aufsatz bildet die Fortsetzung der beiden früheren: »Die Zusammensetzung zweier endlichen Schraubungen zu einer einzigen« (S. 13 bis 23) und »Zur Theorie der Umwendungen« (S. 71 bis 87). Um mich leichter auf frühere Stellen berufen zu können, habe ich die Sätze durchnummerirt.

2) Der Inhalt des Abschnittes VI beschäftigt sich im Wesentlichen mit dem, was man sonst auch das »Rechnen mit Operationsproducten« nennt. In fast allen Arbeiten, die solche Producte (Folgen) behandeln, sind die zu Grunde gelegten Operationen *Verwandtschaften*. Der Begriff »*Operation*« ist aber weiter, und umfasst ausser den Verwandtschaften (Transformationen) auch die *Verknüpfungen*, seien es nun Verknüpfungen von Objecten (z. B. Multiplication von Zahlen) oder von Verwandtschaften (z. B. *Zusammensetzung* zweier Bewegungen zu einer einzigen; Bildung von Folgen).

Digitized by Google

welchen ein Gebiet beruht, und in beiden Beziehungen muss eine brauchbare Analyse leistungsfähig sein.

Aber seit Grassmann ist allmählich immer mehr das Gefühl dafür wach geworden, dass man noch eine weitere Forderung an eine solche Analyse zu stellen hat, nämlich, dass sie selbst anschaulich sei. Unter einer *anschaulichen Analyse* ist eine solche zu verstehen, bei welcher mit jedem Schritt, den wir in der Rechnung mit Zeichen machen, ein bestimmter geometrischer Vorgang der Objecte parallel geht, die durch jene Zeichen ausgedrückt werden; so dass an jeder Stelle der Entwickelung der Uebergang von der Rechnung zur Anschauung, oder umgekehrt ermöglicht ist. Das beste Beispiel einer solchen anschaulichen Analysis ist in Grassmann's Ausdehnungslehre gegeben [1]).

30. Um nun auf die *Analysis der Umwendungen* zu kommen, so verhehle ich mir in Bezug auf den ersten der erwähnten Punkte keineswegs, dass sie noch einer weiteren Entwickelung bedarf, um in einfachster Weise die wichtigen Aufgaben zu lösen, die ihr vor Allem zufallen müssen, wie die Frage nach den Gruppen von Bewegungen [2]). Doch werden, wie ich hoffe, die folgenden Betrachtungen als eine erste Vorarbeit dazu dienen können. Vorläufig kommt es mir mehr auf den zweiten Punkt an: die *Grundlagen* der Theorie der Bewegungen soweit klarzustellen, dass der Zusammenhang mit anderen Theorien, die auf denselben Grundlagen beruhen, deutlich hervortritt.

Jeder Schritt, den wir dabei rechnerisch machen, lässt sich auch an den geometrischen Gebilden anschaulich verfolgen, so dass wir es also mit einem *anschaulichen Verfahren* zu thun haben. Und zwar gilt diese Veranschaulichung nicht nur für die im Früheren angestellten kinematischen Betrachtungen sondern ebenso gut für die anderen denselben Grundgesetzen folgenden geometrischen Theorien. Daher wird Jeder, der nur in einem dieser Gebiete bewandert ist — sei dies nun die

1) Der Unterschied der gewöhnlichen analytischen Geometrie von der Grassmann'schen Analysis besteht darin, dass jene alle Beziehungen geometrischer Gebilde in *Zahlbeziehungen* umsetzt, diese aber mit den Gebilden [Strecke, Feld (Moment), Linientheil (Kraft) u. s. w.] selbst rechnet.

2) Materiell ist diese Frage, mit welcher die andere, nach der Anzahl der möglichen Krystallsysteme, aufs Innigste zusammenhängt, durch die Arbeiten von C. Jordan, L. Sohncke und Schönflies erledigt.

Digitized by Google

Kinematik, oder die allgemeinere Lehre von den Spiegelungen, sei es die Theorie der Projectivitäten oder die allgemeinere der Kreisverwandtschaften u. s. f. — sich in diesem Gebiet für jede Formel das anschauliche Bild suchen können.

31. Es soll nun gezeigt werden, wie man von den Umwendungen zu allgemeineren Theorien kommt.

Die Umwendungen, und allgemeiner die Bewegungen setzen einen starren Körper voraus, der sich bei der Bewegung in keiner Weise verändert. Dabei konnte für alle Betrachtungen, die wir in den vorigen Kapiteln anstellten, zweierlei als nebensächlich angesehen werden. Das eine war die *Gestalt des Körpers*, das andere der *Weg*, den er beim Uebergang von der Anfangs- zur Endlage beschrieb.

Was das Erste betrifft, so war bei der ganzen Bewegung nur die jeweilige Lage eines Dreiecks (7.) als bekannt vorauszusetzen, um die Bewegung fest zu legen. Mit dem Dreieck kann man dann eine beliebige Anzahl weiterer Punkte starr verbunden denken, ohne irgend etwas in der Betrachtung zu ändern. Es steht nun nichts im Wege, *alle* Punkte des Raumes mit dem Dreieck starr zu verbinden; und so kommen wir zum Begriff der Bewegung eines *starren räumlichen Systems*, und verstehen darunter eine solche Bewegung, welche alle Punkte des Raumes gleichzeitig erfasst.

Das Zweite, die Unabhängigkeit des Ergebnisses von den verschiedenen Zwischenlagen, weist uns darauf hin, die Zwischenlagen überhaupt hinwegzudenken und uns stets bloss die Anfangslage Σ_1 und die Endlage Σ_2 des starren räumlichen Systems vorzustellen; dadurch kommen wir zum Begriff der Beziehung, Zuordnung oder *Verwandtschaft*. In dieser entspricht jedem Punkt, der im System Σ_1 enthalten ist, ein ganz bestimmter Punkt in Σ_2; die Punkte sind dabei im einen, wie im anderen System so verbunden, dass jeder Figur in Σ_1 eine *congruente* Figur in Σ_2 entspricht.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen beiden Auffassungen macht sich noch geltend im Ausdruck der *Gleichheit*. Zwei Bewegungen können sehr verschieden von einander sein und doch die eine durch die andere *ersetzbar* genannt werden, nämlich dann, wenn beide das System aus der Anfangslage auf zwei

Digitized by Google

verschiedenen Wegen in dieselbe Endlage bringen. Sollen aber zwei Beziehungen (Verwandtschaften) einander gleich sein, so muss durch beide das System Σ_1 in gleicher Weise auf Σ_2 bezogen sein, so dass also zwei Elemente von Σ_1 und Σ_2, die sich vermöge der einen Beziehung entsprechen, es auch vermöge der anderen thun. Dann sind aber die beiden Beziehungen nicht nur durch einander ersetzbar, sondern vollkommen identisch. Und auch bei *Folgen* von Verwandtschaften, denen wir alsbald näher treten werden, kann man statt der Ersetzbarkeit die Gleichheit setzen, falls man das Ergebniss der Folge als Hauptsache, die einzelnen, sie zusammensetzenden Verwandtschaften als Nebensache betrachtet.

32. Durch die Auffassung der Bewegung als Verwandtschaft wird die Möglichkeit zu Erweiterungen gegeben. So kann man sich eine Verwandtschaft zwischen den Punkten des Raumes vorstellen, vermöge welcher, wie bei der vorhin geschilderten Congruenz, alle gegenseitigen Abstände der Punkte des Systems Σ_2 denen der entsprechenden Punkte in Σ_1 gleich geblieben sind, doch so, dass jedem Tetraeder des einen Systems kein congruentes, sondern ein *symmetrisches* des anderen entspricht. Von einem stetigen Uebergang, wie er bei der Bewegung stattfand, kann hier nicht mehr die Rede sein, und in der That gehört diese Verwandtschaft der allgemeinen Theorie der *Spiegelungen* an, in welcher unstetige Operationen, die Spiegelungen an Punkten und Ebenen, als erzeugende Operationen auftreten.

Noch andere Verallgemeinerungen erhalten wir, indem wir weitere Eigenschaften der erst betrachteten Verwandtschaften fallen lassen. Geben wir z. B. die Gleichheit der Theile auf und setzen die Aehnlichkeit an ihre Stelle, oder verlangen wir bloss, dass Punkte, die auf einer Geraden lagen, wieder ebenso liegen, oder sogar nur, dass Punkte, die sich benachbart waren, es bleiben, so gewinnen wir dadurch viel allgemeinere Verwandtschaften. Bei allen den genannten treten die zwei Fälle auf, die wir im vorigen Beispiel als Congruenz und Symmetrie unterschieden, nämlich der eine Fall, wo das erste System durch *stetige Veränderung* in das zweite übergeführt werden kann, und der zweite Fall, wo dies *nicht* möglich ist. Bei ihnen allen werden wir also in gleicher Weise von den Zwischenlagen absehen müssen und sie als *Verwandtschaften* zu betrachten haben.

Digitized by Google

Solche *Verwandtschaften*, wie sie in den verschiedensten Formen in Erscheinung treten, sind Gegenstand der schönsten und fruchtbarsten Arbeiten eines Möbius gewesen. Sie können alle als Beispiele für die ganz allgemeinen Betrachtungen dienen, die wir jetzt anstellen wollen.

---

33. Wir gehen dazu über, die einfachsten Gesetze über das Rechnen mit Verwandtschaften abzuleiten[1]).

A. Erklärungen.

a) Wird ein System[2]) Σ_1 durch eine Verwandtschaft $\mathfrak{A}$ in ein System Σ_2 übergeführt, dieses durch eine Verwandtschaft $\mathfrak{B}$ in Σ_3 u. s. f. schliesslich Σ_{n-1} durch eine Verwandtschaft $\mathfrak{K}$ in Σ_n, *so verstehen wir unter der Folge der Verwandtschaften* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \cdots \mathfrak{K}$ *diejenige einzelne Verwandtschaft, welche* Σ_1 *in* Σ_n *überführt.*

Dass das System Σ_1 durch die Verwandtschaft $\mathfrak{A}$ in Σ_2 übergeführt werde, drücken wir in Zeichen aus durch:

$$\Sigma_1 \{ \mathfrak{A} \} \Sigma_2 .$$

Die Folge von mehreren Verwandtschaften $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \cdots \mathfrak{K}$ *bezeichnen wir durch Nebeneinanderschreiben* derselben, also durch $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\cdots\mathfrak{K}$. Ist also:

$$\Sigma_1 \{ \mathfrak{A} \} \Sigma_2 \{ \mathfrak{B} \} \Sigma_3 \cdots \Sigma_{n-1} \{ \mathfrak{K} \} \Sigma_n ,$$

so ist:
$$\Sigma_1 \{ \mathfrak{A}\mathfrak{B}\cdots\mathfrak{K} \} \Sigma_n .$$

Demnach sind zwei Folgen von Verwandtschaften einander gleich, wenn sie das System Σ_1 *in dasselbe System* Σ_n *überführen.*

---

1) Diese Rechengesetze werden allenthalben gebraucht, wo man es mit Verknüpfungen zu thun hat. Trotz ihrer Einfachheit müssen sie aber doch einmal bewiesen werden, und da ich nirgends die Beweise gefunden habe, so stelle ich oben die wichtigsten dieser Sätze nebst ihren Beweisen zusammen, sodass ich auch für diesen Aufsatz nur elementare Kenntnisse vorauszusetzen brauche, und zugleich eine Vereinfachung in der Ableitung der Rechengesetze für involutorische Verwandtschaften im folgenden Abschnitt (VII) erziele, der zum vorliegenden Abschnitt ganz parallel verläuft.

2) Unter dem *System* verstehen wir die Gesammtheit aller Elemente, die überhaupt der Operation unterzogen werden können, also z. B. bei einer räumlichen Punkt-Transformation die Gesammtheit *aller* Punkte des Raumes; dabei werden meist Σ_1 und Σ_2 *dieselbe* Gesammtheit von Elementen umfassen, aber in einer anderen Anordnung.

Digitized by Google

Ist also: $$\Sigma_1 \{ \mathfrak{A}\mathfrak{B} \cdot\cdot \mathfrak{K} \} \Sigma_n$$

und: $$\Sigma_1 \{ \mathfrak{L}\mathfrak{M} \cdot\cdot \mathfrak{P} \} \Sigma_n \ ,$$

so ist: $$\mathfrak{A}\mathfrak{B} \cdot\cdot \mathfrak{K} = \mathfrak{L}\mathfrak{M} \cdot\cdot \mathfrak{P} = \mathfrak{R} \ ,$$

wenn $\mathfrak{R}$ die einzelne Verwandtschaft ist, zu welcher sich die übrigen in ihrer Folge zusammensetzen.

b) *Die Verwandtschaft, welche das System, Element für Element, in sich überführt, heisst die identische Verwandtschaft (Identität).*

Wir bezeichnen[1] *sie mit* 1.

Es ist also:

$$\Sigma_1 \{ 1 \} \Sigma_1 \ , \quad \Sigma_2 \{ 1 \} \Sigma_2 \quad \text{u. s. f.}$$

Aus: $$\Sigma_1 \{ 1 \} \Sigma_1 \{ \mathfrak{A} \} \Sigma_2$$

und aus: $$\Sigma_1 \{ \mathfrak{A} \} \Sigma_2 \{ 1 \} \Sigma_2$$

folgen dann die Formeln:

$$1\,\mathfrak{A} = \mathfrak{A} \ , \quad \mathfrak{A}\,1 = \mathfrak{A} \ ,$$

für jede beliebige Verwandtschaft $\mathfrak{A}$.

c) *Führt eine Verwandtschaft* $\mathfrak{A}$ *das System* Σ_1 *in* Σ_2 *über, so nennen wir diejenige Verwandtschaft, welche* Σ_2 *in* Σ_1 *überführt, die Umkehrung der ersten.*

Wir bezeichnen[2] *die Umkehrung*[3] *von* $\mathfrak{A}$ *durch* $\mathfrak{A}^{-1}$.

Es ist also:

$$\Sigma_1 \{ \mathfrak{A} \} \Sigma_2 \{ \mathfrak{A}^{-1} \} \Sigma_1 \ ,$$

d. h.: $$\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}^{-1} = 1 \ .$$

Umgekehrt erhalten wir den

Satz. *Ist eine Verwandtschaft* $\mathfrak{A}'$ *so beschaffen, dass*

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}' = 1 \ ,$$

so ist $\mathfrak{A}'$ *die Umkehrung von* $\mathfrak{A}$.

---

1) und 2) Diese Bezeichnungsweisen folgen nothwendig aus der Schreibweise der Folge, welche sie formal als *Product* erscheinen lässt. H. GRASSMANN hat (Ausdehnungslehre 1844, § 6 und 9) Kennzeichen dafür angegeben, ob eine Verknüpfung von Operationen als *Addition* oder als *Multiplication* aufzufassen ist. Wir haben unbeschadet der im einzelnen Falle noch zu treffenden Entscheidung die Folge allgemein in der Form eines Productes geschrieben, wie dies auch sonst gebräuchlich ist.

3) Solche Beziehungen, bei denen sich eine Umkehrung nicht bilden lässt, sind also von der Betrachtung ausgeschlossen; ebenso diejenigen, bei denen sich nicht aus je zweien eine einzige neue als ihre Folge bilden lässt.

Digitized by Google

Denn es ist dann:

$$\Sigma_1 \{ \mathfrak{A}\mathfrak{A}' \} \Sigma_1 ,$$

also: $$\Sigma_1 \{ \mathfrak{A} \} \Sigma_2 \{ \mathfrak{A}' \} \Sigma_1 ,$$

ferner: $$\Sigma_2 \{ \mathfrak{A}^{-1} \} \Sigma_1 ,$$

also nach a): $$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}^{-1} .$$

Zusatz. *Die Identität ist ihre eigene Umkehrung.*

Denn setzt man in der Gleichung $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1} = 1$ für $\mathfrak{A}$ die 1, so erhält man $\mathfrak{A}^{-1} = 1$.

B. Das associative Gesetz.

34. **Satz.** *Für die Folge dreier Verwandtschaften gilt stets das associative Gesetz:*

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C} = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C}) .$$

Beweis: Ist:

$$\Sigma_1 \{ \mathfrak{A} \} \Sigma_2 \{ \mathfrak{B} \} \Sigma_3 \{ \mathfrak{C} \} \Sigma_4 ,$$

so lässt sich dies auch schreiben (33a.):

$$\Sigma_1 \{ \mathfrak{A}\mathfrak{B} \} \Sigma_3 \{ \mathfrak{C} \} \Sigma_4 , \quad \Sigma_1 \{ \mathfrak{A} \} \Sigma_2 \{ \mathfrak{B}\mathfrak{C} \} \Sigma_4$$

oder: $$\Sigma_1 \{ (\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C} \} \Sigma_4 , \quad \Sigma_1 \{ \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C}) \} \Sigma_4 ,$$

was sich (33a.) mit der Aussage des Satzes deckt.

Durch Wiederholung desselben Verfahrens [1]) erhalten wir das associative Gesetz für eine *beliebige* Anzahl von Verwandtschaften, welches auch so ausgesprochen werden kann:

Zusatz. *Bei einer Folge von mehreren Verwandtschaften lassen sich aufeinander folgende — ohne Aenderung der Reihenfolge — beliebig in Klammern schliessen, oder auch alle Klammern weglassen.*

Folgerung I. *Kommen in einer Folge von Verwandtschaften eine derselben und ihre Umkehrung unmittelbar nach einander vor, so können beide weggelassen werden.*

Denn es ist:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \cdot\cdot \mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{D} \cdot\cdot \mathfrak{E} &= \mathfrak{A} \cdot\cdot \mathfrak{B}(\mathfrak{C}\mathfrak{C}^{-1})\mathfrak{D} \cdot\cdot \mathfrak{E} , \\ &= \mathfrak{A} \cdot\cdot \mathfrak{B}\,1\,\mathfrak{D} \cdot\cdot \mathfrak{E} && \text{(nach 33c.)}, \\ &= \mathfrak{A} \cdot\cdot (\mathfrak{B}\,1)\,\mathfrak{D} \cdot\cdot \mathfrak{E}, \\ &= \mathfrak{A} \cdot\cdot \mathfrak{B}\mathfrak{D} \cdot\cdot \mathfrak{E} && \text{(nach 33b.)}, \end{aligned}$$

w. z. b. w.

---

1) Die allgemeine Herleitung dieses Satzes für n Glieder, wenn er für drei gilt, findet sich bei H. Grassmann, Ausdehnungslehre 1844, § 8.

Digitized by Google

Fügt man einer Folge von Verwandtschaften

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\cdot\cdot\mathfrak{L}\mathfrak{M}=\mathfrak{T}$$

die umgekehrte Folge ihrer Umkehrungen

$$\mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{L}^{-1}\cdot\cdot\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}^{-1}=\mathfrak{T}'$$

hinzu, so erhält man:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\cdot\cdot\mathfrak{L}\mathfrak{M}\mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{L}^{-1}\cdot\cdot\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}^{-1}=1\ ,$$

da zuerst $(\mathfrak{M}\mathfrak{M}^{-1})$ in der Mitte wegbleiben kann, sodann auch $(\mathfrak{L}\mathfrak{L}^{-1})$ u. s. f., und schliesslich $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1}=1$ bleibt. Daher ist:

$$\mathfrak{T}\mathfrak{T}'=1\ ,$$

also (33c., Satz):

$$\mathfrak{T}'=\mathfrak{T}^{-1}\ ;$$ d. h.:

Folgerung II. *Man erhält die Umkehrung einer Folge von Verwandtschaften, indem man die umgekehrte Folge ihrer Umkehrungen bildet.*

C. Verbindung und Umformung der Gleichungen.

35. **Satz.** *Ist* $\mathfrak{A}\cdot\cdot\mathfrak{B}=\mathfrak{E}\cdot\cdot\mathfrak{F}$

und $\mathfrak{C}\cdot\cdot\mathfrak{D}=\mathfrak{G}\cdot\cdot\mathfrak{H}\ ,$

so ist auch $\mathfrak{A}\cdot\cdot\mathfrak{B}\mathfrak{C}\cdot\cdot\mathfrak{D}=\mathfrak{E}\cdot\cdot\mathfrak{F}\mathfrak{G}\cdot\cdot\mathfrak{H}\ .$

Denn führt die Folge $\mathfrak{A}\cdot\cdot\mathfrak{B}$ das System Σ_1 in Σ_2, die Folge $\mathfrak{C}\cdot\cdot\mathfrak{D}$ dieses in Σ_3 über, so ist:

$$\Sigma_1\{\mathfrak{A}\cdot\cdot\mathfrak{B}\}\Sigma_2\ ,\quad \Sigma_1\{\mathfrak{E}\cdot\cdot\mathfrak{F}\}\Sigma_2\ ,$$
$$\Sigma_2\{\mathfrak{C}\cdot\cdot\mathfrak{D}\}\Sigma_3\ ,\quad \Sigma_2\{\mathfrak{G}\cdot\cdot\mathfrak{H}\}\Sigma_3\ ,$$

also: $\Sigma_1\{\mathfrak{A}\cdot\cdot\mathfrak{B}\mathfrak{C}\cdot\cdot\mathfrak{D}\}\Sigma_3\ ,\quad \Sigma_1\{\mathfrak{E}\cdot\cdot\mathfrak{F}\mathfrak{G}\cdot\cdot\mathfrak{H}\}\Sigma_3\ ,$

woraus der Satz folgt.

Fügt man so zu einer gegebenen Gleichung

$$\mathfrak{A}\cdot\cdot\mathfrak{B}=\mathfrak{E}\cdot\cdot\mathfrak{F}$$

noch die stets richtige Gleichung hinzu:

$$\mathfrak{C}\cdot\cdot\mathfrak{D}=\mathfrak{C}\cdot\cdot\mathfrak{D}\ ,$$

so erhält man, je nachdem man sie als zweite oder erste Gleichung in der Zusammensetzung nimmt:

$$\mathfrak{A}\cdot\cdot\mathfrak{B}\mathfrak{C}\cdot\cdot\mathfrak{D}=\mathfrak{E}\cdot\cdot\mathfrak{F}\mathfrak{C}\cdot\cdot\mathfrak{D}$$

oder: $\mathfrak{C}\cdot\cdot\mathfrak{D}\mathfrak{A}\cdot\cdot\mathfrak{B}=\mathfrak{C}\cdot\cdot\mathfrak{D}\mathfrak{E}\cdot\cdot\mathfrak{F}\ ,$ d. h.:

Digitized by Google

Zusatz I. *Man kann in einer Gleichung zwischen Verwandtschaften eine beliebige Anzahl von Verwandtschaften auf beiden Seiten vorn, oder auf beiden Seiten hinten in derselben Reihenfolge hinzufügen.*

Fügt man so in der Gleichung

$$\mathfrak{A} \,..\, \mathfrak{B} = \mathfrak{E} \,..\, \mathfrak{F}$$

auf beiden Seiten die Umkehrung der rechts stehenden Folge, also (vgl. 34, Folgerung II) die Folge $\mathfrak{F}^{-1} \,..\, \mathfrak{E}^{-1}$ hinten bei, so wird:

$$\mathfrak{A} \,..\, \mathfrak{B}\mathfrak{F}^{-1} \,..\, \mathfrak{E}^{-1} = 1 \ , \qquad \text{d. h.}.$$

Zusatz II. *Man kann jede Gleichung zwischen Verwandtschaften so umformen, dass auf der einen Seite der Gleichung die identische Verwandtschaft steht.*

Ist nun eine Gleichung zwischen n Verwandtschaften auf diese Form gebracht, also:

$$\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \,..\, \mathfrak{A}_{n-1} \mathfrak{A}_n = 1 \ ,$$

und man fügt auf beiden Seiten vorn $\mathfrak{A}_n$ und hinten $\mathfrak{A}_n^{-1}$ bei, so erhält man:

$$\mathfrak{A}_n \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \,..\, \mathfrak{A}_{n-1} \mathfrak{A}_n \mathfrak{A}_n^{-1} = \mathfrak{A}_n \mathfrak{A}_n^{-1}$$

oder:
$$\mathfrak{A}_n \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \,..\, \mathfrak{A}_{n-1} = 1 \ .$$

Und ebenso erhält man daraus:

$$\mathfrak{A}_{n-1} \mathfrak{A}_n \mathfrak{A}_1 \,..\, \mathfrak{A}_{n-2} = 1 \ , \quad \text{u. s. f.}$$

Fügt man noch auf beiden Seiten der gegebenen Gleichung die Umkehrung der linken Seite hinzu, so wird:

$$1 = \mathfrak{A}_n^{-1} \mathfrak{A}_{n-1}^{-1} \,..\, \mathfrak{A}_2^{-1} \mathfrak{A}_1^{-1} \ , \qquad \text{d. h.:}$$

Zusatz III. *Ist eine Gleichung zwischen Verwandtschaften so umgeformt, dass auf der einen Seite die identische Verwandtschaft steht, so kann man der anderen Seite $2n$ verschiedene Gestalten geben, indem man mit ihr und ihrer Umkehrung alle cyclischen Vertauschungen vornimmt.*

D. Die Ueberführung von Verwandtschaften.

36. Es sei durch eine Verwandtschaft $\mathfrak{A}$ ein System Σ_1 in ein System Σ_2 übergeführt. Werden nun die beiden Systeme Σ_1 und Σ_2 gleichzeitig einer einzigen Verwandtschaft $\mathfrak{B}$ unterworfen, so wird durch $\mathfrak{B}$ das System Σ_1 etwa in das System Σ_1'

Digitized by Google

und Σ_2 in Σ_2' übergeführt werden. Bezeichnen wir dann eine Verwandtschaft, welche Σ_1' in Σ_2' überführt, durch $\mathfrak{A}'$, und bedenken, dass die beiden Systeme Σ_1 und Σ_2, deren Beziehung die Verwandtschaft $\mathfrak{A}$ vermittelt, durch $\mathfrak{B}$ in die beiden Systeme Σ_1' und Σ_2' übergeführt werden, deren Beziehung $\mathfrak{A}'$ vermittelt, so können wir sagen: *Es wird die Verwandtschaft* $\mathfrak{A}$ *durch die Verwandtschaft* $\mathfrak{B}$ *in die Verwandtschaft* $\mathfrak{A}'$ *übergeführt.*

Wegen der Wichtigkeit dieses Begriffs will ich ihn durch das Beispiel der Bewegung eines starren Körpers der Vorstellung etwas näher bringen, indem ich auf den landläufigen Begriff der Bewegung zurückgreife.

Wir können uns eine Bewegung $\mathfrak{B}$ vorstellen, welche zu gleicher Zeit zwei mit einander starr verbundene Körper Σ_1 und Σ_2 erfasst, und sie mit den Körpern Σ_1' und Σ_2' zur Deckung bringt. Wenn aber der Körper Σ_1 mit dem Körper Σ_2 congruent ist, also auch Σ_1' mit Σ_2', so giebt es eine bestimmte Schraubung $\mathfrak{A}$, welche Σ_1 mit Σ_2 zur Deckung bringt, andererseits aber auch eine Schraubung $\mathfrak{A}'$, welche Σ_1' mit Σ_2' zur Deckung bringt, so dass durch $\mathfrak{B}$ nicht nur Σ_1 und Σ_2 in Σ_1' und Σ_2', sondern auch die Schraubung $\mathfrak{A}$ in die Schraubung $\mathfrak{A}'$ übergeführt wird.

Man sieht[1]), dass in dem starren System, welches Σ_1 und Σ_2 umfasst, die Schraubung $\mathfrak{A}$ genau so verlaufen muss, wie $\mathfrak{A}'$ in dem starren System von Σ_1' und Σ_2'. Aber *gleich* im Sinne der Ersetzbarkeit können die in einander überführbaren Schraubungen *nicht* genannt werden, obwohl sie congruent sind.

Kleiden wir diese Betrachtungen für den Fall der allgemeinen Verwandtschaften in Formeln, so können wir schreiben:

$$\Sigma_1 \{ \mathfrak{A} \} \Sigma_2$$
$$\Sigma_1 \{ \mathfrak{B} \} \Sigma_1' , \quad \Sigma_2 \{ \mathfrak{B} \} \Sigma_2'$$
$$\Sigma_1' \{ \mathfrak{A}' \} \Sigma_2' .$$

Diese vier Formeln lassen sich (unter Berücksichtigung von 33c) in eine Reihe schreiben:

$$\Sigma_1 \{ \mathfrak{A} \} \Sigma_2 \{ \mathfrak{B} \} \Sigma_2' \{ \mathfrak{A}'^{-1} \} \Sigma_1' \{ \mathfrak{B}^{-1} \} \Sigma_1 ,$$

oder:
$$\Sigma_1 \{ \mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{A}'^{-1} \mathfrak{B}^{-1} \} \Sigma_1 ,$$

also (33b):
$$\mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{A}'^{-1} \mathfrak{B}^{-1} = 1 ,$$

---

4) Man vergleiche C. JORDAN, Annali di Matematica, Serie II, II 174.

Digitized by Google

oder wenn man auf beiden Seiten (nach 35, Zusatz I) die Folge $\mathfrak{B}\mathfrak{A}'$ hinten hinzufügt (wegen 34, Folgerung I):

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}' .$$

Ist umgekehrt diese Gleichung gegeben, so folgen die eben benutzten Formeln genau in der umgekehrten Ordnung aus der letzten, und die ersten Formeln sagen dann aus, dass die Verwandtschaft $\mathfrak{A}$ durch die Verwandtschaft $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}'$ übergeführt werde.

Satz. *Wird eine Verwandtschaft $\mathfrak{A}$ durch eine Verwandtschaft $\mathfrak{B}$ in eine Verwandtschaft $\mathfrak{A}'$ übergeführt, so ist:*

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}' .$$

Und umgekehrt: Gilt diese Gleichung, so wird $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}'$ übergeführt.

Fügt man der Gleichung beiderseits vorn, bezw. hinten, die Verwandtschaft $\mathfrak{B}^{-1}$ bei, so erhält man:

$$\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}' ; \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}'\mathfrak{B}^{-1} , \qquad \text{d. h.:}$$

Zusatz. *Ist eine Verwandtschaft $\mathfrak{A}$ gegeben, so ist diejenige Verwandtschaft $\mathfrak{A}'$, in welche sie durch eine weitere Verwandtschaft $\mathfrak{B}$ übergeführt wird, gleich $\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{B}$.*

Ist $\mathfrak{A}'$ gegeben, so ist die Verwandtschaft $\mathfrak{A}$, welche durch $\mathfrak{B}$ in sie übergeführt wird, gleich $\mathfrak{B}\mathfrak{A}'\mathfrak{B}^{-1}$.

37. **Satz.** *Werden durch eine Verwandtschaft $\mathfrak{B}$ zwei Verwandtschaften $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ in die Verwandtschaften $\mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{A}_2'$ übergeführt, so wird die Folge der ersteren in die Folge der letzteren übergeführt.*

Die Verwandtschaften

$$\mathfrak{A}_1 , \quad \mathfrak{A}_2 , \quad \mathfrak{A}_{12} = \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$$

werden durch die Verwandtschaft $\mathfrak{B}$ übergeführt (nach 36, Zusatz) in:

$$\mathfrak{A}_1' = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B} , \quad \mathfrak{A}_2' = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}_2\mathfrak{B} , \quad \mathfrak{A}_{12}' = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B} .$$

Dann wird:

$$\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_2' = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}_2\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_{12}' ,$$

w. z. b. w.

Zusatz. *Dasselbe gilt für die Folge einer beliebigen Anzahl von Verwandtschaften.*

Der Beweis wird wie vorhin geführt.

38. **Satz.** *Besteht zwischen zwei Folgen von Verwandtschaften eine Gleichung, so besteht sie in derselben Weise zwischen den Verwandtschaften, in welche die ersten durch eine beliebige Verwandtschaft* $\mathfrak{B}$ *übergeführt werden* [1].

Die zwischen den gegebenen Verwandtschaften bestehende Gleichung lässt sich (35, Zusatz II) auf die Form bringen:

$$\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_{n-1} \mathfrak{A}_n = 1 .$$

Dann ist zu beweisen, dass auch:

$$\mathfrak{A}_1' \mathfrak{A}_2' \ldots \mathfrak{A}_{n-1}' \mathfrak{A}_n' = 1 ,$$

wenn $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{A}_{n-1}, \mathfrak{A}_n$ durch $\mathfrak{B}$ bezw. in $\mathfrak{A}_1', \mathfrak{A}_2', \ldots \mathfrak{A}_{n-1}', \mathfrak{A}_n'$ übergeführt werden.

Es ist (nach 36. Zusatz):

$$\mathfrak{A}_1' \mathfrak{A}_2' \ldots \mathfrak{A}_{n-1}' \mathfrak{A}_n' = (\mathfrak{B}^{-1} \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B})(\mathfrak{B}^{-1} \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}) \ldots (\mathfrak{B}^{-1} \mathfrak{A}_{n-1} \mathfrak{B})(\mathfrak{B}^{-1} \mathfrak{A}_n \mathfrak{B}$$
$$= \mathfrak{B}^{-1} \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_{n-1} \mathfrak{A}_n \mathfrak{B} = \mathfrak{B}^{-1} 1 \mathfrak{B} = \mathfrak{B}^{-1} \mathfrak{B} = 1 .$$

Zusatz. *Weiss man, dass zwei Folgen von Verwandtschaften einander nicht gleich sind, so können auch die entsprechenden Folgen derjenigen Verwandtschaften, in welche die ersten durch irgend eine Verwandtschaft* $\mathfrak{B}$ *übergehen, nicht gleich sein.*

Denn wären die letzten Folgen einander gleich, so müssten auch diejenigen, in welche sie durch $\mathfrak{B}^{-1}$ übergeführt werden, d. h. die gegebenen Folgen, einander gleich sein.

Da das gewöhnliche Zeichen der Ungleichheit $\gtrless$ hier, wo von grösser und kleiner nicht die Rede ist, nicht angewandt werden kann, so gebrauchen wir das Zeichen »ungleich« $\neq$ und schreiben:

$$\mathfrak{A} \neq \mathfrak{B} ,$$

um auszudrücken, dass die Verwandtschaft $\mathfrak{A}$ von der Verwandtschaft $\mathfrak{B}$ verschieden sei.

Anmerkung. Folgt allgemeiner aus irgend einer Gleichung eine zweite und auch umgekehrt aus der zweiten die erste, so bleibt (aus demselben Grunde, wie im Zusatz) diese Abhängigkeit auch richtig, wenn man Ungleichheitszeichen statt der beiden Gleichheitszeichen setzt.

---

1) *Jede Gleichung zwischen Folgen von Verwandtschaften besitzt also hinsichtlich jeder Verwandtschaft (Transformation), welche jene Verwandtschaften in andere überführen, die wichtige Eigenschaft, die man als Invarianz bezeichnet.*

Digitized by Google

E. Vertauschbarkeit von Verwandtschaften.

39. **Erklärung.** *Zwei Verwandtschaften* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *heissen vertauschbar, wenn die Folge der ersten und der zweiten gleich der Folge der zweiten und der ersten ist, also wenn:*

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A} .$$

Satz. *Sind zwei Verwandtschaften vertauschbar, so wird jede derselben durch die andere in sich übergeführt.*

Denn einerseits drückt die obige Gleichung

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$$

aus, dass $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$, d. h. in sich, übergeht (36, Satz), und dieselbe Gleichung in der Form

$$\mathfrak{B}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$$

geschrieben, drückt aus, dass $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$, d. h. in sich, übergeht.

Umkehrung. *Wenn eine Verwandtschaft durch eine zweite in sich übergeführt wird, so wird auch die zweite durch die erste in sich übergeführt, und die beiden Verwandtschaften sind vertauschbar.*

Denn jede dieser Aussagen deckt sich mit der oben angeschriebenen Gleichung.

VII. Das Rechnen mit involutorischen Verwandtschaften[1].

40. Die so einfachen Gesetze für das Rechnen mit Verwandtschaften erleiden für den Fall der *involutorischen* Ver-

---

1) Die involutorischen Verwandtschaften spielen seit den grundlegenden Arbeiten von Möbius und v. Staudt eine wichtige Rolle in der Geometrie. Ersterer war vom Begriff der *Symmetrie* (an Ebenen, Punkten, Geraden) ausgegangen, wie er sich in der Lehre von den Krystallen entwickelt hatte, und zeigte, wie sich dieser Begriff nach verschiedenen Seiten hin verallgemeinern lässt, und zuletzt auf die involutorische Collineation führt. Man vergleiche die Aufsätze in Möbius' ges. Werken II 349 (1849); II 361 (1851); II 409 (1856); besonders aber: »Ueber Erweiterungen des Begriffs der Involution von Punkten« II 378 (1855). Ebenso hat er in der Theorie der Kreisverwandtschaften die involutorischen unter diesen mit besonderer Ausführlichkeit behandelt: II 219 (1853); II 243 (1855), bes. § 20—23.

v. Staudt hat schon vor Möbius die involutorische Collineation abgeleitet, und zwar in rein geometrischer Weise, Geometrie der Lage (1847)

Digitized by Google

wandtschaften noch weitere Vereinfachungen, die, wie ich glaube, schon an und für sich den Standpunkt [1]) rechtfertigen werden, den ich in den vorigen und folgenden Aufsätzen vertrete. Dieser Standpunkt lässt sich kurz so bezeichnen:

Wo es auch immer möglich ist, in einer bestimmten Klasse von Verwandtschaften eine jede als Folge von involutorischen Verwandtschaften aufzufassen, ist die Theorie dieser allgemeineren Verwandtschaften auf diejenige der sie zusammensetzenden involutorischen Verwandtschaften aufzubauen [2]).

---

§ 17, und auch die Polarsysteme 2. Ordnung als involutorische Verwandtschaften aufgefasst, ebenda § 18.

Nehmen wir noch dazu die quadratische Verwandtschaft, welche jedem Punkt der Ebene denjenigen anderen zuordnet, der ihm in zwei Polarsystemen zugleich conjugirt ist (vgl. z. B. v. Staudt, Beiträge (1856) § 23 u. 24), so haben wir damit die allgemeiner bekannt gewordenen involutorischen Verwandtschaften aufgezählt.

1) Es ist von Interesse, zu bemerken, dass während für die weittragenden Lie'schen Theorien das *Stetige* (in den infinitesimalen Transformationen) die Grundlage bildet, für das engere oben umgrenzte Gebiet das *Discrete* (in den involutorischen Verwandtschaften) in den Vordergrund tritt.

2) Nachdem ich von der Betrachtung einer Projectivität als Folge zweier Involutionen (vgl. meine Habilitationsschrift: »Rein geometrische Theorie etc.« Darmstadt 1885 § 12) und späterhin der ebenen Collineation als Folge zweier quadratischen Verwandtschaften ausgegangen war, erhielt ich die Ueberzeugung von der Allgemeinheit dieser Methode erst, als ich (im vorigen Herbst) einerseits auf Anregung der Arbeiten von Schönfliess über die Krystallsysteme versuchte, die Grundlagen der Kinematik, unter Hinzuziehung der symmetrischen Systeme einheitlicher zu gestalten, und andererseits (für ein Colleg über conforme Abbildung W. S. 89/90) mir die Theorie der Kreisverwandtschaften in rein geometrischer Weise zurecht legte. Ich fand, dass jede dieser Verwandtschaften als Folge zweier involutorischen Verwandtschaften dargestellt werden kann, und dass diese Darstellung besonderen Vortheil für die Zusammensetzung zweier der allgemeinen Verwandtschaften bietet (vgl. Art. 11).

Wie ich durch die Güte des Herrn W. Fiedler erfahre, hat schon vor mir und vor Burnside (vgl. Art. 25) Halphen die Zusammensetzung zweier Schraubungen geleistet [Nouv. Ann. de Math. III. Série, I 296—299 (1882)], und zwar in ganz analoger Weise, wie ich es später, unabhängig davon, gethan habe. Doch obgleich er die Zerlegung der Schraubenbewegung in zwei Umwendungen (vgl. Art. 10 meiner Arbeit) zu seiner Construction benützt, so schliesst er den Satz, dass jede Bewegung durch eine Schraubung zu ersetzen ist, nicht, wie es nun nahe gelegen hätte, daraus, dass jede Bewegung aus zwei Umwendungen zusammengesetzt werden kann (Art. 17 meiner Arbeit), sondern daraus, dass jede Bewegung durch zwei Schraubungen ersetzt werden kann, die sich (nach der Construction) zu einer einzigen vereinigen.

Digitized by Google

A. Erklärung.

11. *Unter einer involutorischen Verwandtschaft*[1] *verstehen wir* (4.) *eine solche nicht identische Verwandtschaft*[2], *die zwei Mal hinter einander angewandt die identische Verwandtschaft ergiebt.*

Eine Verwandtschaft s ist also involutorisch, wenn:

$$s^2 = 1 , \quad s \neq 1 ,$$

(wo wir s^2 für ss schreiben).

Fügt man der Gleichung:

$$ss = 1$$

beiderseits die Verwandtschaft s^{-1} hinzu, so erhält man (wegen $ss^{-1} = 1$): $s = s^{-1}$.

Hat man umgekehrt eine Verwandtschaft $\mathfrak{A}$, für welche

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{-1}$$

ist, so folgt daraus durch beiderseitige Hinzufügung von $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A}^2 = 1 ;$$

$\mathfrak{A}$ ist also — wenn es nicht die identische Verwandtschaft ist — eine involutorische Verwandtschaft. D. h.:

Satz. *Jede involutorische Verwandtschaft ist gleich ihrer Umkehrung.*

Umkehrung. *Jede nicht identische Verwandtschaft, die ihrer Umkehrung gleich ist, ist involutorisch.*

Wenn man bedenkt, wie wichtig für alle mathematischen Operationen die Frage nach der Umkehrung ist, wie sie z. B. bei

---

Ist so einerseits Einfaches auf Weitläufigeres aufgebaut, so geht andererseits daraus hervor, dass bei Halphen die Umwendung nicht grundsätzlich als erzeugende Operation auftritt.

1) Es ist vielleicht angebracht, die »involutorische Verwandtschaft« kurz als »Spiegelung« zu bezeichnen, und zwar für gleiche räumliche Systeme zu sagen: Sp. an einer Ebene, an einem Punkt, an einer Geraden (Umwendung); für Punktepaare, die durch zwei feste Punkte harmonisch getrennt sind: Sp. am Punktepaar (harmonische Spiegelung); für eine involutorische Kreisverwandtschaft: Kreisspiegelung; ferner projective Sp. (Involution); collineare Sp. u. s. f.

2) Würden wir die Identität ebenfalls als involutorische Verwandtschaft rechnen, so wäre es unmöglich, Klassen zu bilden (wie das im VIII. Abschnitt geschieht), die z. B. aus solchen Verwandtschaften bestehen, die sich aus je zwei involutorischen zusammensetzen, ohne dass die involutorischen selbst zur Klasse gehörten (denn es wäre s die Folge von s und 1).

Digitized by Google

den arithmetischen Operationen Addition, Multiplication u. s. w. die Einführung neuer Zahlgrössen (der negativen, gebrochenen u. s. w.) nöthig macht, so erhält man einen Begriff von der Tragweite dieser Eigenschaft, welche bewirkt, dass jede solche Verwandtschaft schon selbst das leistet, was von ihrer Umkehrung verlangt wird.

Wir gehen dazu über, die Sätze des vorigen Kapitels auf die involutorischen Verwandtschaften anzuwenden.

B. Folgerungen des associativen Gesetzes.

42. Aus 34, Folgerung I erhalten wir vermittelst des vorigen Satzes:

Satz. *Kommen in einer Folge von Verwandtschaften zwei gleiche involutorische Verwandtschaften unmittelbar nach einander, so können sie weggelassen werden.*

Es ist also:

$$\mathfrak{A}\, s\, s\, \mathfrak{B} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} \quad \text{u. s. w.}$$

Ebenso ergiebt sich aus 34, Folgerung II, der

Zusatz. *Man erhält die Umkehrung einer Folge, die aus lauter involutorischen Verwandtschaften besteht, indem man ihre umgekehrte Folge bildet.*

Ist also: $$s\, t \,..\, u\, v = \mathfrak{R}\,,$$

so ist: $$v\, u \,..\, t\, s = \mathfrak{R}^{-1}\,.$$

C. Umformung der Gleichungen.

43. Fügt man in einer Gleichung:

$$s\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \text{ oder } \mathfrak{C}\, t = \mathfrak{D}$$

beiderseits die Verwandtschaft s vorn, bezw. t hinten hinzu, so wird (wegen $s^2 = 1$ und $t^2 = 1$):

$$\mathfrak{A} = s\mathfrak{B}\,, \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{D}\, t\,, \qquad \text{d. h.:}$$

Satz. *Steht in einer Gleichung von Verwandtschaften auf der einen Seite am Anfang — oder am Ende — eine involutorische Verwandtschaft, so kann sie von da auf die andere Seite an den Anfang — bezw. das Ende — hinübergeschrieben werden.*

Digitized by

D. Die Ueberführung und die harmonischen Verwandtschaften.

44. Bei der Allgemeinheit und grundlegenden Einfachheit der vorigen Betrachtungen ist zu vermuthen, dass diejenigen Begriffe, die sich aus ihnen unmittelbar ergeben, von besonderer Wichtigkeit sein müssen. Das bestätigt sich bei dem Begriff, den wir jetzt ableiten wollen, nämlich bei dem der *harmonischen Verwandtschaften* [1]), welcher in der Geometrie von weittragender Bedeutung ist.

Nehmen wir an, es sei irgend eine Verwandtschaft $\mathfrak{A}$ gegeben, so können wir irgend eine involutorische Verwandtschaft s mit ihr zusammensetzen; d. h. wir bilden eine neue Verwandtschaft $\mathfrak{B}$, welche bestimmt ist durch:

$$s\mathfrak{A} = \mathfrak{B} ,$$

woraus dann folgt (43.):

$$\mathfrak{A} = s\mathfrak{B} .$$

Dadurch haben wir eine Beziehung zwischen den beiden Verwandtschaften $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erhalten, welche *wechselseitig* ist, indem $\mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{A}$ auf dieselbe Weise folgt, wie $\mathfrak{A}$ aus $\mathfrak{B}$.

Aus den beiden Gleichungen folgt (35, Zusatz I):

$$s = \mathfrak{B}\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1} .$$

Diese letzte Gleichung lässt sich (35, Zusatz III) in vier verschiedenen Weisen auf die Form bringen, dass auf der einen Seite die Identität steht:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1} = 1 , \quad \mathfrak{B}\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B}\mathfrak{A}^{-1} = 1 ,$$
$$\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B}\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B} = 1 , \quad \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A} = 1 ,$$

oder [2]):

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1})^2 = 1 , \ (\mathfrak{B}\mathfrak{A}^{-1})^2 = 1 , \ (\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B})^2 = 1 , \ (\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A})^2 = 1 .$$

---

1) Der Name ist daher genommen, dass wenn zwei Punktepaare harmonisch sind, die beiden Involutionen, deren Doppelpunkte sie sind, die oben abgeleitete Eigenschaft besitzen.

2) Diese Beziehungen hat C. Stephanos [Math. Ann. XXII 320 (1883)] für Projectivitäten aufgestellt und C. Segre (Journ. f. Math. C 316—330) zur Bildung der Büschel von Projectivitäten verwandt. Diese letztere Arbeit war nicht ohne Einfluss auf die Gestaltung der oben entwickelten Analysis.

»Harmonisch« ist für Projectivitäten identisch mit »apolar«, sonst aber sind es verschiedene Begriffe.

Digitized by Google

Erklärung. *Wir nennen zwei von einander verschiedene Verwandtschaften* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *zu einander harmonisch, wenn eine der Gleichungen gilt:*

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1})^2 = 1\,, \quad (\mathfrak{B}\mathfrak{A}^{-1})^2 = 1\,, \quad (\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B})^2 = 1\,, \quad (\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A})^2 = 1\,.$$

Aus jeder dieser Gleichungen folgen die drei übrigen.

Die Voraussetzung der Verschiedenheit der beiden Verwandtschaften können wir schreiben:

$$\mathfrak{A} \neq \mathfrak{B}\,,$$

oder:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1} \neq 1\,, \quad \mathfrak{B}\mathfrak{A}^{-1} \neq 1\,, \quad \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B} \neq 1\,, \quad \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A} \neq 1\,.$$

So erhalten wir als *Bedingungen der harmonischen Beziehung:*

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1})^2 = 1\,, \quad \mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1} \neq 1 \quad \text{u. s. w.}$$

Nun folgt aus diesen beiden letzten Formeln auch umgekehrt, dass die Verwandtschaft $\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}$ involutorisch, also ihrer Umkehrung $\mathfrak{B}\mathfrak{A}^{-1}$ gleich sei, und dasselbe gilt von $\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B}$ und ihrer Umkehrung $\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}$. Jene haben wir mit s bezeichnet, diese können wir s' nennen, d. h.:

$$s = \mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}^{-1}\,,$$
$$s' = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}\,.$$

Daraus folgt (35, Zusatz I):

$$\mathfrak{B} = s\mathfrak{A} = \mathfrak{A}s'\,,$$
$$\mathfrak{A} = s\mathfrak{B} = \mathfrak{B}s'\,.$$

Diese Gleichungen sagen nun aus (36.), dass durch die Verwandtschaft $\mathfrak{A}$ sowohl, wie durch $\mathfrak{B}$, die involutorische Verwandtschaft s in s' übergeführt werde.

Satz. *Sind zwei Verwandtschaften* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *harmonisch, so giebt es eine involutorische Verwandtschaft* s, *welche sowohl durch* $\mathfrak{A}$, *wie durch* $\mathfrak{B}$ *in eine und dieselbe involutorische Verwandtschaft* s' *übergeführt wird.*

45. **Satz.** *Sind* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *harmonische Verwandtschaften, so sind auch* $\mathfrak{C}\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{C}\mathfrak{B}$ *und ebenso* $\mathfrak{A}\mathfrak{D}$ *und* $\mathfrak{B}\mathfrak{D}$ *harmonisch, wo* $\mathfrak{C}$ *und* $\mathfrak{D}$ *beliebige weitere Verwandtschaften sind* [1].

Denn es ist:

$$(\mathfrak{C}\mathfrak{A})^{-1}(\mathfrak{C}\mathfrak{B}) = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{C}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B}\,,$$

---

1) Vgl. Segre a. a. O. Art. 1.

Digitized by Google

also, da: $(\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B})^2 = 1\ ,\quad \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B} \neq 1\ ,$

$((\mathfrak{C}\mathfrak{A})^{-1}(\mathfrak{C}\mathfrak{B}))^2 = 1\ ,\quad (\mathfrak{C}\mathfrak{A})^{-1}(\mathfrak{C}\mathfrak{B}) \neq 1\ ,$

(vgl. 38, Anmerkung) und ebenso:

$((\mathfrak{A}\mathfrak{D})(\mathfrak{B}\mathfrak{D})^{-1})^2 = 1\ ,\quad (\mathfrak{A}\mathfrak{D})(\mathfrak{B}\mathfrak{D})^{-1} \neq 1\ .$

46. **Satz.** *Durch jede Verwandtschaft geht eine involutorische Verwandtschaft in eine involutorische, zwei harmonische Verwandtschaften in zwei harmonische über*[1]).

Denn geht durch irgend eine Verwandtschaft s in $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ über, so gehen (38.) die Formeln:

$$s^2 = 1\ ,\quad s \neq 1 \quad \text{und} \quad (\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1})^2 = 1\ ,\quad \mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1} \neq 1$$

über in:

$$\mathfrak{S}'^2 = 1\ ,\quad \mathfrak{S}' \neq 1 \quad \text{und} \quad (\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'^{-1})^2 = 1\ ,\quad \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'^{-1} \neq 1\ ,$$

was (nach 41. und 44.) sich mit der Aussage des Satzes deckt.

E. Vertauschbarkeit.

47. Sind zwei involutorische Verwandtschaften t und u vertauschbar, d. h. ist:

$$tu = ut\ ,$$

so wird (43.): $(tu)^2 = 1\ ,$

oder (41.): $(tu^{-1})^2 = 1\ ,$

d. h. es sind, wenn t von u verschieden ist, t und u zu einander harmonisch.

Sind umgekehrt t und u harmonische involutorische Verwandtschaften, so ist:

$$(tu^{-1})^2 = (tu)^2 = 1\ ,$$

also: $tu = ut\ ,$ d. h.:

Satz. *Zwei von einander verschiedene vertauschbare involutorische Verwandtschaften sind harmonisch. Und umgekehrt: zwei harmonische involutorische Verwandtschaften sind vertauschbar.*

48. Wegen

$$(tu)^2 = 1\ ,\quad tu \neq 1$$

---

1) Es sind also die involutorische und die harmonische Eigenschaft jeder beliebigen Verwandtschaft gegenüber *invariant*.

Digitized by Google

ist die Folge tu selbst eine involutorische Verwandtschaft, wir nennen sie s und haben:

$$tu = s\,, \quad stu = 1\,,$$

was man auch schreiben kann (35, Zusatz III):

$$\begin{aligned} stu &= 1\,, \quad uts = 1\,,\\ tus &= 1\,, \quad sut = 1\,,\\ ust &= 1\,, \quad tsu = 1\,. \end{aligned}$$

Daraus bestimmen sich s, t, u:

$$\begin{aligned} s &= tu = ut\,,\\ t &= us = su\,,\\ u &= st = ts\,, \end{aligned}$$ d. h.:

Satz. *Zwei vertauschbare involutorische Verwandtschaften und ihre Folge bilden drei involutorische Verwandtschaften, von denen jede die Folge der beiden andern ist, und jede mit jeder vertauschbar, also jede zu jeder harmonisch ist.*

Aus den letzten Gleichungen, sowie aus:

$$s^2 = 1\,, \quad t^2 = 1\,, \quad u^2 = 1$$

folgt, dass drei solche Verwandtschaften zusammen mit der Identität eine *Gruppe* bilden, worunter eine Gesammtheit von Verwandtschaften verstanden ist, von der Art, dass die Folge von irgend zweien derselben wieder der Gesammtheit angehört.

VIII. Klassen und Gruppen von Verwandtschaften, deren jede eine Folge von involutorischen Verwandtschaften ist.

49. Um die bisher abgeleiteten allgemeinen Sätze für einzelne Gebiete der Geometrie fruchtbar werden zu lassen, können wir nicht mehr bei der Annahme beharren, dass die zu betrachtenden Verwandtschaften ganz beliebige sein sollen, sondern wir müssen uns Beschränkungen auferlegen, durch welche wir zu gewissen abgegrenzten Klassen von Verwandtschaften gelangen.

Wir begrenzen unsere Aufgabe gemäss des in 40. aufgestellten Grundsatzes so:

Wir wollen uns auf die Theorie derjenigen Klassen von Verwandtschaften beschränken, in welchen sich jede einzelne als Folge von involutorischen Verwandtschaften darstellt.

Digitized by Google

a) Zu solchen Klassen von Verwandtschaften gelangen wir am leichtesten, wenn wir von einer bestimmten Klasse von involutorischen Verwandtschaften ausgehen, und aus ihnen Folgen bilden.

Würden wir nun aus je zwei, aus je drei u. s. w. der gegebenen involutorischen Verwandtschaften wieder neue Verwandtschaften bilden, so würden wir eine unendliche Anzahl von neuen Klassen zusammengesetzter Verwandtschaften bekommen. Soll sich diese Anzahl nicht ins Unendliche steigern, so müssen wir noch eine weitere Annahme machen:

Wir setzen voraus, dass wir nur bis zu einer gewissen Anzahl von Gliedern, die in eine Folge von involutorischen Verwandtschaften eintreten, neue Verwandtschaften bekommen, dass aber jede grössere Anzahl sich auf eine geringere Anzahl zurückführen lässt.

Ein Beispiel dazu haben wir in den aus Umwendungen zusammengesetzten Bewegungen kennen gelernt, bei welchen jede beliebige Folge von Umwendungen sich auf die Folge von zweien zurückführen lässt. Da auch jede einzelne Umwendung sich in eine Folge von zweien zerlegen lässt, haben wir hier nur eine einzige Klasse von Verwandtschaften.

Weitere Beispiele.

Die involutorische Verwandtschaft, von der wir ausgehen, sei die Spiegelung eines räumlichen Systems an einem Punkt:

Ein System Σ_1 heisst an einem Punkt S in ein System Σ_2 gespiegelt, wenn für je zwei entsprechende Punkte A_1 und A_2 der beiden Systeme die Streckengleichung gilt: $\overline{A_1 S} = \overline{S A_2}$.

Die Verwandtschaft ist involutorisch, da ihre Wiederholung A_2 wieder in A_1 überführt.

Wir wollen alle Verwandtschaften bilden, die aus der Folge von 2, 4, .. $2n$ oder (anderes Beispiel) von 1, 3, ... $2n-1$ dieser Spiegelungen bestehen.

Bilden wir zuerst die Folge der Spiegelung am Punkte S und derjenigen am Punkte T, d. h., wenn wir die Verwandtschaft mit demselben Zeichen wie den Spiegelpunkt belegen, die Folge $S\,T$. Für jeden Punkt A_1 erhält man den entsprechenden Punkt A_2 aus:

$$A_1 \{S\,T\} A_2$$

oder:

$$A_1 \{S\} A_{12} \{T\} A_2 .$$

Es ist also:

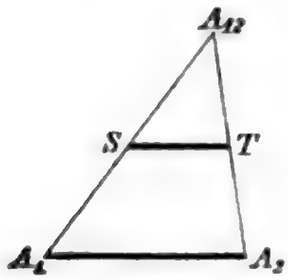
$$\overline{A_1 S} = S A_{12}, \quad \overline{A_{12} T} = \overline{T A_2},$$

Digitized by Google

daher:

$$\overline{A_1 A_2} = \overline{A_1 S} + \overline{S A_{12}} + \overline{A_{12} T} + \overline{T A_2} = 2\overline{S A_{12}} + 2\overline{A_{12} T} = 2\overline{S T};$$

d. h.:



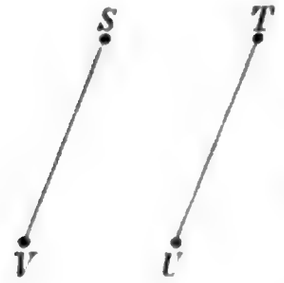
Satz. *Die Folge der Spiegelungen an zwei Punkten S, T ist gleich einer Verschiebung um die doppelte Strecke* $\overline{S T}$.

Umkehrung. *Jede Verschiebung eines räumlichen Systems um eine Strecke a ist gleich der Folge der Spiegelungen an zwei Punkten S, T, von welchen der eine ganz beliebig gewählt werden kann.*

Der andere ist dann aus der Gleichung $2\overline{S T} = a$ zu bestimmen.

Zusatz. *Eine Folge von Spiegelungen an zwei Punkten S, T ist gleich einer solchen an S' T', d. h. es gilt die Verwandtschaftsgleichung:*

$$S T = S' T',$$



wenn die Streckengleichung gilt:

$$\overline{S T} = \overline{S' T'}.$$

Bilden wir nun die Folge von *drei* solchen Spiegelungen $S T U$, so bestimme man den Punkt V so, dass:

$$T U = S V \quad \text{d. h.} \quad \overline{T U} = \overline{S V},$$

und erhält so die Verwandtschaftsgleichung:

$$S T U = S S V = V.$$

Daraus folgt:

Jede Folge einer ungeraden bezw. geraden Anzahl von Spiegelungen eines räumlichen Systems an Punkten ist gleich einer solchen Spiegelung bezw. gleich der Folge von zweien.

Wir haben so zwei Beispiele gewonnen, in welchen es nur je eine Klasse von Verwandtschaften giebt.

Verlangen wir (weiteres Beispiel) die Klasse von Verwandtschaften zu bestimmen, die sich aus einer beliebigen Anzahl von Spiegelungen an Punkten bilden lassen, so finden wir, dass dieselbe in zwei Unterklassen zerfällt, nämlich in die beiden Klassen der vorigen Beispiele.

b) Statt von den involutorischen Verwandtschaften auszugeben, und von da zu den allgemeineren zu gelangen, können wir auch den umgekehrten Weg machen:

Liegt uns irgend eine bestimmte Klasse von Verwandtschaften vor, so haben wir zuerst zu untersuchen, ob es möglich ist, jede dieser Verwandtschaften als Folge von involutorischen Verwandtschaften aufzufassen [1]).

---

1) Dies ist oft auf verschiedene Weisen möglich. So kann jede ebene Collineation als Folge von zwei quadratischen involutorischen Verwandtschaften, oder als Folge von drei involutorischen Collineationen aufgefasst

Digitized by Google

50. Auf die erst geschilderte Weise kommen wir zu abgegrenzten Klassen von Verwandtschaften; bilden wir aber wieder aus ihnen Folgen, so können daraus wieder neue Klassen entstehen. So erhielten wir eine Klasse von Verwandtschaften, die jede Folge einer ungeraden Anzahl von Spiegelungen an Punkten enthielt; bilden wir aber die Folge zweier solcher, so erhalten wir eine Verwandtschaft, die der Klasse nicht mehr angehört.

Um auch hier eine Grenze zu setzen, machen wir die weitere Annahme:

Wir wollen vorzüglich solche Klassen von Verwandtschaften, die aus involutorischen zusammengesetzt sind, betrachten, bei welchen die Folge von je zweien stets wieder eine Verwandtschaft der Klasse ergiebt.

Eine dieser letzteren Bedingung genügende Klasse nennt man eine *Gruppe von Verwandtschaften*[1].

Als Beispiele kann die Klasse der Bewegungen, und die Gesammtheit der Verwandtschaften dienen, welche aus Folgen von einer beliebigen Anzahl von Spiegelungen an Punkten bestehen.

Es wäre wünschenswerth, noch weitere Beispiele dafür anzuführen, um daraus erkennen zu lassen, wie die gewonnenen Grundsätze dazu dienen, die verschiedenartigsten Gebiete der geometrischen Forschung theils unter gemeinsamem Gesichtspunkt zusammenzufassen, theils in ihren wechselseitigen Beziehungen zu durchschauen. Doch halte ich es für zweckmässiger, diese Beispiele — in den folgenden Arbeiten — ausführlicher zu behandeln, und so die allgemeinen Betrachtungen hier abzubrechen.

---

werden. Besonders wichtig sind die Zerlegungen, bei welchen (wie bei der letzteren) die involutorische Verwandtschaft selbst zu der betrachteten Klasse gehört.

1) Zu jeder Verwandtschaft einer Gruppe kann man sehr leicht die Gesammtheit der harmonischen Verwandtschaften finden (und zwar jede nur einmal), indem man sie mit jeder involutorischen Verwandtschaft der Gruppe zu einer Folge verbindet (oder auch, indem man alle umgekehrten Folgen bildet).

So findet man z. B. zu jeder räumlichen Collineation zweierlei harmonische Collineationen, da es (vgl. Möbius und v. Staudt a. a. O.) zweierlei involutorische Collineationen giebt, und zwar, wie man leicht sieht, ∞^6 der einen, ∞^8 der anderen Art.

Digitized by Google

M. Krause, *Ueber die Differentialgleichungen, denen die doppelt periodischen Functionen zweiter Art Genüge leisten.* II.

In zwei früheren Notizen[1]), von denen die letzte die gleiche Ueberschrift wie die vorliegende hat, ist erstens eine Methode angegeben worden, wie man unendlich viele Differentialgleichungen aufstellen kann, denen doppelt periodische Functionen zweiter Art Genüge leisten und zweitens ist die Anwendbarkeit derselben an einigen Beispielen gezeigt. Es soll nun dazu übergegangen werden, in systematischer Weise die Gleichungen zu entwickeln, die man auf Grund der vorliegenden Methode integriren kann. Hierbei soll von solchen mehr principiellen Betrachtungen, wie sie in den Arbeiten der Herrn Picard[2]) und Floquet[3]) vorkommen, zunächst abgesehen werden, es soll vielmehr der Schwerpunkt der Untersuchungen auf die wirkliche Herstellung von Gleichungen gelegt werden, die mit Hülfe unserer Functionen integrirt werden können. Derartige Probleme sind in den letzten Jahren von den Herren Hermite, Brioschi, Mittag-Leffler u. A. behandelt worden. Es möge vor Allem auf das Werk von Herrn Hermite »Sur quelques applications des fonctions elliptiques, Paris 1885« und auf eine Arbeit von Herrn Mittag-Leffler verwiesen werden, die sich im 11. Bande der Annali di Matematica vorfindet. Mit den Untersuchungen der

1) Diese Berichte, Sitzung vom 4. März 1889, 3. März 1890.

2) Mémoire sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques. Crelle 90.

3) Sur les équations différentielles linéaires à coefficients periodiques. Annales de l'école normale 2, XII und 3, I.

Digitized by Google

genannten Herren berühren sich die folgenden in einigen Punkten, wenngleich der Ausgangspunkt und die angewandten Methoden andere sind. Es soll in einigen Notizen versucht werden, erstens die schon aufgestellten Typen integrirbarer Differentialgleichungen auf Grund unserer Methoden zu entwickeln und zweitens eine Reihe neuer, wichtiger Typen hinzuzufügen.

Die Gesichtspunkte, die für die Untersuchung massgebend sind, sind die folgenden:

Die doppelt periodischen Functionen zweiter Art können erstens nach der Zahl der von einander verschiedenen Unendlichkeitspunkte eingetheilt werden. Wir beschränken uns zunächst auf diejenigen Functionen, die nur eine Unendlichkeitsstelle besitzen. Diese kann dann beliebig gewählt werden. Wir wählen sie gleich der Nullstelle von $\vartheta_0(v)$. Dann kann die Frage so präcisirt werden, es sollen alle linearen Differentialgleichungen aufgestellt werden, denen die Functionen:

$$\frac{\vartheta_1(v+a_1)\cdots\vartheta_1(v+a_n)\,e^{\lambda v}}{\vartheta_0(v)^n}$$

Genüge leisten.

Diese Differentialgleichungen wiederum können nach den Ordnungszahlen eingetheilt werden. Die Untersuchung wird sich darauf zu richten haben, der Reihe nach alle Differentialgleichungen erster, zweiter, dritter etc. Ordnung der verlangten Art aufzustellen. Wir wollen in der folgenden Notiz uns auf die Differentialgleichungen zweiter Ordnung beschränken. Drittens wird die weitere Eintheilung nach der Zahl der Unendlichkeitspunkte vorzunehmen sein, die die Coefficienten besitzen. Wir werden erstens alle diejenigen Differentialgleichungen aufzustellen haben, deren Coefficienten nur den Unendlichkeitspunkt des vorgelegten Integrales als Unendlichkeitspunkt besitzen, dann solche, die daneben noch 1, 2, $\cdots m$ Unendlichkeitspunkte anderer Art besitzen. Im letzteren Falle beschränken wir uns zunächst auf die Gleichungen, deren Integrale einen einfachen Unendlichkeitspunkt besitzen.

Viertens werden wir die Differentialgleichungen nach der Natur der übrigen Integrale zu classificiren haben und zwar werden die Gesichtspunkte derart sein, dass wir annehmen, alle andern Integrale haben die Form des vorgelegten, zweitens

Digitized by Google

dasselbe ist nicht der Fall. Wir beschränken uns zunächst auf den ersten Fall.

Hiermit sind die Gesichtspunkte aufgestellt, die es erlauben, in systematischer Weise die Mannigfaltigkeit der möglichen Gleichungen zu untersuchen.

§ 1.

Aufstellung aller Differentialgleichungen 2. Ordnung, deren Integrale einen n-fachen Unendlichkeitspunkt haben, welcher zu gleicher Zeit der einzige Unendlichkeitspunkt der Coefficienten ist.

Um zu den in der Ueberschrift charakterisirten Differentialgleichungen zu gelangen, haben wir die Function zu betrachten:

$$(1.) \qquad \varphi(v) = \frac{\vartheta_1(v+a_1)\cdots\vartheta_1(v+a_n)}{\vartheta_0(v)^n}\cdot e^{\lambda v}$$

und sämmtliche Differentialgleichungen 2. Ordnung zu bilden, deren Coefficienten nur im Punkte $v = \frac{\tau}{2}$ unendlich gross werden.

Dann folgt, dass der Coefficient von:

$$\frac{(v)\varphi^2 d}{dv^2}$$

lediglich eine Potenz von $\vartheta_0(v)$ sein kann, denn wenn noch andere Factoren auftreten würden, so würden wir zu Differentialgleichungen gelangen, deren Coefficienten im Allgemeinen noch für andere Punkte verschwinden. Wir haben also behufs Bildung der vorgeschriebenen Differentialgleichungen die Ausdrücke zu Grunde zu legen:

$$\vartheta_0(v)^k \cdot \frac{d^2\varphi(v)}{dv^2},$$

wobei k jedenfalls grösser als $n+2$ sein muss.

Es ist nun leicht zu sehen, dass die kleinste Zahl k, für welche eine Differentialgleichung 2. Ordnug existirt, gleich $2n+1$ ist.

Dann haben alle gesuchten Differentialgleichungen die Form:

$$\vartheta_0(v)^{2n+1}\cdot\frac{d^2\varphi(v)}{dv^2} + f_1(v)\cdot\vartheta_0(v)^{n+1}\cdot\frac{d\varphi(v)}{dv} = \vartheta_0(v)^n\cdot\varphi(v)\cdot f_2(v),$$

Digitized by Google

wobei $f_1(v)$ die allgemeinste ganze doppeltperiodische Function dritter Art von der Ordnungszahl n, $f_2(v)$ die allgemeinste ganze doppeltperiodische Function dritter Art von der Ordnungszahl $n+1$ ist, vorausgesetzt, dass sie im Uebrigen denselben Bedingungsgleichungen Genüge leisten, wie

$$\vartheta_0(v)^{2n+1} \cdot \frac{d^2\varphi(v)}{dv^2} ,$$

nachdem sie mit $\vartheta_0(v)^{n+1} \cdot \frac{d\varphi(v)}{dv}$ resp. $\vartheta_0(v)^n \cdot \varphi(v)$ multiplicirt sind.

Dann aber lässt sich $f_1(v)$ linear aus n beliebigen Functionen derselben Art zusammensetzen, wenn dieselben nur linear von einander unabhängig sind und dasselbe gilt von $f_2(v)$, wenn wir nur an Stelle von n: $n+1$ setzen. Im Uebrigen ist die Wahl der Functionen willkürlich und es ist klar, dass, wenn wir das Problem für *ein* System gelöst haben, dass wir es dann von selbst für alle möglichen Systeme gelöst haben. Es folgt das unmittelbar aus den einfachsten Principien der Transformationstheorie.

Wir wählen nun die folgenden Functionen:

$$f_1(v) = \sum c_k \cdot \vartheta_0(v)^{n-2k} \cdot \vartheta_1(v)^{2k}$$
$$+ \vartheta_1(v) \cdot \vartheta_2(v) \cdot \vartheta_3(v) \sum d_l \cdot \vartheta_0(v)^{n-2l-3} \cdot \vartheta_1(v)^{2l} ,$$
$$f_2(v) = \sum c_k' \cdot \vartheta_0(v)^{n+1-2k} \cdot \vartheta_1(v)^{2k}$$
$$+ \vartheta_1(v) \cdot \vartheta_2(v) \cdot \vartheta_3(v) \cdot \sum d_l' \cdot \vartheta_0(v)^{n-2l-2} \cdot \vartheta_1(v)^{2l} ,$$

wobei die Summen in bekannter Weise zu erstrecken sind.

Mithin finden wir als Typus aller gesuchten Differentialgleichungen die Gleichung:

$$(2.) \quad \frac{d^2\varphi(v)}{dw^2} + \left[\sum c_k \cdot \mathrm{sn}^{2k} w + \mathrm{cn}\, w \cdot \mathrm{dn}\, w \sum d_l \cdot \mathrm{sn}^{2l} w\right] \frac{d\varphi(v)}{dw}$$
$$= \varphi(v)\left[\sum c_k' \cdot \mathrm{sn}^{2k} w + \mathrm{sn}\, w \cdot \mathrm{cn}\, w \cdot \mathrm{dn}\, w \sum d_l' \cdot \mathrm{sn}^{2l} w\right] .$$

Nun soll aber ein zweites vom ersten linear unabhängiges Integral dieselbe Form wie das erste haben. Dann folgt aus den einfachsten Principien der Theorie der Differentialgleichungen, dass der Factor von $\frac{d\varphi(v)}{dw}$ im Unendlichkeitspunkte höchstens von

Digitized by Google

der Ordnungszahl 1, der Factor von $\varphi(v)$ höchstens von der Ordnungszahl 2 unendlich gross werden kann. Mithin erhalten wir als Typus die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\varphi(v)}{dw^2} + c_1 \cdot \frac{d\varphi(v)}{dw} = \varphi(v)\,(c_0' + c_1' \cdot \mathrm{sn}^2 w) \ .$$

Zu genau demselben Resultate wären wir gelangt, wenn wir k grösser als $2n+1$ gewählt hätten.

Durch richtige Wahl von λ können wir ferner c_1 zum Verschwinden bringen.

Unter solchen Umständen finden wir den bekannten:

Lehrsatz. *Als einzige Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche den sämmtlichen in der Ueberschrift aufgestellten Bedingungen Genüge leistet, kann die Lamé'sche angesehen werden.*

§ 2.

Aufstellung aller Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Integrale einen einfachen Unendlichkeitspunkt haben, während die Coefficienten noch einen zweiten einfachen Unendlichkeitspunkt besitzen.

Wir wollen nun das Problem des vorigen Paragraphen dahin verallgemeinern, dass wir die Annahme hinzufügen, dass die Coefficienten ausser dem ursprünglichen Unendlichkeitspunkte noch weitere besitzen. Das Problem ist in seiner allgemeinen Form ein schweres. Wir wollen zunächst den Fall $n = 1$ ins Auge fassen, d. h. annehmen, dass die vorgelegte Function lautet:

$$(1.) \qquad \varphi(v) = \frac{\vartheta_1(v+\omega_1)}{\vartheta_0(v)} \cdot e^{\lambda w} \ ,$$

und für diesen Fall die verschiedenen Möglichkeiten untersuchen. Erstens können nun die Coefficienten noch einen und nur einen zweiten Unendlichkeitspunkt besitzen, den wir von der ersten Ordnung annehmen. Es möge dieses der Punkt sein:

$$v = a + \frac{\tau}{2} \quad \text{oder} \quad w = -\alpha + iK' \ .$$

Dann folgt ganz analog wie im vorigen Paragraphen, dass wir zur Bildung dieser Gleichungen den Ausdruck zu Grunde legen müssen:

Digitized by Google

$$\vartheta_0(v+a)\cdot\vartheta_0(v)^3\cdot\frac{d^2\varphi(v)}{dv^2}$$

und dass die gesuchten Gleichungen die Form haben:

$$\vartheta_0(v+a)\cdot\vartheta_0(v)^3\cdot\frac{d^2\varphi(v)}{dv^2}+f_2(v)\cdot\vartheta_0(v)^2\frac{d\varphi(v)}{dv}=\varphi(v)\cdot f_3(v)\cdot\vartheta_0(v)\,,$$

wobei $f_2(v)$ und $f_3(v)$ wieder ganze transcendente Functionen bekannter Art sind, die zwei resp. drei unbekannte Constanten linear in sich enthalten. In der Form dieser Functionen herrscht wieder Mannigfaltigkeit und es ist zur Charakterisirung unserer Gleichungen vollkommen genügend, *eine* bestimmte Form herauszugreifen. Wir setzen:

$$f_2(v)=c_1'\cdot\vartheta_0(v)\cdot\vartheta_0(v+a)+c_2'\cdot\vartheta_1(v)\cdot\vartheta_1(v+a)\,,$$
$$f_3(v)=c_3'\cdot\vartheta_0(v)^2\cdot\vartheta_0(v+a)+c_4'\cdot\vartheta_0(v)\cdot\vartheta_1(v)\cdot\vartheta_1(v+a)$$
$$+c_5'\cdot\vartheta_1^2(v)\cdot\vartheta_0(v+a)\,,$$

so erhalten wir die Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$(2.)\qquad\frac{d^2\varphi(v)}{dw^2}+(c_1+c_2\cdot k^2\cdot\operatorname{sn}w\cdot\operatorname{sn}(w+\alpha))\frac{d\varphi(v)}{dw}$$
$$=\varphi(v)\,(c_3+c_4\cdot k^2\cdot\operatorname{sn}w\cdot\operatorname{sn}(w+\alpha)+c_5\cdot k^2\cdot\operatorname{sn}^2w)\,.$$

Die Grössen $c_1, c_2 \ldots c_5$ sind einstweilen unbekannte Constanten. Zwischen ihnen müssen vier und nur vier Bedingungsgleichungen bestehen, da die zu Grunde gelegte Function:

$$\vartheta_0(v+a)\cdot\vartheta_0(v)^3\cdot\frac{d^2\varphi(v)}{dv^2}$$

von der Ordnungszahl 4 ist und daher sich durch *vier* andere richtig gewählte linear darstellen lassen muss. Die vier Bedingungsgleichungen ergeben sich am Einfachsten, wenn wir um den Punkt $w=iK'$ und $w=-\alpha+iK'$ herum entwickeln und die Coefficienten der negativen Potenzen links und rechts einander gleich setzen. Wir wollen nun setzen:

$$\varphi(v)=\frac{\vartheta_1(v+\omega_1)}{\vartheta_0(v)}\,e^{-\frac{\vartheta_0'(\omega_1)}{\vartheta_0(\omega_1)}w+\lambda w}=\varphi_1(v)\cdot e^{\lambda w}$$

Digitized by Google

Wir sind hierzu berechtigt, indem wir ja λ beliebig wählen können. Dann können wir die Differentialgleichung schreiben:

$$\frac{d^2\varphi_1(v)}{dw^2} + (c_1 + 2\lambda + c_2 \cdot k^2 \cdot \operatorname{sn} w \cdot \operatorname{sn}(w+\alpha)) \frac{d\varphi_1(v)}{dw}$$

$$= \varphi_1(v)(-\lambda^2 - \lambda \cdot c_1 + c_3 + (c_4 - c_2\lambda)k^2 \cdot \operatorname{sn} w \cdot \operatorname{sn}(w+\alpha) + c_5 \cdot k^2 \operatorname{sn}^2 w).$$

Nun ist bekanntlich:

$$\frac{1}{\operatorname{sn} w} = \frac{1}{w} + \frac{1+k^2}{6} w + \cdots ,$$

$$\frac{1}{\operatorname{sn} w \cdot \operatorname{sn}(w+\alpha)} = \frac{1}{w}\frac{1}{\operatorname{sn}\alpha} - \frac{\operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}^2\alpha} + \left(\frac{1}{\operatorname{sn}^3\alpha} - \frac{(1+k^2)}{3 \cdot \operatorname{sn}\alpha}\right) w + \cdots ,$$

mithin ergeben sich, wie eine einfache Rechnung lehrt, die Gleichungen:

$$(3.) \qquad 2 - \frac{c_2}{\operatorname{sn}\alpha} = c_5 ,$$

$$(4.) \qquad c_1 + 2\lambda = c_2 \frac{\operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}^2\alpha} - \frac{c_4 - c_2\lambda}{\operatorname{sn}\alpha} ,$$

$$(5.) \qquad c_1 + 2\lambda = -c_2 \cdot k^2 \cdot \operatorname{sn}\omega \cdot \operatorname{sn}(\omega - \alpha) ,$$

$$(6.) \qquad c_2 \left(\frac{1}{\operatorname{sn}^3\alpha} + \frac{1}{2\operatorname{sn}\alpha}(k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\omega - 1 - k^2)\right)$$

$$= -c_3 + \lambda^2 + \lambda c_1 + \frac{c_4 - c_2\lambda}{\operatorname{sn}^2\alpha} \operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha + \frac{c_5}{2}(k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\omega - 1 - k^2) .$$

Nun sind zwei Fälle möglich. Entweder sind die Grössen λ, die zu den beiden Integralen gehören, einander gleich oder nicht. Im ersten Falle muss nun im Allgemeinen $c_2 = 0$ sein.

In der That, wäre dasselbe nicht der Fall, so müssten die beiden Grössen ω und ω', die zu den beiden Integralen gehören, den Relationen Genüge leisten:

$$A = \operatorname{sn}\omega \cdot \operatorname{sn}(\omega - \alpha) = \operatorname{sn}\omega' \cdot \operatorname{sn}(\omega' - \alpha) ,$$

wobei A eine *eindeutig* fixirte Grösse ist. Andererseits ist aber aus (6.) $\operatorname{sn}^2\omega$ eindeutig bestimmt. Es führt das im Allgemeinen zu einem Widerspruch, der nur so gelöst werden kann, dass $c_2 = 0$ angenommen wird. Dann würde weiter folgen:

Digitized by Google

$$c_1 + 2\lambda = 0 , \quad c_4 = 0$$

d. h. der Unendlichkeitspunkt $-\alpha + iK'$ fällt in diesem Falle einfach heraus, so dass wir keine neue Gleichung erhalten.

Wir sind also berechtigt anzunehmen, dass die beiden Werthe von λ von einander verschieden sein müssen.

Dann aber folgt aus Gleichung (4.), dass sein muss:

$$c_4 = 2\,\mathrm{sn}\,\alpha ,$$

also nach Gleichung (3.).

$$c_5 = 0 ,$$

ferner folgt aus Gleichung (4.)

$$c_1 = 2 \cdot \frac{\mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha}{\mathrm{sn}\,\alpha} - \frac{c_4}{\mathrm{sn}\,\alpha} .$$

Nun können wir aber ferner, ohne der Allgemeinheit Abbruch zu thun, annehmen, dass $c_1 = 0$ ist. In der That wenn wir für diesen Fall das Problem gelöst haben, so haben wir es im Allgemeinen auch gelöst, da wir nur nöthig haben, die Integrale mit einem Factor $e^{\lambda w}$ zu multipliciren.

Unter solchen Umständen gestalten sich unsere Gleichungen folgendermassen:

$$(7.) \quad \begin{cases} c_1 = 0, \; c_2 = 2\,\mathrm{sn}\,\alpha, \; c_4 = 2\,\mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha, \; c_5 = 0 , \\ 2\lambda = -2k^2 \cdot \mathrm{sn}\,\alpha \cdot \mathrm{sn}\,\omega \cdot \mathrm{sn}(\omega - \alpha) , \\ 2\,\mathrm{sn}\,\alpha \left(\frac{1}{\mathrm{sn}^3\alpha} + \frac{1}{2\,\mathrm{sn}\,\alpha} (k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\omega - 1 - k^2) \right) \\ = \lambda^2 - c_3 + 2 \cdot \frac{\mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha - \mathrm{sn}\,\alpha \cdot \lambda}{\mathrm{sn}^2\alpha} \cdot \mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha . \end{cases}$$

Die letzte Gleichung können wir schreiben:

$$\left(\lambda - \frac{\mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha}{\mathrm{sn}^2\alpha} \right)^2 - k^2\,\mathrm{sn}^2\omega = c_3 - \frac{\mathrm{cn}^2\alpha \cdot \mathrm{dn}^2\alpha}{\mathrm{sn}^2\alpha} + \frac{2}{\mathrm{sn}^2\alpha} - 1 - k^2 = C,$$

wie wir die rechte Seite kurz bezeichnen wollen.

Es nimmt dieselbe eine besonders einfache Form an, wenn wir setzen:

$$\omega = u + \alpha .$$

Digitized by Google

Es ergiebt sich bei dieser Substitution nach einigen leichten Rechnungen die Form:

$$(8.) \qquad k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\alpha \cdot \mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2\alpha\,(1 + k^2 - C) + 1 = 0 \ .$$

Wir erhalten also eine lineare Gleichung mit der Unbekannten $\mathrm{sn}^2 u$. Aus derselben sind die beiden Werthe u und damit die beiden Werthe ω bestimmt, die zu den beiden Integralen der vorgelegten Differentialgleichung gehören. Die Werthe u unterscheiden sich von einander um das Vorzeichen, die Werthe w haben die Form $\alpha \pm u$. Die beiden Werthe λ, die zu diesen beiden Werthen von ω gehören, sind dann schliesslich aus der Gleichung:

$$\lambda = -k^2 \,\mathrm{sn}\,\alpha \cdot \mathrm{sn}\,\omega \cdot \mathrm{sn}\,(\omega - \alpha)$$

bestimmt.

Damit sind wir am Ziel. Wir finden den

Lehrsatz. *Als Typus aller Differentialgleichungen der in der Ueberschrift charakterisirten Art ergiebt sich die Differentialgleichung:*

$$\frac{d^2\varphi(v)}{dw^2} + 2k^2 \cdot \mathrm{sn}\,\alpha \cdot \mathrm{sn}\,w \cdot \mathrm{sn}\,(w + \alpha)\,\frac{d\varphi(v)}{dw}$$
$$= \varphi(v)\,(c_3 - 2k^2 \cdot \mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha \cdot \mathrm{sn}\,w \cdot \mathrm{sn}\,(w + \alpha)) \ .$$

Die beiden Integrale derselben können nach angegebenen Regeln unmittelbar bestimmt werden.

§ 3.

Aufstellung aller Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Integrale einen einfachen Unendlichkeitspunkt haben, während die Coefficienten noch zwei weitere von einander verschiedene einfache Unendlichkeitspunkte besitzen.

Wir gehen jetzt einen Schritt weiter und nehmen an, dass die Coefficienten zwei von einander verschiedene weitere Unendlichkeitspunkte besitzen, die Punkte $v = -a + \frac{\tau}{2}$, $v = -b + \frac{\tau}{2}$ oder $w = -\alpha + iK'$, $w = -\beta + iK'$.

Dann können wir zunächst vollkommen so wie im vorigen Paragraphen verfahren.

Digitized by Google

Als Typus aller gesuchten Differentialgleichungen können wir die Differentialgleichung zu Grunde legen:

$$\frac{d^2\varphi(v)}{dw^2}+(c_1+c_2\cdot k^2\,\mathrm{sn}(w+\alpha)\cdot\mathrm{sn}\,w+c_3\cdot k^2\cdot\mathrm{sn}(w+\beta)\cdot\mathrm{sn}\,w)\frac{d\varphi(v)}{dw}=$$

$$\varphi(v)(c_4+c_5\cdot k^2\cdot\mathrm{sn}^2 w+c_6\cdot k^2\cdot\mathrm{sn}(w+\alpha)\cdot\mathrm{sn}\,w+c_7\cdot k^2\mathrm{sn}(w+\beta)\mathrm{sn}\,w).$$

Zwischen diesen 7 Grössen $c_1 \ldots c_7$ müssen dann 5 Bedingungsgleichungen bestehen, die wir durch Entwickelung beider Seiten um die Punkte $w=iK'$, $w=-\alpha+iK'$, $w=-\beta+iK'$ herum erhalten. Dieselben lauten:

$$(2.)\qquad 2-\frac{c_2}{\mathrm{sn}\,\alpha}-\frac{c_3}{\mathrm{sn}\,\beta}=c_5\ ,$$

$$(3.)\qquad c_1'=c_2\cdot\frac{\mathrm{cn}\,\alpha\cdot\mathrm{dn}\,\alpha}{\mathrm{sn}^2\alpha}+c_3\cdot\frac{\mathrm{cn}\,\beta\cdot\mathrm{dn}\,\beta}{\mathrm{sn}^2\beta}-\frac{c_6'}{\mathrm{sn}\,\alpha}-\frac{c_7'}{\mathrm{sn}\,\beta}\ ,$$

$$(4.)\qquad c_2\left(\frac{1}{\mathrm{sn}^3\alpha}+\frac{1}{2\,\mathrm{sn}\,\alpha}\,(k^2\cdot\mathrm{sn}^2\omega-1-k^2)\right)+$$

$$c_3\left(\frac{1}{\mathrm{sn}^3\beta}+\frac{1}{2\,\mathrm{sn}\,\beta}\cdot(k^2\,\mathrm{sn}^2\omega-1-k^2)\right)=$$

$$-c_4'+\frac{c_6'}{\mathrm{sn}^2\alpha}\cdot\mathrm{cn}\,\alpha\cdot\mathrm{dn}\,\alpha+c_7'\cdot\frac{\mathrm{cn}\,\beta\cdot\mathrm{dn}\,\beta}{\mathrm{sn}^2\beta}+\frac{c_5}{2}(k^2\cdot\mathrm{sn}^2\omega-1-k^2)\ ,$$

$$(5.)\qquad c_6'=c_2\cdot\frac{\mathrm{cn}\,\alpha\cdot\mathrm{dn}\,\alpha+k^2\cdot\mathrm{sn}^2\alpha\cdot\mathrm{sn}\,\omega\cdot\mathrm{sn}\,(\omega-\alpha)}{\mathrm{sn}\,\alpha}\ ,$$

$$(6.)\qquad c_7'=c_3\cdot\frac{\mathrm{cn}\,\beta\cdot\mathrm{dn}\,\beta+k^2\cdot\mathrm{sn}^2\beta\cdot\mathrm{sn}\,\omega\cdot\mathrm{sn}\,(\omega-\beta)}{\mathrm{sn}\,\beta}\ .$$

In diesen Gleichungen ist der Abkürzung wegen gesetzt:

$$c_1'=c_1+2\lambda,\ c_4'=c_4-\lambda^2-\lambda^2 c_1,\ c_6'=c_6-\lambda c_2,\ c_7'=c_7-\lambda c_3\ .$$

Es folgt dann genau so wie im zweiten Paragraphen, dass wir berechtigt sind $c_1=0$ anzunehmen, dass ferner nur der Fall zu neuen Resultaten führen kann, dass die Werthe von λ, die zu beiden Integralen gehören, von einander verschieden sind. Dazu muss aber die Gleichung bestehen

$$(7.)\qquad 2-\frac{c_2}{\mathrm{sn}\,\alpha}-\frac{c_3}{\mathrm{sn}\,\beta}=c_5=0\ ,$$

Digitized by Google

ferner nimmt Gleichung (3.) die Form an:

$$0 = c_2 \cdot \frac{\operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}^2\alpha} + c_3 \cdot \frac{\operatorname{cn}\beta \cdot \operatorname{dn}\beta}{\operatorname{sn}^2\beta} - \frac{c_6}{\operatorname{sn}\alpha} - \frac{c_7}{\operatorname{sn}\beta} ,$$

während Gleichung (4.) wird:

$$\frac{c_2}{\operatorname{sn}^3\alpha} + \frac{c_3}{\operatorname{sn}^3\beta} - (1+k^2) + k^2 \operatorname{sn}^2\omega =$$

$$\lambda^2 - c_4 + (c_6 - \lambda c_2)\frac{\operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}^2\alpha} + (c_7 - \lambda c_3)\frac{\operatorname{cn}\beta \cdot \operatorname{dn}\beta}{\operatorname{sn}^2\beta} .$$

Aus den Gleichungen (5.) und (6.) folgern wir

8.) $$-2\lambda = c_2 \cdot k^2 \cdot \operatorname{sn}\omega \cdot \operatorname{sn}(\omega - \alpha) + c_3 \cdot k^2 \cdot \operatorname{sn}\omega \cdot \operatorname{sn}(\omega - \beta) ,$$

(9.) $$\frac{\operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha} - \frac{\operatorname{cn}\beta \cdot \operatorname{dn}\beta}{\operatorname{sn}\beta} +$$

$$k^2(\operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{sn}\omega \cdot \operatorname{sn}(\omega - \alpha) - \operatorname{sn}\beta \cdot \operatorname{sn}\omega \cdot \operatorname{sn}(\omega - \beta)) = A ,$$

$$A = \frac{c_6}{c_2} - \frac{c_7}{c_3} .$$

Um aus Gleichung (8.) die Werthe von ω zu finden, machen wir dieselbe Substitution, die Herr HERMITE bei der Discussion derselben Gleichung anwendet, wir setzen

$$\omega = u + \frac{\alpha + \beta}{2} ,$$

also:

(10.) $$\omega - \alpha = u - \frac{\alpha - \beta}{2} ,$$

$$\omega - \beta = u + \frac{\alpha - \beta}{2} ,$$

$$\omega - \alpha - \beta = u - \frac{\alpha + \beta}{2} .$$

Dann wird, wie Herr HERMITE nachweist:

Digitized by Google

$$(11.)\quad \left|\begin{array}{l} \operatorname{sn}\alpha\cdot\operatorname{sn}\omega\cdot\operatorname{sn}(\omega-\alpha)-\operatorname{sn}\beta\cdot\operatorname{sn}\omega\cdot\operatorname{sn}(\omega-\beta)= \\ \operatorname{sn}(\alpha-\beta)\cdot\operatorname{sn}\left(u-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\operatorname{sn}u+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)N\ , \\ N=1-k^2\cdot\operatorname{sn}\alpha\cdot\operatorname{sn}\beta\cdot\operatorname{sn}\left(u-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\operatorname{sn}\left(u+\frac{\alpha-\beta}{2}\right). \end{array}\right.$$

Nun ist ferner ganz allgemein:

$$\operatorname{sn}(v+w)\cdot\operatorname{sn}(v-w)=\frac{\operatorname{sn}^2 v-\operatorname{sn}^2 w}{1-k^2\cdot\operatorname{sn}^2 v\cdot\operatorname{sn}^2 w}\ .$$

Setzen wir also:

$$\alpha+\beta=2\alpha_1\ ,\quad \alpha-\beta=2\beta_1\ ,$$

so können wir unseren Ausdruck schreiben:

$$\operatorname{sn}2\beta_1\cdot\frac{\operatorname{sn}^2 u-\operatorname{sn}^2\alpha_1}{1-k^2\cdot\operatorname{sn}^2 u\cdot\operatorname{sn}^2\alpha_1}\cdot N\ ,$$

$$N=1-k^2\frac{(\operatorname{sn}^2\alpha_1-\operatorname{sn}^2\beta_1)(\operatorname{sn}^2 u-\operatorname{sn}^2\beta_1)}{(1-k^2\cdot\operatorname{sn}^2 u\cdot\operatorname{sn}^2\beta_1)(1-k^2\cdot\operatorname{sn}^2\alpha_1\cdot\operatorname{sn}^2\beta_1)}\ .$$

Ebenso einfach folgt:

$$\frac{\operatorname{cn}\alpha\cdot\operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha}-\frac{\operatorname{cn}\beta\cdot\operatorname{dn}\beta}{\operatorname{sn}\beta}=-\frac{(1-k^2\cdot\operatorname{sn}^4\alpha_1)(1-k^2\cdot\operatorname{sn}^4\beta_1)\operatorname{sn}2\beta_1}{(1-k^2\cdot\operatorname{sn}^2\alpha_1\cdot\operatorname{sn}^2\beta_1)(\operatorname{sn}^2\alpha_1-\operatorname{sn}^2\beta_1)}\ .$$

Unter solchen Umständen nimmt Gleichung (9.) die Gestalt an:

$$(12.)\quad \frac{\operatorname{sn}^2\beta_1(1-k^2\cdot\operatorname{sn}^4\beta_1)}{\operatorname{sn}^2\alpha_1-\operatorname{sn}^2\beta_1}\cdot\frac{1-k^2\cdot\operatorname{sn}^2 u\cdot\operatorname{sn}^2\alpha_1}{1-k^2\cdot\operatorname{sn}^2 u\cdot\operatorname{sn}^2\beta_1}=A\ .$$

Damit ist u bestimmt. Wir finden analog wie im vorigen Paragraphen, dass die beiden Werthe, die zu den beiden Integralen gehören, sich nur um das Vorzeichen von einander unterscheiden.

Die beiden entsprechenden Werthe von λ sind dann aus Gleichung (7.) bestimmt.

Wir sind aber noch nicht am Ziele, denn bei den bisherigen Betrachtungen ist Gleichung (4.) völlig unberücksichtigt geblieben. Setzen wir in dieselbe die gefundenen Werthe von λ und u ein, so erhalten wir eine Relation, die zwischen den Coefficienten der vorgelegten Gleichung bestehen muss. Um dieselbe abzuleiten, gehen wir in der folgenden Weise vor.

Digitized by Google

Gleichung (4.) können wir schreiben:

$$\frac{c_2}{\mathrm{sn}^3\alpha}+\frac{c_3}{\mathrm{sn}^3\beta}-c_6\cdot\frac{\mathrm{cn}\,\alpha\cdot\mathrm{dn}\,\alpha}{\mathrm{sn}^2\alpha}-c_7\cdot\frac{\mathrm{cn}\,\beta\cdot\mathrm{dn}\,\beta}{\mathrm{sn}^2\beta}+$$

$$\frac{c_2^2}{4}\cdot\frac{\mathrm{cn}^2\alpha\cdot\mathrm{dn}^2\alpha}{\mathrm{sn}^4\alpha}+\frac{c_3^2}{4}\cdot\frac{\mathrm{cn}^2\beta\cdot\mathrm{dn}^2\beta}{\mathrm{sn}^4\beta}+\frac{c_2\cdot c_3\cdot\mathrm{cn}\,\alpha\cdot\mathrm{dn}\,\alpha\cdot\mathrm{cn}\,\beta\cdot\mathrm{dn}\,\beta}{8\cdot\mathrm{sn}^2\alpha\cdot\mathrm{sn}^2\beta}$$

$$-(1+k^2)+c_4=$$

$$\left(\lambda-\frac{c_2}{2}\cdot\frac{\mathrm{cn}\,\alpha\cdot\mathrm{dn}\,\alpha}{\mathrm{sn}^2\alpha}-\frac{c_3}{2}\cdot\frac{\mathrm{cn}\,\beta\cdot\mathrm{dn}\,\beta}{\mathrm{sn}^2\beta}\right)^2-k^2\,\mathrm{sn}^2\omega=B\,,$$

wie wir es bezeichnen wollen.

Die Hauptschwierigkeit liegt in der Darstellung des Quadrates auf der rechten Seite.

Wir wollen setzen:

$$(13.)\qquad\begin{cases}c_2=\mathrm{sn}\,\alpha\cdot d_2\\ c_3=\mathrm{sn}\,\beta\cdot d_3\end{cases},$$

dann besteht zwischen d_2 und d_3 die Beziehung:

$$d_2+d_3=2\,.$$

Unser Quadrat nimmt die Form an:

$$\tfrac{1}{4}\Big(d_2\cdot k^2\cdot\mathrm{sn}\,\alpha\cdot\mathrm{sn}\,\omega\cdot\mathrm{sn}\,(\omega-\alpha)+d_3\cdot k^2\cdot\mathrm{sn}\,\omega\cdot\mathrm{sn}\,(\omega-\beta)+$$

$$d_2\cdot\frac{\mathrm{cn}\,\alpha\cdot\mathrm{dn}\,\alpha}{\mathrm{sn}\,\alpha}+d_3\cdot\frac{\mathrm{cn}\,\beta\cdot\mathrm{dn}\,\beta}{\mathrm{sn}\,\beta}\Big)^2.$$

Nun ist:

$$d_2=\frac{d_2+d_3}{2}+\frac{d_2-d_3}{2}=1+\frac{d_2-d_3}{2}\,,$$

$$d_3=\frac{d_2+d_3}{2}-\frac{d_2-d_3}{2}=1-\frac{d_2-d_3}{2}\,,$$

folglich kann der innerhalb der Klammer stehende Ausdruck geschrieben werden:

Digitized by Google

$$k^2 \operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{sn}\omega \cdot \operatorname{sn}(\omega - \alpha) + k^2 \cdot \operatorname{sn}\beta \cdot \operatorname{sn}\omega \cdot \operatorname{sn}(\omega - \beta) +$$

$$\frac{\operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha} + \frac{\operatorname{cn}\beta \cdot \operatorname{dn}\beta}{\operatorname{sn}\beta} + \frac{d_2 - d_3}{2}$$

$$\left(k^2 \cdot \operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{sn}\omega \cdot \operatorname{sn}(\omega - \alpha) - k^2 \cdot \operatorname{sn}\beta \cdot \operatorname{sn}\omega \cdot \operatorname{sn}(\omega - \beta) + \frac{\operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha} - \frac{\operatorname{cn}\beta \cdot \operatorname{dn}\beta}{\operatorname{sn}\beta}\right)$$

oder also:

$$k^2 \operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{sn}\omega \cdot \operatorname{sn}(\omega - \alpha) + k^2 \cdot \operatorname{sn}\beta \cdot \operatorname{sn}\omega \cdot \operatorname{sn}(\omega - \beta)$$

$$+ \frac{\operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha} + \frac{\operatorname{cn}\beta \cdot \operatorname{dn}\beta}{\operatorname{sn}\beta} + \frac{d_2 - d_3}{2} A \ ,$$

wobei unter A der vorhin definirte Ausdruck zu verstehen ist.

Nun führen wir wieder die Grössen u, α_1, β_1, ein, dann nimmt nach einigen Rechnungen Gleichung (4.) die Form an:

$$(14.) \qquad \frac{1}{4}\left(C + \frac{d_2 - d_3}{2} A\right)^2 - k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\omega = B \ ,$$

$$C = 2\,\frac{\operatorname{sn}\alpha_1 \cdot \operatorname{cn}\alpha_1 \cdot \operatorname{dn}\alpha_1 (1 - k^2 \cdot \operatorname{sn}^2 u \cdot \operatorname{sn}^2\beta_1)}{(\operatorname{sn}^2\alpha_1 - \operatorname{sn}^2\beta_1)(1 - k^2 \cdot \operatorname{sn}^2 u \cdot \operatorname{sn}^2\alpha_1)}$$

$$+ 2\,\frac{k^2(\operatorname{sn}^2\alpha_1 - \operatorname{sn}^2\beta_1) \operatorname{sn} u \cdot \operatorname{cn} u \cdot \operatorname{dn} u}{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \cdot \operatorname{sn}^2\alpha_1)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \cdot \operatorname{sn}^2\beta_1)} \ .$$

Nun ist aber:

$$\omega = u + \alpha_1 \ ,$$

also:

$$\operatorname{sn}^2\omega = \frac{\operatorname{sn}^2\alpha_1 \cdot \operatorname{cn}^2 u \cdot \operatorname{dn}^2 u + \operatorname{cn}^2\alpha_1 \cdot \operatorname{dn}\alpha_1 \cdot \operatorname{sn}^2 u}{(1 - k^2 \cdot \operatorname{sn}^2 u \cdot \operatorname{sn}^2\alpha_1)^2}$$

$$+ 2\,\frac{\operatorname{sn}\alpha_1 \cdot \operatorname{cn}\alpha_1 \cdot \operatorname{dn}\alpha_1 \cdot \operatorname{sn} u \cdot \operatorname{cn} u \cdot \operatorname{dn} u}{(1 - k^2 \cdot \operatorname{sn}^2 u \cdot \operatorname{sn}^2\alpha_1)^2} \ .$$

Setzen wir diese Werthe ein, so ergiebt sich als Factor von $\operatorname{sn} u \cdot \operatorname{cn} u \cdot \operatorname{dn} u$ auf der rechten Seite

$$A\,\frac{d_2 - d_3}{2} \ .$$

Digitized by Google

Alle übrigen Glieder sind rational in $\mathrm{sn}^2 u$, also eindeutig bestimmt, wenn die Coefficienten gegeben sind. Mithin würden wir das Resultat finden, dass auch $\mathrm{sn}\,u \cdot \mathrm{cn}\,u \cdot \mathrm{dn}\,u$ eindeutig bestimmt wäre. Das geht aber nicht, da sich ja zwei Werthe von u ergeben haben, die sich um das Zeichen unterscheiden. Also muss entweder $A = 0$ oder $d_2 - d_3 = 0$ sein. Der erste Fall führt zu speciellen Resultaten und möge hier unerörtert bleiben. Es möge in Bezug auf denselben auf das citirte Werk von Herrn HERMITE § 32 verwiesen werden. Es bleibt demgemäss nur der Fall

$$d_2 - d_3 = 0$$

zu betrachten übrig, oder also $d_2 = d_3 = 1$, oder auch $c_2 = \mathrm{sn}\,\alpha$, $c_3 = \mathrm{sn}\,\beta$. Dann nimmt eine der früheren Gleichungen die Form an:

$$\frac{c_6}{\mathrm{cn}\,\alpha} + \frac{c_7}{\mathrm{sn}\,\beta} = \frac{\mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha}{\mathrm{sn}\,\alpha} + \frac{\mathrm{cn}\,\beta \cdot \mathrm{dn}\,\beta}{\mathrm{sn}\,\beta} .$$

Aber auch hiermit sind wir noch nicht am Ziel. Berechnen wir aus der Gleichung:

$$\tfrac{1}{4} C^2 - k^2 \mathrm{sn}^2 \omega = B$$

den Werth von $\mathrm{sn}^2 \omega$ und vergleichen ihn mit dem früher gefundenen, so ergiebt sich noch eine weitere Relation zwischen den Coefficienten. Von diesen sind vermöge der früheren Gleichungen nur noch zwei von einander unabhängig, also vermöge der letzten Gleichung nur noch eine. Wir können hierfür die Grösse c_4 wählen. Es möge hierauf nicht weiter eingegangen werden, um so weniger als sich bei Herrn HERMITE die fertigen Formeln vorfinden und wir das Hauptgewicht auf die Methode legen. Hiermit sind wir am Ziele. Wir finden den:

Lehrsatz. *Als Typus der in der Ueberschrift charakterisirten Gleichungen können wir die Differentialgleichung zu Grunde legen.*

$$\frac{d^2\varphi(v)}{dw^2} + (k^2 \cdot \mathrm{sn}\,\alpha \cdot \mathrm{sn}\,w \cdot \mathrm{sn}(w+\alpha) + k^2 \cdot \mathrm{sn}\,\beta \cdot \mathrm{sn}\,w \cdot \mathrm{sn}(w+\beta)) \frac{d\varphi(v)}{dw}$$
$$= \varphi(v)\,(c_4 + c_6\, k^2 \mathrm{sn}\,(w+\alpha)\,\mathrm{sn}\,w + c_7 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}(w+\beta)\,\mathrm{sn}\,w) ,$$

wobei c_4 willkürlich ist und c_6 und c_7 in einfacher Weise von c_4 abhängen.

Digitized by Google

Es könnte sich nur noch darum handeln zu untersuchen, ob es Differentialgleichungen 2. Ordnung giebt, deren Integrale einen einfachen Unendlichkeitspunkt besitzen, während die Coefficienten noch einen zweiten haben, in dem sie unendlich gross von der Ordnungszahl 2 werden. Eine leichte Betrachtung zeigt, dass das nicht möglich ist. Der Coefficient von $\frac{d\varphi(v)}{dw}$ kann in den singulären Punkten höchstens von der Ordnungszahl 1 unendlich gross werden, mithin der Coefficient von $\varphi(v)$ auch, wenn der singuläre Punkt verschieden ist von dem singulären Punkte des Integrales. Ebenso einfach folgt, dass die Coefficienten mehr als zwei weitere Unendlichkeitspunkte überhaupt nicht besitzen dürfen, *so dass durch die vorangehenden Untersuchungen die Klasse derjenigen Differentialgleichungen vollkommen charakterisirt ist, deren Integrale nur einen einfachen Unendlichkeitspunkt besitzen.*

Digitized by Google

Sophus Lie, *Ueber die Grundlagen der Geometrie.* (Erste Abhandlung.)

Definirt man den Inbegriff aller Bewegungen des Raumes durch analytische Gleichungen, so erhält man die Gleichungen einer Transformationsgruppe, welche sich von allen anderen Gruppen durch gewisse charakteristische Eigenschaften unterscheidet. Man kann sich nun die Aufgabe stellen, solche möglichst einfache Eigenschaften der besprochenen Gruppe zu finden, welche für sie charakteristisch sind. An und für sich ist dies allerdings ein unbestimmtes Problem; doch wage ich zu glauben, dass es unmöglich ist, die Gruppe der Bewegungen in einfacherer Weise zu charakterisiren als im Folgenden geschehen.

Wenn wir hier von der Gruppe der Bewegungen reden, so denken wir nicht allein an die Gruppe der *Euclidischen*, sondern auch an die Gruppe der *Nichteuclidischen* Bewegungen. Wir wollen in der That möglichst einfache Eigenschaften angeben, welche sowohl der Gruppe der *Euclidischen*, als auch der Gruppe der *Nichteuclidischen* Bewegungen, sonst aber keiner anderen Gruppe zukommen.

Auch in einem Raume mit mehr als drei, etwa mit n Dimensionen kann man von einer Gruppe Euclidischer, sowie von einer Gruppe Nichteuclidischer Bewegungen reden. Wir wollen überhaupt für jedes $n \geqq 3$ alle diese Gruppen ins Auge fassen und sie in sehr einfacher Weise charakterisiren.

Die nachstehende Arbeit hat mehrere Berührungspunkte mit der bekannten Arbeit des Herrn v. Helmholtz: *Über die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen.* Was diese Arbeit anlangt, so ist zu bemerken, dass sie einerseits den Begriff

Digitized by

Gruppe gar nicht enthält, und dass andererseits die in ihr abgeleiteten Resultate kaum als erwiesen zu betrachten sind. Mir scheint nämlich, dass die v. Helmholtzschen Sätze eine tiefere Behandlung erfordern, sie lassen sich kaum mit den von dem berühmten Verfasser angewandten einfachen Hülfsmitteln erhärten. Bei einer früheren Gelegenheit habe ich mich schon in diesen Berichten über die v. Helmholtzsche Arbeit ausgesprochen, und ich werde bald auf dieselbe ausführlicher eingehen. Hier möchte ich nur hervorheben, dass die in der nachstehenden Arbeit angegebenen charakteristischen Eigenschaften der Gruppe der Bewegungen nicht allein einfacher, sondern zugleich schärfer formulirt sind, als die von Herrn v. Helmholtz angegebenen.

Für den dreifach ausgedehnten Raum können die betreffenden Eigenschaften folgendermassen zusammengefasst werden:

Die Bewegungen des dreifach ausgedehnten Raumes bilden eine Gruppe von reellen Transformationen, welche die folgende Eigenschaft besitzt. *Wird ein reeller Punkt und ein reelles hindurchgehendes Linienelement festgehalten, so ist immer noch continuirliche Bewegung möglich; wird jedoch ausserdem ein durch das Linienelement gehendes reelles Flächenelement festgehalten, so bleiben alle Punkte des Raumes in Ruhe.*

Diese Eigenschaft kommt der *Gruppe der Euclidischen und der Gruppe der Nichteuclidischen Bewegungen, aber keiner anderen Gruppe zu.* Der hiermit aufgestellte allgemeine Satz hat ein bedeutendes Interesse, da er *auf die Grundlagen der Geometrie Licht wirft.*

In einem Raume mit mehr als drei Dimensionen lassen sich die beiden betreffenden Gruppen in ganz entsprechender Weise charakterisiren. Dagegen stellt sich die Sache wesentlich anders in einem *zwei*fach ausgedehnten Raume; in der *Ebene* giebt es noch weitere Gruppen, welche die genannten Eigenschaften besitzen.

Die nachstehende Arbeit zerfällt in mehrere Paragraphen, deren jeder die Erledigung eines speciellen Problems bringt. Indem ich diese verschiedenen Resultate mit einem allerdings ziemlich tiefliegenden Satze, den ich an einer anderen Stelle erwiesen habe, verbinde, erhalte ich ohne Schwierigkeit das früher angekündigte Hauptergebniss dieser Arbeit.

Die ganze Untersuchung soll in den dritten Abschnitt meiner

Digitized by Google

Theorie der Transformationsgruppen aufgenommen werden, den ich mit dem thätigen Beistand des Herrn Professor Dr. ENGEL bald veröffentlichen werde.

§ 1.

Zunächst entwickele ich einen einfachen aber wichtigen Satz über dreigliedrige projective Gruppen einer Ebene.

Hat man eine beliebige dreigliedrige Gruppe der Ebene und hält man irgend einen Punkt fest, so werden die ∞^1 Linienelemente durch diesen Punkt bei den noch übrig bleibenden Transformationen der Gruppe durch eine *projective* Gruppe mit höchstens zwei Parametern transformirt. Unter diesen Linienelementen giebt es daher mindestens eines, das in Ruhe bleibt und demnach mit dem Punkte invariant verknüpft ist. Daraus folgt, dass eine dreigliedrige Gruppe von Punkttransformationen der xy-Ebene mindestens eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung:

$$f\left(xy\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

invariant lässt [1]. Eine solche Differentialgleichung hat ∞^1 Integralcurven, deren Inbegriff natürlich bei der dreigliedrigen Gruppe invariant bleibt. Daher gestattet jede Integralcurve mindestens zwei unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe. Ist nun insbesondere die dreigliedrige Gruppe *projectiv*, so gestattet jede Integralcurve zwei unabhängige infinitesimale projective Transformationen und ist daher nach einem bekannten Satze entweder eine Gerade oder ein Kegelschnitt. Die Schaar der Integralcurven hat eine Umhüllungsfigur: Curve oder Punkt, welche natürlich bei der dreigliedrigen Gruppe invariant bleibt und infolge dessen entweder eine Gerade oder ein Kegelschnitt oder ein Punkt ist.

Wir wollen zeigen, dass bei einer dreigliedrigen projectiven Gruppe der Ebene immer entweder ein Kegelschnitt oder ein Punkt invariant bleibt. Um diesen Nachweis zu führen genügt es zu zeigen, dass eine einzelne Gerade nie als einzige Umhüllungsfigur auftritt.

1) Math. Annalen Bd. 16.

Digitized by Google

Wäre nämlich etwa die Gerade $y = 0$ die einzige auftretende Umhüllungsfigur, so müssten die ∞^1 Integralcurven Kegelschnitte sein, welche die x-Achse berührten. In der allgemeinen Gleichung:

$$U = 0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy + \varepsilon x^2 + \zeta y^2$$

dieser Kegelschnitte müssten die Coefficienten $\alpha, \beta \ldots \zeta$ von einem Parameter λ abhängen, und zwar wäre $\alpha + \beta x + \varepsilon x^2$ ein vollständiges Quadrat.

Nach einer bekannten Regel findet man die Umhüllungsfigur unserer ∞^1 Kegelschnitte dadurch, dass man den Parameter λ aus den Gleichungen $U = 0$ und

$$\frac{dU}{d\lambda} = 0 = \frac{d\alpha}{d\lambda} + \frac{d\beta}{d\lambda}x + \frac{d\gamma}{d\lambda}y + \frac{d\delta}{d\lambda}xy + \frac{d\varepsilon}{d\lambda}x^2 + \frac{d\zeta}{d\lambda}y^2$$

fortschafft. Da nun jeder Kegelschnitt der Schaar die eingehüllte Gerade $y = 0$ nur in einem Punkte berührt, und da es ausser dieser Geraden keine andere Umhüllungsfigur giebt, so müssen die beiden Gleichungen:

$$U = 0, \quad \frac{dU}{d\lambda} = 0$$

für jeden Werth von λ nur ein einziges Werthsystem x, y liefern. Da aber unsere beiden Gleichungen vom zweiten Grade in x und y sind, so ist hierzu nothwendig und hinreichend, dass eine Gleichung von der Form:

$$\frac{dU}{d\lambda} = mU + ny^2$$

besteht, in welcher m und n Functionen von λ sind. Es ergeben sich somit die Relationen:

$$\frac{\frac{d\alpha}{d\lambda}}{\alpha} = \frac{\frac{d\beta}{d\lambda}}{\beta} = \frac{\frac{d\gamma}{d\lambda}}{\gamma} = \frac{\frac{d\delta}{d\lambda}}{\delta} = \frac{\frac{d\varepsilon}{d\lambda}}{\varepsilon} = m\ ,$$

welche zeigen, dass das Verhältniss je zweier unter den fünf Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ von λ unabhängig ist. Wir können daher ohne Beschränkung annehmen, dass $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ Constan-

Digitized by Google

ten sind, während ζ von λ abhängt. Unsere ∞^1 Kegelschnitte werden also durch eine Gleichung von der Form:

$$\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy + \varepsilon x^2 + f(\lambda) y^2 = 0$$

dargestellt, das heisst, sie berühren alle die Gerade $y = 0$ in demselben Punkte. Dieser gemeinsame Berührungspunkt bleibt natürlich bei der dreigliedrigen Gruppe invariant.

Hiermit haben wir den

Satz 1. *Jede dreigliedrige projective Gruppe der Ebene, welche nicht aus allen projectiven Transformationen eines Kegelschnittes besteht, lässt einen Punkt in Ruhe.*

Wir bemerken beiläufig, dass eine dualistische Betrachtung zeigt, dass eine dreigliedrige projective Gruppe einer Ebene, welche keinen Kegelschnitt invariant lässt, immer eine Gerade festhält. Diese Gerade braucht aber nicht durch den immer vorhandenen invarianten Punkt hindurch zu gehen.

Jetzt können wir leicht ein allgemeineres Resultat von Interesse ableiten.

Wir suchen in der Ebene alle reellen projectiven Gruppen, bei denen *freie Beweglichkeit im Infinitesimalen* im folgenden Sinne stattfindet:

Wird ein reeller Punkt festgehalten, so soll stets noch continuirliche Bewegung möglich sein; werden dagegen zu gleicher Zeit ein reeller Punkt und ein beliebiges hindurchgehendes reelles Linienelement festgehalten, so sollen alle Punkte der Ebene in Ruhe bleiben.

Es giebt Gruppen, welche die gestellte Forderung zwar nicht ausnahmslos, jedoch innerhalb eines gewissen Bereiches erfüllen. Zunächst suchen wir aber nur solche Gruppen, bei denen die *freie Beweglichkeit im Infinitesimalen* innerhalb der ganzen Ebene *ausnahmslos* stattfindet.

Wenn ein reeller Punkt festgehalten wird, so muss jedes hindurchgehende reelle Linienelement sich um ihn drehen lassen; sonst bliebe ja mit dem einen Punkte zunächst ein Linienelement und sodann alle Punkte der Ebene in Ruhe.

Hieraus folgt, dass die gesuchte Gruppe *transitiv* sein muss; blieben nämlich ∞^1 reelle Curven, $\varphi(x, y) = \text{const.}$ in Ruhe, so wäre mit jedem Punkte der Ebene eine Richtung invariant verknüpft, nämlich die Tangente an die hindurchgehende Curve der Schaar: $\varphi(x, y) = \text{const.}$

Digitized by Google

Ferner ergiebt sich, dass unsere Gruppe *dreigliedrig* ist; denn einen Punkt und ein hindurchgehendes Linienelement festzuhalten kommt nach dem Obenstehenden auf *drei* Bedingungen hinaus.

Unsere Gruppe lässt also entweder einen Kegelschnitt oder einen Punkt in Ruhe.

Ein *reeller* Punkt kann nicht in Ruhe bleiben; denn dann gehörte zu *jedem* Punkte der Ebene eine mit ihm invariant verbundene reelle Richtung. Bliebe andrerseits ein imaginärer Punkt in Ruhe, so müsste, da unsere Gruppe aus reellen projectiven Transformationen besteht, zugleich der imaginär-conjugirte Punkt in Ruhe bleiben und ausserdem auch noch die reelle Verbindungslinie beider Punkte. Dann aber könnte offenbar jedes reelle Linienelement dieser Geraden sich nicht um seinen Punkt drehen.

Es muss daher bei unserer Gruppe ein Kegelschnitt invariant bleiben und dieser Kegelschnitt muss augenscheinlich imaginär sein, aber durch eine reelle Gleichung dargestellt werden. Also gilt der

Satz 2. *Besitzt eine reelle projective Gruppe der Ebene die Eigenschaft, dass alle Punkte in Ruhe bleiben, wenn man einen beliebigen reellen Punkt und ein beliebiges durch ihn gehendes reelles Linienelement festhält, dass dagegen stets noch continuirliche Bewegung möglich ist, wenn man nur einen reellen Punkt festhält, so besteht die Gruppe aus allen projectiven Transformationen, welche einen durch eine reelle Gleichung dargestellten imaginären Kegelschnitt in Ruhe lassen.*

Verlangt man von einer reellen projectiven Gruppe nur, dass *innerhalb eines gewissen Bereiches* freie Beweglichkeit im Infinitesimalen stattfinden soll, so erhält man noch weitere Gruppen. In diesem Falle ist es nämlich denkbar, dass zwei imaginär-conjugirte Punkte in Ruhe bleiben. Werden diese imaginär-conjugirten Punkte nach den imaginären Kreispunkten verlegt, so ist die Gruppe eine Untergruppe der Gruppe aller Aehnlichkeitstransformationen, deren infinitesimale Transformationen bei Anwendung meiner gewöhnlichen Bezeichnungsweise die Form:

$$p,\ q,\ xq - yp,\ xp + yq$$

haben. Enthielte nun unsere dreigliedrige Gruppe nur *eine* infinitesimale Translation:

$$\alpha p + \beta q\ ,$$

so müsste sie eine infinitesimale Rotation

$$xq - yp + \mu p + \nu q$$

Digitized by Google

und also auch die Transformation

$$(\alpha p + \beta q,\ x q - y p + \mu p + \nu q) = \alpha q - \beta p$$

umfassen; diese neue Transformation ist aber eine Translation und müsste daher nach unserer früheren Annahme mit der Translation $\alpha p + \beta q$ zusammenfallen. Es ergäbe sich also:

$$\frac{\alpha}{-\beta} = \frac{\beta}{\alpha}$$

oder

$$\alpha^2 + \beta^2 = 0, \quad \beta = i\alpha .$$

Die einzige infinitesimale Translation:

$$\alpha p + \beta q = \alpha(p + i q)$$

unserer Gruppe wäre somit imaginär, und demnach wäre die Gruppe selbst gegen unsere Voraussetzung imaginär.

Hieraus ergiebt sich, dass die gesuchte Gruppe die beiden infinitesimalen Translationen p und q und eine Transformation von der Form:

$$\alpha(x q - y p) + \beta(x p + y q)$$

enthalten muss. Die Constante α darf hier nicht verschwinden; denn sonst wäre mit jedem Punkte jedes durch ihn gehende Linienelement invariant verknüpft.

Hiermit erhalten wir den

Satz 3. *Besitzt eine reelle projective Gruppe von Transformationen einer Ebene nicht ausnahmslos, sondern nur innerhalb eines gewissen Bereiches die Eigenschaft, dass alle Punkte in Ruhe bleiben, wenn man einen ganz beliebigen reellen Punkt und ein beliebiges hindurchgehendes reelles Linienelement festhält, dass dagegen, wenn blos ein Punkt festgehalten wird, immer noch continuirliche Bewegung möglich ist, so sind zwei Fälle denkbar. Entweder besteht die Gruppe aus allen projectiven Transformationen, welche einen reellen Kegelschnitt in sich überführen, oder sie hat die Form*

$$p,\ q,\ x q - y p + c(x p + y q),$$

wo c eine reelle Constante bedeutet. Ist c verschieden von Null, so besteht die Gruppe aus Aehnlichkeitstransformationen; die Bahncurven ihrer infinitesimalen Transformationen sind dann Spiralen.

Die Gruppe der Euclidischen und die Gruppe der Nichteuclidischen Bewegungen sind also, wie bereits v. HELMHOLTZ bemerkt hat, nicht die einzigen Gruppen, welche unsere Forderung erfüllen; dies ist auch der Fall mit jeder Gruppe

$$p,\ q,\ x q - y p + c(x p + y q),$$

welche reelle, von Null verschiedene Constante das c auch sein möge.

§ 2.

Wir suchen jetzt im *dreifach* ausgedehnten Raume eine reelle Transformationsgruppe, welche innerhalb eines gewissen

Digitized by Google

Bereiches freie Beweglichkeit im Infinitesimalen im folgenden Sinne des Wortes besitzt:

Werden ein beliebiger reeller Punkt und ein hindurchgehendes reelles Linienelement festgehalten, so soll immer noch continuirliche Bewegung möglich sein. Wird aber ausserdem ein beliebiges Flächenelement festgehalten, das durch den Punkt und das Linienelement geht, so sollen alle Punkte des Raumes in Ruhe bleiben.

Es ist zunächst leicht einzusehen, dass um ein beliebiges reelles Linienelement, das man festhält, jedes hindurchgehende reelle Flächenelement sich drehen kann; sonst blieben ja zugleich mit dem Linienelement alle Punkte des Raumes in Ruhe.

Hieraus lässt sich schliessen, dass unsere Gruppe *transitiv* sein muss; blieben nämlich ∞^1 reelle Flächen $\varphi = a$ invariant, so bestimmte jeder Punkt mit der Tangentialebene der durch ihn gehenden Fläche $\varphi = a$ ein Flächenelement, das sich nicht um seine Linienelemente drehen könnte. Blieben andrerseits ∞^2 reelle Curven invariant, so liessen sich dieselben sogar auf unbegrenzt viele Weisen zu ∞^1 invarianten Flächen vereinigen; man käme also auf den eben als unmöglich nachgewiesenen Fall.

Wir erkannten, dass jedes Flächenelement sich um jedes in ihm gelegene Linienelement drehen kann. Hieraus folgt, dass die durch einen festgehaltenen Punkt gehenden Linienelemente transitiv transformirt werden und zwar derart, dass jedes reelle Linienelement ohne Ausnahme in jedes andere übergehen kann. Wäre nämlich mit jedem reellen Punkte auch nur ein einziger reeller Kegel invariant verknüpft, so könnte ein Flächenelement, dessen Ebene diesen Kegel berührt, sich nicht um jedes in ihm liegende Linienelement drehen.

Fassen wir alle durch einen festgehaltenen Punkt gehenden Linienelemente als eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit auf, so leuchtet ein, dass diese zweidimensionale Mannigfaltigkeit durch eine projective Gruppe transformirt wird, welche ausnahmslos die im ersten Paragraphen vorausgesetzten Eigenschaften besitzt. Wird nämlich ein reelles Linienelement festgehalten, so können die durch dasselbe gehenden reellen Flächenelemente sich noch bewegen; hält man aber sowohl ein reelles Linienelement, als ein hindurchgehendes reelles Flächenelement fest, so bleiben alle ∞^2 Linienelemente in Ruhe.

Die Linienelemente, welche durch einen festgehaltenen

Digitized by Google

Punkt gehen, werden daher durch eine projective Gruppe transformirt, und diese Gruppe besteht aus allen projectiven Transformationen, die einen gewissen durch eine reelle Gleichung dargestellten imaginären Kegel zweiten Grades invariant lassen. Hieraus folgt, wie wir beiläufig bemerken, dass unsere Gruppe von Transformationen des Raumes *primitiv* ist, denn es ist unmöglich, jedem Punkte des Raumes ein mit ihm invariant verknüpftes Linien- oder Flächen-Element zuzuordnen.

Wir haben gefunden, dass mit jedem Punkte des Raumes ein gewisser Kegel zweiten Grades invariant verknüpft ist. Anders ausgesprochen: es lässt jede Gruppe des Raumes $x_1\ x_2\ x_3$, welche die verlangten Eigenschaften besitzt, eine Differentialgleichung zweiten Grades

$$\sum_{i,k}^{1,2,3} f_{ik}(x_1 x_2 x_3)\, dx_i\, dx_k = 0$$

mit nicht identisch verschwindender Determinante

$$\sum \pm f_{11} f_{22} f_{33}$$

und mit reellen Coefficienten f_{ik} invariant.

In einer älteren Arbeit, die im *neunten* Bande des norwegischen Archivs für Mathematik gedruckt ist, habe ich nun alle primitiven Gruppen des Raumes bestimmt, welche diese Eigenschaften besitzen [1]). Es ergab sich, dass nur vier verschiedene Fälle möglich sind. Alle derartigen Gruppen sind ähnlich

---

1) Ich halte es nicht für nothwendig hier die Rechnungen zu wiederholen, welche mich zu den im Texte angeführten Resultaten geführt haben. Ich werde aber kurz andeuten, wie man diese Resultate in der Ausdehnung, in welcher sie für das Folgende nothwendig sind, ableiten kann.

Ist der Coordinatenanfang $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ein Punkt von allgemeiner Lage und ist, wie wir immer annehmen können:

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = 0$$

die Gleichung des diesem Punkte zugeordneten Kegels, so leuchtet ein, dass unsere Gruppe sechs infinitesimale Transformationen enthält, deren Reihenentwickelungen nach $x_1 x_2 x_3$ die Form

$$p_1 + \cdots,\ p_2 + \cdots\ p_3 + \cdots$$
$$x_1 p_2 - x_2 p_1 + a_{12}(x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3) + \cdots$$
$$x_2 p_3 - x_3 p_2 + a_{23}(x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3) + \cdots$$
$$x_3 p_1 - x_1 p_3 + a_{31}(x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3) + \cdots$$

Digitized by

entweder mit der sechsgliedrigen Gruppe der Euclidischen Bewegungen,

oder mit der sechsgliedrigen Gruppe der Nichteuclidischen Bewegungen, d. h. der Gruppe einer durch eine reelle Gleichung dargestellten reellen oder imaginären Fläche zweiten Grades,

oder mit der siebengliedrigen Gruppe aller Aehnlichkeitstransformationen,

oder mit der zehngliedrigen Gruppe der reciproken Radien.

---

besitzen. Da nur sechsgliedrige Gruppen in Betracht kommen, so ergiebt sich durch paarweise Combination der drei letzten infinitesimalen Transformationen, dass die Constanten a_{ik} gleich Null sind. Führen wir aber auf $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ etwa die infinitesimale Transformation

$$A(f) = x_1 p_2 - x_2 p_1 + \cdots$$

aus, so verschwindet in der Reihenentwickelung des Ausdrucks

$$A(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

das Glied niedrigster Ordnung. Hieraus lässt sich durch Betrachtungen, auf die ich nicht eingehe, der Schluss ziehen, dass die invariante Gleichung:

$$\sum \pm f_{ik}(x_1 x_2 x_3)\, dx_i\, dx_k = 0$$

eine solche Form erhalten kann, dass der *Ausdruck* $\sum f_{ik}\, dx_i\, dx_k$ bei allen infinitesimalen und auch bei allen endlichen Transformationen unserer Gruppe invariant bleibt. — Nachdem hiermit die Existenz eines bei unserer Gruppe invarianten *Bogenelementes* erkannt ist, beweist man, dass jede reelle Gruppe von dieser Beschaffenheit entweder mit der Gruppe der Euclidischen oder mit der Gruppe der Nichteuclidischen Bewegungen ähnlich ist und zwar durch eine reelle Transformation. In meiner früher citirten Abhandlung habe ich übrigens den Begriff Bogenelement gar nicht benutzt. Ich stützte mich darauf, dass die Bestimmung aller in $dx_1\, dx_2\, dx_3$ homogenen Gleichungen

$$f(x_1 x_2 x_3,\ dx_1 dx_2 dx_3) = 0$$

die eine continuirliche Gruppe in $x_1 x_2 x_3$ gestalten, unmittelbar hervorgeht aus meiner Bestimmung aller Differentialgleichungen dritter Ordnung

$$F(x\, y\, y'\, y''\, y''') = 0\ ,$$

die eine continuirliche Berührungstransformationsgruppe der Ebene xy zulassen.

Im *zehnten* Bande des norwegischen Archivs habe ich das entsprechende Problem für einen Raum mit mehr als 3 Dimensionen behandelt und bin durch eine rationelle Methode, die allerdings ziemlich ausführliche Rechnungen verlangt, zu ganz entsprechenden Resultaten gekommen.

Digitized by Google

Es ist leicht zu erkennen, dass eine Gruppe, welche die von uns im Anfange dieses Paragraphen gestellten Forderungen erfüllt, *sechsgliedrig* sein muss. In der That, da unsere Gruppe transitiv ist, da ferner die durch einen festgehaltenen Punkt gehenden Linienelemente transitiv transformirt werden, da endlich jedes Flächenelement sich um ein beliebiges in ihm gelegenes Linienelement drehen kann, so entspricht das Festhalten eines Punktes, eines hindurchgehenden Linienelementes und eines durch beide gehenden Flächenelementes genau *sechs* Bedingungen.

Unter den vier soeben angegebenen primitiven Gruppen, welche eine Differentialgleichung:

$$\sum_{i,k}^{1,2,3} f_{ik}(x_1 x_2 x_3)\, dx_i\, dx_k = 0$$

mit nicht identisch verschwindender Determinante

$$\sum \pm f_{11} f_{22} f_{33}$$

invariant lassen, kommen daher nur diejenigen in Betracht, welche sechs Parameter enthalten. Das ist der Fall mit der Gruppe der Euclidischen Bewegungen, sowie mit der Gruppe der Nichteuclidischen Bewegungen, wobei nicht zu vergessen ist, dass es zweierlei Gruppen von Nichteuclidischen Bewegungen giebt, jenachdem die invariante Fläche zweiten Grades reell oder imaginär ist.

Wir erhalten somit das folgende besonders wichtige Resultat:

Theorem 1. *Wenn eine reelle Transformationsgruppe des dreifach ausgedehnten Raumes innerhalb eines gewissen Bereiches so beschaffen ist, dass noch continuirliche Bewegung möglich ist, wenn ein beliebiger reeller Punkt und ein beliebiges hindurchgehendes reelles Linienelement festgehalten werden, während dagegen alle Punkte des Raumes in Ruhe bleiben, sobald ausserdem noch ein durch das besprochene Linienelement gehendes reelles Flächenelement festgehalten wird, so ist die Gruppe durch eine reelle Transformation ähnlich entweder mit der Gruppe der Euclidischen Bewegungen oder mit der Gruppe der Nichteuclidischen Bewegungen, das heisst mit der projectiven Gruppe einer Fläche zweiten Grades, deren Gleichung eine der beiden Formen*

Digitized by Google

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \pm 1 = 0$$

besitzt.

Man kann sich von vornherein auf *projective* Gruppen beschränken und nach allen projectiven Gruppen fragen, welche entweder *innerhalb eines gewissen Bereiches* oder *ausnahmslos* die früher gestellten Forderungen erfüllen. Auf diese Fragestellung kommen wir erst in einem späteren Paragraphen zurück. Es ist nämlich nothwendig, zuerst eine allgemeine Untersuchung über gewisse projective Gruppen durchzuführen.

§ 3.

Ehe wir weiter gehen, müssen wir, wie soeben gesagt, eine für das Folgende nothwendige Hülfstheorie entwickeln.

Wir stellen die Frage nach allen reellen projectiven Gruppen des n-fach ausgedehnten Raumes $x_1 \cdots x_n$, welche mit der projectiven Gruppe einer Fläche zweiten Grades:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 \pm 1 = 0$$

durch eine reelle Transformation ähnlich sind.

Indem wir annehmen, dass der Coordinatenanfang $x_k = 0$ ein Punkt von allgemeiner Lage ist, können wir ohne Beschränkung annehmen, dass jede der gesuchten projectiven Gruppen:

$$n + \frac{n(n-1)}{2}$$

infinitesimale Transformationen von der Form:

$$p_k + \sum_{ij} \alpha_{kij} x_i p_j + \sum_j \beta_{kj} x_j \sum_i x_i p_i \,, \quad (k = 1 \ldots n)$$

$$x_i p_k - x_k p_i + \sum_j \gamma_{ikj} x_j \sum_\alpha x_\alpha p_\alpha \,, \quad (i, k = 1 \ldots n)$$

enthält. Setzen wir zur Abkürzung

$$x_j (x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n) = S_j \,,$$

Digitized by Google

so können die $\frac{n(n-1)}{2}$ letzten infinitesimalen Transformationen folgendermassen geschrieben werden:

$$x_i p_k - x_k p_i + \sum_j \gamma_{ikj} S_j .$$

Wir combiniren die beiden infinitesimalen Transformationen:

$$x_i p_k - x_k p_i + \sum_j \gamma_{ikj} S_j$$

$$x_i p_\nu - x_\nu p_i + \sum_\varrho \gamma_{i\varrho} S_{\varrho\nu}$$

und erhalten so die infinitesimale Transformation:

$$x_\nu p_k - x_k p_\nu + \gamma_{i\nu k} S_i - \gamma_{ii\nu} S_k - \gamma_{ik\nu} S_i + \gamma_{iki} S_\nu .$$

Ist nun, wie wir vorläufig annehmen wollen, $n > 3$, so ist den beiden Zahlen ν und k gegenüber keine dritte Zahl i ausgezeichnet; also muss in diesem Falle

$$(\gamma_{i\nu k} - \gamma_{ik\nu}) S_i = 0$$

sein. Die durch Combination gefundene infinitesimale Transformation hat daher die Gestalt:

$$x_\nu p_k - x_k p_\nu + \gamma_{iki} S_\nu - \gamma_{i\nu i} S_k$$

und da die Form dieser infinitesimalen Transformationen von der Zahl i unabhängig sein muss, können wir

$$\gamma_{i\nu i} = \gamma_{j\nu j} = \gamma_\nu$$

setzen.

Die $\frac{n(n-1)}{2}$ infinitesimalen Transformationen unsrer reellen Gruppe, welche in der Umgebung des Punktes $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$ von der ersten Ordnung sind, besitzen somit die Form:

$$x_i p_k - x_k p_i + \gamma_k S_i - \gamma_i S_k = A_{ik} f .$$

Diese Transformationen lassen, wie wir jetzt zeigen werden, eine gewisse Ebene

Digitized by Google

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + 1 = 0$$

invariant. Es ist nämlich

$$A_{ik}(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) =$$

$$\lambda_k x_i - \lambda_i x_k + \gamma_k x_i \sum_j \lambda_j x_j - \gamma_i x_k \sum_j \lambda_j x_j \ ;$$

mit Benutzung der Gleichung der betreffenden Ebene wird also:

$$A_{ik}(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + 1) = (\lambda_k - \gamma_k) x_i - (\lambda_i - \gamma_i) x_k \ .$$

Dieser Ausdruck verschwindet, wenn $\lambda_k = \gamma_k$ gesetzt wird. Da nun unsere infinitesimalen Transformationen $A_{ik} f$, solange eines der γ_k von Null verschieden ist, die unendlich ferne Ebene nicht in Ruhe lassen, erkennen wir, dass die $A_{ik} f$ unter allen Umständen eine und nur eine Ebene in Ruhe lassen.

Es liegt nahe diese Ebene ins Unendliche zu verlegen. Denken wir uns das von vornherein gemacht, so müssen alle γ_k verschwinden und unsere infinitesimalen Transformationen erster Ordnung dementsprechend die einfache Form $x_i p_k - x_k p_i$ besitzen.

Wir wollen dieses allerdings ziemlich selbstverständliche Resultat durch Rechnung bestätigen. Wir wollen also zeigen, dass die infinitesimalen Transformationen:

$$x_i p_k - x_k p_i - \gamma_i S_k + \gamma_k S_i$$

in den Veränderlichen:

$$x_j' = \frac{x_j}{\gamma_1 x_1 + \cdots + \gamma_n x_n + 1}$$

die Form $x_i' p_k' - x_k' p_i'$ annehmen.

Diesen Nachweis führen wir dadurch, dass wir in

$$A f = x_i' p_k' - x_k' p_i'$$

die Veränderlichen x_j durch die inverse Substitution

$$x_j = \frac{x_j'}{1 - \gamma_1 x_1' - \cdots - \gamma_n x_n'}$$

Digitized by Google

einführen. Es ist

$$Ax_j = \varepsilon_{kj} x_i - \varepsilon_{ij} x_k + \gamma_k x_j x_i - \gamma_i x_j x_k$$

und demzufolge:

$$Af = \sum_1^n A\, x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = x_i p_k - x_k p_i + \gamma_k S_i - \gamma_i S_k$$

oder

$$x_i' p_k' - x_k' p_i' = x_i p_k - x_k p_i + \gamma_k S_i - \gamma_i S_k \ .$$

Wir können daher ohne Beschränkung annehmen, dass alle γ_k gleich Null sind, so dass unsere infinitesimalen Transformationen erster Ordnung die Form:

$$x_i p_k - x_k p_i$$

besitzen.

Es erübrigt noch die Transformationen nullter Ordnung genauer zu bestimmen. Zu diesem Zwecke combiniren wir die infinitesimale Transformation:

$$p_i + \sum_{kj}^{1\ldots n} \lambda_{ikj} x_k p_j + \sum_1^n \mu_{ij} S_j$$

mit $x_i p_k - x_k p_i$ und erhalten hierdurch eine infinitesimale Transformation von der Form:

$$p_k + \sum_1^n \alpha_{\mu k} x_\mu p_k + \sum_1^n \beta_{\mu i} x_\mu p_i +$$

$$+ \sum_1^n \gamma_{k\mu} x_k p_\mu + \sum_1^n \delta_{i\mu} x_i p_\mu + \sum_1^n \varphi_{kj} S_j \ .$$

Da aber gegenüber der Zahl k keine andere Zahl i ausgezeichnet ist, folgt, dass die $\beta_{\mu i}$ und $\delta_{i\mu}$ gleich Null sein müssen. Unsere infinitesimalen Transformationen nullter Ordnung haben somit die Form:

$$p_k + \sum_1^n \alpha_{\mu k} x_\mu p_k + \sum_1^n \gamma_{k\mu} x_k p_\mu + \sum_1^n \varphi_{kj} S_j \ .$$

Digitized by Google

Combiniren wir nun diese infinitesimale Transformation mit

$$x_\mu p_i - x_i p_\mu , \quad (k \neq i, k \neq \mu)$$

so kommt:

$$\gamma_{k\mu} x_k p_i - \gamma_{ki} x_k p_\mu - \alpha_{ik} x_\mu p_k + \alpha_{\mu k} x_i p_k - \varphi_{ki} S_\mu + \varphi_{k\mu} S_i .$$

Diese Transformation muss unserer Gruppe angehören; daher ist

$$\gamma_{k\mu} + \alpha_{\mu k} = 0 , \ \gamma_{ki} + \alpha_{ik} = 0$$

$$\varphi_{ki} = \varphi_{k\mu} = 0 .$$

Unsere infinitesimalen Transformationen nullter Ordnung haben somit die Form:

$$p_\mu + \sum_1^n{}_\nu \alpha_{\mu\nu} (x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu) + \alpha_\mu x_\mu p_\mu + \beta_\mu S_\mu$$

oder, wenn alle $\alpha_{\mu\nu}$ mit zwei verschiedenen Indices, wie offenbar erlaubt, gleich Null gesetzt werden, die noch einfachere Form:

$$p_\mu + \alpha_\mu x_\mu p_\mu + \beta_\mu S_\mu .$$

Mit $x_\mu p_i - x_i p_\mu$ combinirt giebt diese Transformation:

$$p_i + \alpha_\mu (x_\mu p_i + x_i p_\mu) + \beta_\mu S_i .$$

Man erkennt somit, dass alle α_μ gleich Null sind und dass der Coefficient β_μ vom Index μ unabhängig ist..

Wäre nun dieser Coefficient β gleich Null, so erhielten unsere infinitesimalen Transformationen die Form:

$$p_i , \ x_\nu p_k - x_k p_\nu$$

$$(i , \nu , k = 1 \ldots n) ;$$

dann aber bildeten die Translationen $p_1 \ldots p_n$ eine *invariante* Untergruppe und das ist von vornherein ausgeschlossen, da nach meinen Untersuchungen für $n \geqq 3$ die continuirliche Gruppe

Digitized by Google

einer Fläche zweiten Grades mit nicht verschwindender Determinante einfach ist [1]).

Es ist daher β eine von Null verschiedene positive oder negative Grösse.

Wir wollen nun unter $\sqrt{\pm\beta}$ eine reelle Grösse verstehen und führen die n reellen Grössen

$$x_k' = x_k\sqrt{\pm\beta}, \quad (k = 1 \ldots n)$$

als neue unabhängige Veränderliche ein. Dann wird

$$p_k + \beta S_k = \sqrt{\pm\beta}\cdot p_k' + \frac{\beta}{\sqrt{\pm\beta}} x_k' \sum_1^n{}_j x_j' p_j'$$

oder

$$p_k + \beta S_k = \sqrt{\pm\beta}\left(p_k' \pm x_k' \sum_1^n{}_j x_j' p_j'\right).$$

Es ist daher gestattet die Constante β gleich ± 1 zu setzen. Im ersten Falle erhalten wir die infinitesimalen Transformationen:

$$p_k + S_k, \quad x_i p_\mu - x_\mu p_i$$
$$(k, i, \mu = 1 \ldots n),$$

das heisst, alle infinitesimalen projectiven Transformationen, welche die imaginäre Fläche zweiten Grades:

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 + 1 = 0$$

---

1) Im zehnten Bande des norwegischen Archivs (1885) habe ich gezeigt, dass die continuirliche Gruppe einer Fläche zweiten Grades mit nicht verschwindender Determinante solange n von 3 verschieden ist, *einfach* ist. Hieraus geht *unmittelbar* hervor, dass die Gruppe der Nichteuclidischen Bewegungen sich dadurch von der Gruppe der Euclidischen Bewegungen unterscheidet, dass die erste Gruppe einfach, die zweite zusammengesetzt ist. Unabhängig von mir ist der dänische Geometer PETTERSEN zu demselben Resultate gekommen. Soweit mir bekannt, hat sich jedoch Herr PETTERSEN, dessen Arbeit mir leider im Augenblicke nicht zugänglich ist, auf die Ebene beschränkt. Im dreifach ausgedehnten Raume ist die continuirliche Gruppe einer Fläche zweiten Grades zusammengesetzt. Sie hat *zwei* invariante dreigliedrige Untergruppen, deren Transformationen *nicht paarweise* vertauschbar sind. Dagegen hat die Gruppe der Euclidischen Bewegungen nur *eine* invariante Untergruppe, deren Transformationen *sämmtlich vertauschbar* sind.

Digitized by Google

in sich überführen; im zweiten Falle erhalten wir die infinitesimalen Transformationen

$$p_k - S_k\ ,\quad x_i p_\mu - x_\mu p_k\ ,\quad (k, i, \mu = 1 \ldots n)\ ,$$

dass heisst die allgemeinsten infinitesimalen projectiven Transformationen, welche die reelle Fläche zweiten Grades

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 1 = 0$$

in sich transformiren.

Die vorausgehenden Entwickelungen liefern uns somit den folgenden allgemeinen Satz:

Satz 4. *Ist eine reelle projective Gruppe des Raumes $x_1 \cdots x_n$ durch eine reelle Transformation ähnlich mit der (continuirlichen) projectiven Gruppe einer Fläche zweiten Grades mit der Gleichungsform:*

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 \pm 1 = 0\ ,$$

so kann sie durch eine reelle projective Transformation der Veränderlichen entweder in die projective Gruppe der imaginären Fläche:

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 + 1 = 0$$

oder in die projective Gruppe der reellen Fläche:

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 1 = 0$$

übergeführt werden.

Dieser Satz bleibt natürlich noch gültig, wenn das eingeklammerte Wort »*continuirlichen*« gestrichen wird.

Die vorangehenden Entwickelungen liefern uns auch den folgenden Satz:

Satz 5. *Ist eine reelle projective Gruppe des Raumes $x_1 \cdots x_n$ mit der Gruppe der Euclidischen Bewegungen dieses Raumes durch eine reelle Transformation ähnlich, so ist sie mit ihr innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe des Raumes $x_1 \ldots x_n$ durch eine reelle projective Transformation gleichberechtigt.*

Es darf nicht vergessen werden, dass in den vorausgehenden Entwickelungen die Annahme $n > 3$ gemacht wurde. Wir wollen daher jetzt zeigen, dass die abgeleiteten Sätze auch noch gültig bleiben, wenn $n = 3$ ist.

Digitized by Google

In diesem Falle haben wir die drei infinitesimalen Transformationen erster Ordnung:

$$x_1 p_2 - x_2 p_1 + \alpha_{121} S_1 + \alpha_{122} S_2 + \alpha_{123} S_3$$
$$x_1 p_3 - x_3 p_1 + \alpha_{131} S_1 + \alpha_{132} S_2 + \alpha_{133} S_3$$
$$x_2 p_3 - x_3 p_2 + \alpha_{231} S_1 + \alpha_{232} S_2 + \alpha_{233} S_3.$$

Combiniren wir nun die beiden ersten infinitesimalen Transformationen, so erhalten wir die Transformation:

$$x_3 p_2 - x_2 p_3 + \alpha_{132} S_1 - \alpha_{131} S_2 - \alpha_{123} S_1 + \alpha_{121} S_3 ;$$

also ist

$$\alpha_{132} - \alpha_{123} = \alpha_{321} ,$$
$$\alpha_{131} = - \alpha_{322} , \quad \alpha_{121} = \alpha_{323} .$$

Unsere drei infinitesimalen Transformationen haben somit die Form:

$$x_1 p_2 - x_2 p_1 + \alpha_2 S_1 - \alpha_1 S_2 + \alpha_{123} S_3$$
$$x_3 p_1 - x_1 p_3 - \alpha_3 S_1 + \alpha_{312} S_2 + \alpha_1 S_3$$
$$x_2 p_3 - x_3 p_2 + \alpha_{231} S_1 + \alpha_3 S_2 - \alpha_2 S_3 .$$

Wird die letzte unter diesen Transformationen mit

$$p_1 + \sum_{kj}^{1 \ldots 3} \lambda_{kj} x_k p_j + \sum_{k}^{1 \ldots 3} \mu_k S_k$$

combinirt, so enthält die hervorgehende infinitesimale Transformation erster Ordnung das Glied $x_1 p_1$ mit dem Factor $- \alpha_{231}$, der somit verschwindet. Es ist daher

$$\alpha_{231} = \alpha_{312} = \alpha_{123} = 0 ,$$

und unsere infinitesimalen Transformationen erster Ordnung besitzen die Form:

$$x_i p_k - x_k p_i + \alpha_k S_i - \alpha_i S_k ,$$

genau wie wenn n grösser als 3 ist. Wir kommen daher im Falle $n = 3$ genau zu demselben Resultate wie im Falle $n > 3$.

Digitized by Google

Auch wenn $n = 2$ ist, bleiben die aufgestellten Sätze gültig. Dies folgt unmittelbar daraus, dass die einzige infinitesimale Transformation erster Ordnung, welche in diesem Falle auftritt, von vorneherein die Form

$$x_1 p_2 - x_2 p_1 + c_1 S_1 + c_2 S_2$$

besitzt. Die Erledigung dieses Falles liegt übrigens implicite in der von mir längst durchgeführten Bestimmung aller projectiven Gruppen einer Ebene. Ich darf wohl hinzufügen, dass auch der Fall $n = 3$ von mir schon in einer älteren Arbeit erledigt worden ist.

§ 4.

Auf S. 295 fragten wir nach allen reellen *projectiven* Gruppen des dreifach ausgedehnten Raumes, welche ausnahmslos oder innerhalb eines gewissen Bereiches *freie Beweglichkeit im Infinitesimalen* besitzen. Wir können jetzt diese Frage sehr leicht beantworten.

Jede Gruppe von der verlangten Beschaffenheit ist nach den Entwickelungen des zweiten Paragraphen durch eine reelle Transformation ähnlich entweder mit der Gruppe der Euclidischen oder mit der Gruppe der Nichteuclidischen Bewegungen des dreifach ausgedehnten Raumes.

Nun aber suchen wir nur *projective* Gruppen mit den betreffenden Eigenschaften. Es zeigen also die Entwickelungen des vorigen Paragraphen, dass jede Gruppe von der verlangten Beschaffenheit mit einer der genannten projectiven Gruppen innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe durch eine reelle Transformation gleichberechtigt sein muss.

Wollen wir, dass die gesuchte Gruppe *ausnahmslos* für alle Punkte des Raumes freie Beweglichkeit im Infinitesimalen besitzen soll, so muss die Gruppe der Euclidischen Bewegungen ausgeschlossen werden, da sie die unendlich ferne Ebene in Ruhe lässt und die Elemente dieser Ebene in Folge dessen sich nicht um ihre Linienelemente drehen können. Gleichzeitig müssen alle mit dieser Gruppe innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe gleichberechtigten Gruppen ausgeschlossen werden.

Unser Resultat ist also das folgende:

Digitized by Google

Satz 6. *Besitzt eine reelle continuirliche projective Gruppe des dreifach ausgedehnten Raumes ausnahmslos freie Beweglichkeit im Infinitesimalen, so besteht sie aus allen reellen projectiven Transformationen, welche eine durch eine reelle Gleichung dargestellte imaginäre Fläche zweiten Grades mit nicht verschwindender Determinante in sich überführen.*

Satz 7. *Besitzt eine reelle projective Gruppe des dreifach ausgedehnten Raumes zwar nicht ausnahmslos, jedoch innerhalb eines gewissen Bereiches freie Beweglichkeit im Infinitesimalen, so sind zwei Fälle denkbar. Entweder besteht die Gruppe aus allen projectiven Transformationen, welche eine geschlossene reelle Fläche zweiten Grades (Ellipsoid, zweischaliges Hyperboloid, elliptisches Paraboloid) in sich überführen; oder die Gruppe ist innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe mit der Gruppe der Euclidischen Bewegungen durch eine reelle Transformation gleichberechtigt.*

§ 5.

Jetzt können wir unsere allgemeinen Probleme ohne Schwierigkeit für einen vierfach ausgedehnten Raum R_4 erledigen.

Wir suchen zunächst im vierfach ausgedehnten Raume $x_1 x_2 x_3 x_4$ alle reellen Transformationsgruppen, bei denen *innerhalb eines gewissen Bereiches* freie Beweglichkeit im Infinitesimalen in dem folgenden Sinne stattfindet:

Wird ein beliebiger reeller Punkt, ein beliebiges hindurchgehendes reelles M_1-Element und ein beliebiges durch beide gehendes reelles M_2-Element festgehalten, so ist noch continuirliche Bewegung des Raumes R_4 möglich; wird jedoch ausserdem noch ein durch das M_2-Element gehendes reelles M_3-Element festgehalten, so bleiben alle Punkte des Raumes in Ruhe.

Um dieses Problem zu erledigen, betrachten wir die durch einen festgehaltenen Punkt P gehenden ∞^3 reellen M_1-Elemente als Punkte eines dreifachen Raumes R_3', welcher von einer projectiven Gruppe transformirt wird. Diese projective Gruppe hat nun, wie wir jetzt zeigen werden, die in § 4 vorausgesetzten Eigenschaften.

Wird im Raume R_4 der reelle Punkt P, ein hindurchgehendes reelles M_1-Element, sowie ein durch dasselbe gehendes reelles M_2-Element festgehalten, so heisst dies, dass im Raume R_3' ein reeller Punkt und ein hindurchgehendes reelles Linien-

Digitized by Google

element festgehalten werden. Gäbe es nun unter den durch dieses Linienelement gehenden reellen Flächenelementen auch nur ein einziges, welches unter den gemachten Voraussetzungen sich nicht um das Linienelement drehen könnte, so existirte im Raume R_4 ein durch den Punkt P, durch das festgehaltene Linienelement, sowie durch das festgehaltene M_2-Element gehendes reelles M_3-Element, welches sich um dieses M_2-Element nicht drehen könnte. Dann blieben aber alle Punkte des Raumes R_4 in Ruhe, was unserer Voraussetzung der freien Beweglichkeit im Infinitesimalen widersprechen würde.

Die reelle *projective* Gruppe unseres dreifachen Raumes R_3' besitzt daher in dem bekannten Sinne des Wortes *freie Beweglichkeit im Infinitesimalen* und zwar *ausnahmslos*. Sie besteht in Folge dessen aus allen reellen projectiven Transformationen, welche eine durch eine reelle Gleichung dargestellte imaginäre Mannigfaltigkeit zweiten Grades mit nicht verschwindender Determinante in sich überführen.

Hieraus folgt, dass die vorgelegte Gruppe des vierfachen Raumes R_4 eine reelle Gleichung zweiten Grades:

$$\sum_{i,k}^{1,\dots 4} f_{ik}(x_1 \dots x_4)\, dx_i\, dx_k = 0$$

mit nicht identisch verschwindender Determinante:

$$\sum \pm \varphi_{11} \cdots \varphi_{44}$$

invariant lässt.

Die Gruppe des Raumes R_4 ist transitiv. Existirten nämlich ∞^1 (oder noch mehr) invariante reelle Mannigfaltigkeiten M_3, so würde in jedem Punkte des Raumes die ebene Tangential-E_3 an die durch den Punkt gehende M_3 ein M_3-Element bestimmen, das sich nicht um jedes in ihm enthaltene M_2-Element drehen könnte. Das aber würde unserer Voraussetzung widersprechen, also leuchtet ein, dass die Gruppe unseres vierfach ausgedehnten Raumes *transitiv* ist.

Nunmehr ist es leicht, die Zahl der Parameter unserer Gruppe zu bestimmen.

Einen Punkt P des vierfachen Raumes R_4 festhalten kommt auf *vier* Bedingungen hinaus. Da andererseits die durch P

Digitized by Google

gehenden Linien-Elemente durch eine *sechs*gliedrige Gruppe transformirt werden, und da es sicher ist, dass alle Punkte des Raumes R_4 in Ruhe bleiben, sobald alle durch P gehenden Linienelemente festgehalten werden, so leuchtet ein, dass gerade zehn Bedingungen erforderlich sind, um alle Punkte des Raumes R_4 in Ruhe zu halten. Dieser Raum wird somit durch eine *zehngliedrige* Gruppe transformirt.

Wir setzen voraus, dass der Coordinatenanfang: $x_k = 0$ ein Punkt von allgemeiner Lage ist. Dann enthält unsere Gruppe vier infinitesimale Transformationen von der Form:

$$p_k + \cdots, \quad (k = 1, 2, 3, 4) \ .$$

Setzen wir nun ferner voraus, dass die bei der zehngliedrigen Gruppe invariante Differentialgleichung:

$$\sum_{ik}^{1\ldots4} f_{ik}(x)\, dx_i\, dx_k = 0$$

bei der Substitution $x_k = 0$ die Form

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 = 0$$

annimmt, so muss unsere Gruppe sechs infinitesimale Transformationen von der Form:

$$x_i p_k - x_k p_i + \alpha_{ik} \sum_{j}^{1\ldots4} x_j p_j + \cdots, \quad (i, k = 1 \cdots 4)$$

enthalten; dieselben zeigen, wie die durch den Coordinatenanfang gehenden Linienelemente transformirt werden, wenn dieser Punkt festgehalten wird.

Da unsere Gruppe des Raumes R_4 zehngliedrig ist, so enthält sie keine anderen infinitesimalen Transformationen als die vier von reeller Ordnung $p_k + \cdots$ und die sechs soeben besprochenen von erster Ordnung. Es ist dabei leicht zu erkennen, dass die Constanten α_{ik} alle gleich Null sind. Das ergiebt sich nämlich sogleich, wenn man die beiden infinitesimalen Transformationen:

$$x_i p_v - x_v p_i + \alpha_{iv} \sum_j x_j p_j + \cdots$$

$$x_i p_k - x_k p_v + \alpha_{ik} \sum_j x_j p_j + \cdots$$

combinirt.

Digitized by Google

Es stellt sich also die Aufgabe, im Raume $x_1 \dots x_4$ alle zehngliedrigen Gruppen zu finden, welche zehn infinitesimale Transformationen von der Form

$$p_1 + \cdots, \quad \cdots, \quad p_4 + \cdots,$$
$$x_i p_k - x_k p_i + \cdots, \quad (i, k = 1 \cdots 4)$$

enthalten.

Dieses Problem habe ich eingehend im *zehnten* Bande des norwegischen »Archiv for Mathematik« behandelt. Es ergab sich, dass die betreffende Gruppe entweder mit der Gruppe aller Euclidischen, oder mit einer der beiden Gruppen von Nichteuclidischen Bewegungen des Raumes R_4 ähnlich sein muss und zwar durch eine reelle Transformation, was allerdings a. a. O. nicht hervorgehoben ist, aber sehr leicht eingesehen werden kann.

Hiermit erhalten wir das folgende Theorem:

Theorem 2. *Besitzt eine Gruppe von reellen Punkttransformationen des vierfach ausgedehnten Raumes $x_1 \dots x_4$ im früher erklärten Sinne des Wortes innerhalb eines gewissen Bereiches freie Beweglichkeit im Infinitesimalen, so sind zwei Fälle möglich. Die Gruppe ist durch eine reelle Transformation ähnlich entweder mit der Gruppe der Euclidischen Bewegungen oder mit der Gruppe der Nichteuclidischen Bewegungen des vierfachen Raumes. Im letzten Falle kann die invariante Fläche zweiten Grades, die immer durch eine reelle Gleichung dargestellt wird, reell oder imaginär sein.*

§ 6.

Wir stellen nun die Frage nach allen reellen *projectiven* Gruppen des vierfach ausgedehnten Raumes, welche entweder ausnahmslos oder jedenfalls innerhalb eines gewissen Bereiches freie Beweglichkeit im Infinitesimalen in dem früher angegebenen Sinne besitzen.

Die betreffenden Gruppen sind nach den Entwickelungen des vorigen Paragraphen durch eine relle Transformation ähnlich entweder mit der Gruppe aller Euclidischen Bewegungen oder mit der Gruppe aller Nichteuclidischen Bewegungen des Raumes R_4.

Da aber die gesuchten Gruppen *projectiv* sein sollen, so müssen sie nach den Ergebnissen des § 3 innerhalb der

Digitized by Google

allgemeinen projectiven Gruppe mit einer unter den genannten Gruppen durch eine reelle Transformation gleichberechtigt sein.

Wollen wir, dass die verlangten Eigenschaften ausnahmslos für alle Punkte des Raumes gelten sollen, so muss die Gruppe der Euclidischen Bewegungen sowie alle mit ihr innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe gleichberechtigten reellen Gruppen ausgeschlossen werden. Denn bei einer solchen Gruppe bleibt eine dreifach ausgedehnte reelle *ebene* Mannigfaltigkeit invariant und also können sich die in derselben gelegenen M_3-Elemente nicht frei um jedes in ihnen enthaltenen M_2-Element drehen. Es muss also die gesuchte Gruppe aus allen reellen Transformationen bestehen, welche eine gewisse Fläche zweiten Grades mit nicht verschwindender Determinante in dieses überführen. Dabei leuchtet ein, dass die Fläche, die natürlich durch eine reelle Gleichung dargestellt wird, imaginär sein muss.

Unser Resultat ist also das folgende:

Satz 8. *Besitzt eine reelle continuirliche projective Gruppe des Raumes $x_1 \dots x_4$ freie Beweglichkeit im Infinitesimalen im bekannten Sinne des Wortes, und zwar nicht blos innerhalb eines gewissen Bereiches, sondern ausnahmslos, so besteht diese Gruppe aus allen reellen projectiven Transformationen, welche eine durch eine reelle Gleichung dargestellte imaginäre dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit zweiten Grades mit nicht verschwindender Determinante in sich überführen.*

Satz 9. *Besitzt eine reelle projective Gruppe des Raumes $x_1 \dots x_4$ zwar nicht ausnahmslos, aber doch innerhalb eines gewissen Bereiches freie Beweglichkeit im Infinitesimalen, so sind zwei Fälle denkbar. Entweder besteht die Gruppe aus allen reellen projectiven Transformationen, welche eine geschlossene reelle Fläche zweiten Grades mit nicht verschwindender Determinante in sich überführen; oder sie ist durch eine reelle projective Transformation ähnlich mit der Gruppe*

$$p_1 \cdots p_4, \quad x_i p_k - x_k p_i, \ (i, k = 1 \cdots 4)$$

aller Euclidischen Bewegungen des Raumes $x_1 \dots x_4$.

§ 7.

Jetzt übersieht man leicht, wie man die für den drei- und vierfach ausgedehnten Raum abgeleiteten Sätze auf den n-fach

Digitized by Google

ausgedehnten Raum übertragen kann. Man zeigt allgemein, dass wenn sie für einen $(n-1)$-fach ausgedehnten Raum R_{n-1} gelten, sie dann auch für den n-fach ausgedehnten Raum Gültigkeit haben.

Wir setzen demnach als bewiesen voraus, dass unsere Sätze für den $(n-1)$-fach ausgedehnten Raum R_{n-1} gelten und suchen im Raume R_n alle reellen Transformationsgruppen, bei denen *innerhalb eines gewissen Bereiches freie Beweglichkeit im Infinitesimalen* stattfindet.

Wird ein reeller Punkt $x_1 \ldots x_n$ festgehalten, so bilden die durch diesen Punkt gehenden M_1-Elemente $dx_1 \ldots dx_n$ einen $(n-1)$-fach ausgedehnten Raum R'_{n-1}, welcher durch eine projective Gruppe transformirt wird. Halten wir nun in diesem Raume R'_{n-1} einen Punkt dx_k, ein hindurchgehendes M_1-Element, ein durch dasselbe gehendes reelles M_2-Element u. s. w., endlich ein reelles M_{n-3}-Element fest, so müssen alle durch dieses letzte Element gehenden reellen M_{n-2}-Elemente sich noch drehen können. Sonst bliebe nämlich im Raume R_n, nachdem ein Punkt x_k, ein M_1-Element dx_k, ... ein M_{n-2}-Element festgehalten worden sind, gleichzeitig ein durch dieses M_{n-2}-Element gehendes M_{n-1}-Element und damit überhaupt jeder Punkt des Raumes R_n in Ruhe. Das aber ist von vornherein ausgeschlossen.

Unsere projective Gruppe des Raumes R'_{n-1} besitzt also ausnahmslos freie Beweglichkeit im Infinitesimalen. Daher besteht diese projective Gruppe aus allen reellen projectiven Transformationen, welche eine durch eine reelle Gleichung

$$\sum_{i,k}^{1 \ldots n} f_{ik}(x_1 \cdots x_n)\, dx_i\, dx_k = 0$$

dargestellte imaginäre Mannigfaltigkeit mit nicht verschwindender Determinante invariant lassen.

Die gesuchte Gruppe des Raumes R_n lässt in Folge dessen eine Differentialgleichung zweiten Grades:

$$\sum_{i,k}^{1 \ldots n} f_{ik}(x)\, dx_i\, dx_k = 0$$

mit nicht identisch verschwindender Determinante invariant. Wir nehmen nun an, dass der Coordinatenanfang:

Digitized by Google

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

ein Punkt von allgemeiner Lage ist, und dass die invariante Differentialgleichung bei der Substitution $x_k = 0$ die Form

$$dx_1^2 + \cdots + dx_n^2 = 0$$

annimmt. Die durch den Coordinatenanfang gehenden M_1-Elemente dx_k werden dann durch die allgemeinste continuirliche projective Gruppe transformirt, welche die Mannigfaltigkeit $\sum dx_k^2 = 0$ invariant lässt. Andererseits muss die gesuchte Gruppe des Raumes R_n transitiv sein, denn sonst wäre es möglich, ein M_{n-1}-Element anzugeben, das sich nicht um jedes in ihm enthaltene M_{n-2}-Element drehen könnte. Hieraus ergiebt sich, dass die gesuchte Gruppe $n + n\frac{(n-1)}{2}$ infinitesimale Transformationen von der Form

$$p_1 + \cdots, \quad \cdots + \cdot\cdot p_n + \cdot\cdot$$

$$x_i p_k - x_k p_i + a_{ik} \sum_1^n{}_j x_j p_j + \cdot\cdot,$$

aber keine von diesen unabhängige enthält.

In der früher besprochenen Arbeit im zehnten Bande des norwegischen Archivs habe ich nun alle Gruppen bestimmt, deren infinitesimale Transformationen diese Form besitzen. Ich fand, dass jede derartige Gruppe entweder mit der Gruppe der Euclidischen Bewegungen oder mit der Gruppe der Nichteuclidischen Bewegungen ähnlich ist. Ich kann noch hinzufügen, dass diese Aehnlichkeit durch eine reelle Transformation vermittelt wird; man muss nur beachten, dass vom reellen Standpunkte aus zwei verschiedene Gruppen von Nichteuclidischen Bewegungen zu unterscheiden sind.

Es ist daher das gestellte Problem vollständig erledigt; unsere Ergebnisse lassen sich folgendermassen zusammenfassen:

Theorem 3. *Die Gruppe der Euclidischen Bewegungen:*

$$p_1 \cdots p_n, \quad x_i p_k - x_k p_i, \ (i, k = 1 \cdots n),$$

die Gruppe der Nichteuclidischen Bewegungen:

Digitized by Google

$$p_k + x_k \sum_1^n{}_j\, x_j p_j\,, \quad x_i p_k - x_k p_i$$
$$(i, k = 1 \ldots n)\,,$$

welche die Fläche

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 + 1 = 0$$

invariant lassen, und endlich die Gruppe der Nichteuclidischen Bewegungen

$$p_k - x_k \sum_1^n{}_j\, x_j p_j,\; x_i p_k - x_k p_i$$
$$(i, k = 1 \cdots n)\,,$$

welche die Fläche

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 1 = 0$$

in sich überführen und die mit ihnen durch eine reelle Transformation ähnlichen Gruppen sind die einzigen reellen Transformationsgruppen des Raumes $x_1 \ldots x_n$, welche innerhalb eines Bereiches freie Beweglichkeit im Infinitesimalen in folgendem Sinne des Wortes besitzen: Wird innerhalb dieses Bereiches ein beliebiger reeller Punkt, ein beliebiges hindurchgehendes reelles M_1-Element $dx_1 \ldots dx_n$, ein beliebiges durch das letztere gehendes reelles M_2-Element ..., endlich ein beliebiges reelles M_q-Element festgehalten, so ist continuirliche Bewegung möglich solange und nur solange, als q kleiner als $n - 1$ ist.

Wir stellen andererseits die Frage nach allen reellen *projectiven* Gruppen des n-fach ausgedehnten Raumes $x_1 \ldots x_n$, welche entweder ausnahmslos oder innerhalb eines gewissen Bereiches freie Beweglichkeit im Infinitesimalen in dem angegebenen Sinne besitzen.

Jede derartige Gruppe ist nach den vorangehenden Entwickelungen ähnlich entweder mit der Gruppe der Euclidischen oder mit einer der Gruppen von Nichteuclidischen Bewegungen des n-fach ausgedehnten Raumes $x_1 \ldots x_n$.

Da aber die gesuchte Gruppe projectiv sein soll, so muss sie nach den Ergebnissen des § 3 durch eine reelle projective Transformation mit einer unter den drei betreffenden Gruppen ähnlich sein.

Digitized by Google

Sollen die verlangten Eigenschaften ausnahmslos für alle Punkte des Raumes $x_1 \dots x_n$ gelten, so müssen die Gruppe der Euclidischen Bewegungen und die mit ihr innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe gleichberechtigten reellen Gruppen ausgeschlossen werden. Denn bei einer solchen Gruppe bleibt eine $(n-1)$-fach ausgedehnte reelle ebene Mannigfaltigkeit invariant und daher können die M_{n-1}-Elemente dieser Mannigfaltigkeit sich nicht drehen. Ebenso muss natürlich die projective Gruppe der reellen Mannigfaltigkeit:

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1 = 0$$

ausgeschlossen werden; denn die M_{n-1}-Elemente dieser Mannigfaltigkeit können sich ja nicht frei drehen.

Unsere Ergebnisse lassen sich in die beiden folgenden Sätze zusammenfassen:

Satz 10. *Besitzt eine reelle, continuirliche, projective Gruppe des Raumes $x_1 \dots x_n$ freie Beweglichkeit im Infinitesimalen in dem bekannten Sinne und zwar nicht blos innerhalb eines gewissen Bereiches, sondern ausnahmslos für alle Punkte des Raumes, so besteht die Gruppe aus allen reellen projectiven Transformationen, welche eine durch eine reelle Gleichung zweiten Grades:*

$$\sum b_{ik} x_i x_k + \sum c_k x_k + d = 0$$

dargestellte imaginäre Fläche zweiten Grades mit nicht verschwindender Determinante in sich transformiren.

Satz 11. *Besitzt eine reelle, continuirliche, projective Gruppe des Raumes $x_1 \dots x_n$ nicht ausnahmslos, aber doch innerhalb eines gewissen Bereiches freie Beweglichkeit im Infinitesimalen, so ist die Gruppe durch eine reelle projective Transformation ähnlich entweder mit der Gruppe der Euclidischen Bewegungen*

$$p_k, \; x_i p_k - x_k p_i, \; (i, k = 1 \dots n)$$

oder mit der Gruppe der Nichteuclidischen Bewegungen, welche die Fläche

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1 = 0$$

invariant lassen.

Digitized by Google

Indem wir diese Untersuchung abschliessen, haben wir noch eine allgemeine Bemerkung hinzuzufügen.

Im Vorangehenden betrachteten wir nur solche Transformationsgruppen, welche durch *analytische* Gleichungen bestimmt sind. Diese Beschränkung ist nicht nothwendig. Man kann überhaupt Gruppen betrachten, welche durch continuirliche Gleichungen bestimmt sind, die eine gewisse Anzahl von Malen differentiirt werden können. Die vorangehenden Theorien bleiben auch für derartige Gruppen noch gültig. Das beruht darauf, dass jede *transitive* Gruppe, welche durch solche continuirliche Gleichungen bestimmt ist, die eine gewisse Anzahl Differentiationen gestatten, mit einer durch analytische Gleichungen darstellbaren Gruppe ähnlich ist. Es ist aber hier nicht der Ort, diese Andeutung weiter auszuführen.

§ 8.

Wir werden bei dieser Gelegenheit noch einige Sätze aufstellen, die oft Anwendung finden und welche mit den vorangehenden Theorien in einem gewissen Zusammenhange stehen.

Satz 12. *Die Gruppe der reciproken Radien des n-fach ausgedehnten Raumes ist mit keiner projectiven Gruppe dieses Raumes ähnlich.*

Beweis. Die Gruppe der reciproken Radien des n-fach ausgedehnten Raumes enthält

$$n + \frac{n(n-1)}{2} + 1 + n$$

unabhängige infinitesimale Transformationen, als welche wir am besten die nachstehenden wählen:

$$p_k,\ x_i p_j - x_j p_i,\ \sum_k^{1\ldots n} x_k p_k\ ,$$

$$\sum_k^{1\ldots n} x_k^2 \cdot p_j - 2 x_j \sum_i^{1\ldots n} x_i p_i\ .$$

Wäre diese Gruppe mit einer projectiven Gruppe des Raumes R_n ähnlich, so enthielte diese projective Gruppe n unabhängige

Digitized by Google

infinitesimale Transformationen zweiter Ordnung und zwar die Transformationen:

$$x_j \sum_{k}^{1 \dots n} x_k p_k = S_j$$

und n Transformationen nullter Ordnung, welche wir etwa auf die Form

$$p_k + \sum \alpha_{kij} x_i p_j = P_k$$

bringen könnten. Combiniren wir P_k mit S_j, so kommt:

$$(P_k S_j) = \varepsilon_{kj} \sum_{1}^{n}{}_{\nu} x_\nu p_\nu + x_j p_k + \sum_{i}^{1 \dots n} \beta_{kij} S_i \quad .$$

Unsere projective Gruppe enthielte also die infinitesimalen Transformationen:

$$\varepsilon_{kj} \sum_{1}^{n}{}_{\nu} x_\nu p_\nu + x_j p_k \quad .$$

Setzen wir nun zunächst $k = j$, so finden wir die n Transformationen:

$$\sum_{\gamma}^{1 \dots n} x_\gamma p_\gamma + x_k p_k$$

und durch deren Addition die Transformation:

$$\sum_{k}^{1 \dots n} x_k p_k$$

und gleichzeitig die n Transformationen $x_k p_k$; folglich wären alle n^2 Transformationen $x_j p_k$ vorhanden und es kämen auch die n Translationen $p_1 \dots p_n$ vor. Kurz, unsere projective Gruppe enthielte alle projectiven infinitesimalen Transformationen und das ist natürlich ausgeschlossen.

Satz 13. *Ist im n-fach ausgedehnten Raume R_n eine projective Gruppe mit der speciellen linearen Gruppe dieses Raumes ähnlich, so ist sie mit ihr innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe gleichberechtigt.*

Digitized by Google

Beweis. Eine projective Gruppe, welche mit der speciellen linearen Gruppe ähnlich ist, enthält $n-1$ unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form:

$$x_i p_i - x_n p_n + \sum_j \alpha_{ij} S_j \ ,$$

wo S_j in derselben Bedeutung wie früher benutzt ist. Combiniren wir nun die beiden Transformationen:

$$x_1 p_1 - x_n p_n + \sum_j^{1 \ldots n} \alpha_{1j} S_j$$

$$x_2 p_2 - x_n p_n + \sum_\gamma^{1 \ldots n} \alpha_{2j} S_j \ ,$$

so erhalten wir die Transformation:

$$\alpha_{21} S_1 - \alpha_{2n} S_n - \alpha_{12} S_2 + \alpha_{1n} S_n \ ;$$

da aber keine Transformation zweiter Ordnung vorkommen darf, folgt:

$$\alpha_{21} = 0 \ , \quad \alpha_{12} = 0 \ , \quad \alpha_{2n} = \alpha_{1n} \ .$$

Es verschwinden also für $i, k \leqq n-1$ alle α_{ik} mit zwei verschiedenen Indices. Unsere infinitesimalen Transformationen erster Ordnung haben somit die Form:

$$x_i p_i - x_k p_k + \alpha_i S_i - \alpha_k S_k \ .$$

Combiniren wir nun diese Transformation mit der Transformation:

$$x_i p_k + \sum_\gamma^{1 \ldots n} \beta_{ikj} S_j \ ,$$

die sicher in unserer Gruppe vorkommt, so ergiebt sich:

$$2 x_i p_k + \beta_{iki} S_i - \beta_{ikk} S_k + \alpha_k S_i \ .$$

Es ist daher:

$$\beta_{ikk} = 0 \ , \quad \beta_{iki} = \alpha_k \ ,$$

und wir erhalten die infinitesimale Transformation:

$$x_i p_k + \alpha_k S_i \ .$$

Digitized by Google

Die infinitesimalen Transformationen erster Ordnung unserer Gruppe besitzen somit die Form:

$$x_i p_i - x_k p_k + \alpha_i S_i - \alpha_k S_k = A_{ik} f \ ,$$
$$x_i p_k + \alpha_k S_i \qquad\qquad = B_{ik} f \ .$$

Es ist nun leicht zu erkennen, dass diese Transformationen eine Ebene

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + 1 = 0$$

invariant lassen. Es ist ja

$$A_{ik}(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + 1) = \lambda_i x_i - \lambda_k x_k + \alpha_i x_i \sum \lambda x - \alpha_k x_k \sum \lambda x$$
$$= x_i \left(\lambda_i + \alpha_i \sum \lambda x\right) - x_k \left(\lambda_k + \alpha_k \sum \lambda x\right) .$$

Mit Benutzung der Gleichung der Ebene kommt daher

$$A_{ik}(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + 1) = x_i(\lambda_i - \alpha_i) - x_k(\lambda_k - \alpha_k)$$

und dieser Ausdruck verschwindet, wenn $\lambda_k - \alpha_k = 0$ ist. Andrerseits ist:

$$B_{ik}(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + 1) = \lambda_k x_i + \alpha_k x_i \sum \lambda x$$
$$= x_i(\lambda_k - \alpha_k) \ ,$$

sodass auch dieser Ausdruck bei der Annahme $\lambda_k = \alpha_k$ verschwindet.

Verlegt man daher die betreffende Ebene ins Unendliche, so nehmen die infinitesimalen Transformationen erster Ordnung unserer Gruppe die Form an:

$$x_i p_i - x_k p_k , \quad x_i p_k \ .$$

Sind nun

$$P_k = p_k + \varepsilon_k \sum_j x_j p_j + \sum_j \alpha_{kj} S_j$$

die n infinitesimalen Transformationen nullter Ordnung unserer Gruppe, so ist leicht zu erkennen, dass die α_{kj} gleich Null sind. Durch Combination von $x_i p_i - x_k p_k$ mit P_k kommt nämlich:

$$P_k' = p_k + \alpha_{ki} S_i - \alpha_{kk} S_k$$

Digitized by

und durch Combination von $x_i p_k$ mit P_k' kommt

$$- \alpha_{kk} S_i \ ,$$

so dass α_{kk} gleich Null sein muss, da ja unsere Gruppe keine infinitesimale Transformation zweiter Ordnung enthält. Unsere infinitesimalen Transformationen nullter Ordnung haben somit die Form:

$$p_k + \alpha_{ki} S_i \ .$$

Ferner kommt durch Combination von $p_k + \alpha_{ki} S_i$ mit $x_k p_i$:

$$p_i - \alpha_{ki} S_k \ ,$$

sodass

$$\alpha_{ki} = - \alpha_{ik}$$

ist.

Ist nun $n > 2$, so können wir ohne weiteres α_{ki} gleich Null setzen, weil dann der Zahl k gegenüber keine andere Zahl i ausgezeichnet ist. Ist andererseits $n = 2$, so haben wir nur die fünf infinitesimalen Transformationen

$$p_1 + \alpha_{12} S_2 \ , \quad p_2 + \alpha_{21} S_1 \ , \quad x_1 p_1 - x_2 p_2 \ , \quad x_1 p_2 \ , \quad x_2 p_1 \ ;$$

durch Combination der beiden ersten kommt

$$\alpha_{21}(2 x_1 p_1 + x_2 p_2) - \alpha_{12}(x_1 p_1 + 2 x_2 p_2)$$

oder, da $\alpha_{12} = - \alpha_{21}$ ist:

$$\alpha_{21}\{3 x_1 p_1 + 3 x_2 p_2\} \ .$$

Da aber die infinitesimale Transformation $x_1 p_1 + x_2 p_2$ nicht vorkommen darf, ist $\alpha_{21} = 0$. Es ergiebt sich somit unter allen Umständen, dass unsere infinitesimalen Transformationen nullter Ordnung die Form p_k besitzen.

Unser Satz ist somit erwiesen.

Satz 14. *Ist eine (reelle) projective Gruppe des n-fachen Raumes $x_1 \ldots x_n$ mit der allgemeinen (reellen) linearen Gruppe dieses Raumes (durch eine reelle Transformation) ähnlich, so ist sie mit ihr innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe (durch eine reelle Transformation) gleichberechtigt.*

Digitized by Google

Ist eine projective Gruppe mit der allgemeinen linearen ähnlich, so enthält sie n infinitesimale Transformationen von der Form

$$x_i p_i - x_k p_k + \sum_j^{1 \ldots n} \alpha_{ikj} S_j \ ,$$

$$x_i p_k + \sum_j^{1 \ldots n} \beta_{ikj} S_j \ ,$$

$$x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n + c_1 S_1 + \cdots + c_n S_n = Uf \ .$$

Es ist leicht zu erkennen, dass die letzte Transformation, wenn die c_k nicht alle verschwinden, eine ganz bestimmte im Endlichen gelegene Ebene:

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + 1 = 0$$

invariant lässt. Es ist nämlich:

$$U(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + 1)$$
$$= \sum_j \lambda_j x_j + c_1 x_1 \sum \lambda_j x_j + \cdots + c_n x_n \sum \lambda_j x_j$$
$$= \sum_j \lambda_j x_j (1 + c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n) \ .$$

Dieser Ausdruck verschwindet vermöge der Gleichung der Ebene dann und nur dann, wenn

$$c_1 = \lambda_1 \ , \ \ldots \quad c_n = \lambda_n$$

ist. Denken wir uns diese bei Uf invariante Ebene ins Unendliche verlegt, so erhält Uf die Form:

$$x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n \ ;$$

das folgt ohne Weiteres daraus, dass die Transformation Uf die durch den Coordinatenanfang gehenden Geraden alle in Ruhe lässt; man kann es übrigens leicht durch Rechnung bestätigen.

In den jetzt eingeführten neuen Veränderlichen bleibt die Form der übrigen infinitesimalen Transformationen im Wesentlichen ungeändert. Die infinitesimalen Transformationen unserer Gruppe haben somit jetzt die Form:

Digitized by Google

$$x_i p_i - x_k p_k + \sum_j^{1\ldots n} \alpha_{ikj} S_j \ ,$$

$$x_i p_k + \sum_j^{1\ldots n} \beta_{ikj} S_j \ ,$$

$$x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n = U \ .$$

Combinirt man aber U mit den übrigen infinitesimalen Transformationen erster Ordnung und beachtet man, dass infinitesimale Transformationen zweiter Ordnung nicht vorkommen dürfen, so übersieht man ohne weiteres, dass

$$\alpha_{ikj} = \beta_{ikj} = 0$$

ist.

Es erübrigt noch die infinitesimalen Transformationen nullter Ordnung zu bestimmen. Ist

$$p_k + \sum_{ij}^{1\ldots n} \alpha_{kij} x_i p_j + \sum_j^{1\ldots n} \beta_{kj} S_j$$

eine solche, so kann man zunächst ohne Beschränkung alle α_{kij} gleich Null setzen. Nun aber ist:

$$\left(p_k + \sum_j^{1\ldots n} \beta_{kj} S_j \ , \quad U\right) = p_k - \sum_j^{1\ldots n} \beta_{kj} S_j$$

und also müssen auch alle β_{kj} gleich Null sein.

Hiermit haben unsere infinitesimalen Transformationen die Form

$$p_k \ , \quad x_i p_k$$

erhalten, und es ist daher unser Satz bewiesen.

Satz 15. *Ist eine projective Gruppe mit der Gruppe aller Aehnlichkeitstransformationen ähnlich, so ist sie mit ihr innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe gleichberechtigt.*

Ist eine projective Gruppe mit der Gruppe aller Aehnlichkeitstransformationen ähnlich, so erhält sie, wenn wir wiederum die Bezeichnung

$$x_j \sum_1^n x_i p_i = S_j$$

Digitized by Google

benutzen,

$$n + \frac{n(n-1)}{2} + 1$$

infinitesimale Transformationen, welche die Form

$$p_k + \sum_j^{1\ldots n} \alpha_{kj} S_j \ ,$$

$$x_i p_k - x_k p_i + \sum_j^{1\ldots n} \beta_{ikj} S_j \ ,$$

$$x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n + \sum_k^{1\ldots n} c_k S_k = U$$

besitzen. Dabei können wir, wie wir schon früher gesehen haben, ohne Beschränkung annehmen, dass alle $c_k = 0$ sind. Sodann ergiebt sich durch Combination:

$$\left(x_i p_k - x_k p_i + \sum_j^{1\ldots n} \beta_{ikj} S_j, \ \sum x_k p_k\right) = -\sum_j^{1\ldots n} \beta_{ikj} S_j \ ,$$

$$\left(p_k + \sum_j^{1\ldots n} \alpha_{kj} S_j, \ \sum x_k p_k\right) = p_k - \sum_j^{1\ldots n} \alpha_{kj} S_j \ ,$$

so dass alle α_{kj} und alle β_{ikj} gleich Null sind.

Unser Satz ist hiermit erwiesen.

Satz 16. *Die continuirliche projective Gruppe einer Fläche zweiten Grades mit nicht identisch verschwindender Determinante ist in keiner grösseren continuirlichen Untergruppe der allgemeinen projectiven Gruppe enthalten.*

Wir zeigen, dass, wenn dieser Satz für den R_{n-1} gilt, er auch für den n-fach ausgedehnten Raum R_n gültig ist.

Gesetzt, dass unser Satz für den R_{n-1} erwiesen ist.

Wir betrachten im R_n die Gruppe G einer F_2 und setzen voraus, dass dieselbe in einer grösseren Untergruppe Γ der allgemeinen projectiven Gruppe enthalten ist.

Halten wir nun einen Punkt von allgemeiner Lage fest, so werden die Transformationen der Gruppe G, welche diesen Punkt in Ruhe lassen, den Raum der hindurchgehenden ∞^{n-1} Richtungen durch eine projective Gruppe g transformiren.

Digitized by Google

Ebenso transformirt die Gruppe Γ die besprochenen Richtungen durch eine projective Gruppe γ. Dabei ist klar, dass die Gruppe g entweder in der Gruppe γ enthalten oder mit ihr identisch ist. Wäre g als Untergruppe in γ enthalten, so wäre γ nach unserer Voraussetzung die allgemeine projective Gruppe des $(n-1)$-fach ausgedehnten Raumes der besprochenen Richtungen; und dann wäre nach einem bekannten Satze von mir die Gruppe Γ entweder die allgemeine projective Gruppe, oder sie wäre mit der allgemeinen linearen oder der speciellen linearen Gruppe des n-fach ausgedehnten Raumes $x_1 \ldots x_n$ ähnlich und das sogar durch eine projective Transformation. Nun aber lässt die allgemeine Gruppe G einer Fläche zweiten Grades keine Ebene invariant; daher ist sie weder in der speciellen noch in der allgemeinen linearen Gruppe enthalten. Die Annahme, dass g als Untergruppe in γ enthalten ist, führt also dazu, dass Γ die allgemeine projective Gruppe des Raumes $x_1 \ldots x_n$ ist.

Betrachten wir jetzt die Annahme, dass g und γ identisch sind. Alsdann ist die Gruppe Γ ähnlich entweder mit der Gruppe aller Aehnlichkeitstransformationen, oder mit der Gruppe der reciproken Radien. Das letzte ist ausgeschlossen durch den Satz 12, S. 312. Es bleibt also nur übrig die Frage, ob Γ mit der Gruppe aller Aehnlichkeitstransformationen ähnlich sein kann. Dass dies unmöglich ist, folgt leicht daraus, dass jede mit der Gruppe der Aehnlichkeitstransformationen ähnliche projective Gruppe mit ihr innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe gleichberechtigt ist. In der That, die Gruppe der Aehnlichkeitstransformationen sowie jede mit ihr innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe gleichberechtigte Gruppe lässt eine ebene Mannigfaltigkeit

$$c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n + c = 0$$

invariant; dagegen die Gruppe einer Fläche zweiten Grades lässt keine solche ebene Mannigfaltigkeit invariant; die letztere Gruppe kann daher in keiner Gruppe enthalten sein, welche eine ebene Mannigfaltigkeit invariant lässt.

Digitized by Google

SITZUNG VOM 1. AUGUST 1890.

E. Drechsel, *Ueber ein Spaltungsproduct des Caseïns.*

Vor etwa Jahresfrist habe ich nachgewiesen, dass bei der Zersetzung des Caseïns durch Kochen mit conc. Salzsäure und etwas Zinnchlorür (nach der Methode von Hlasiwetz und Habermann), ausser den von diesen Forschern gefundenen Producten auch noch mehrere Basen entstehen. Unter diesen befindet sich eine, welche in Form eines Doppelsalzes isolirt werden konnte, einer Verbindung ihres Nitrates mit salpetersaurem Silberoxyd. Dieses Salz, auf dessen Darstellung ich später zurückkommen werde, krystallisirt in prachtvollen langen, weissen, etwas silberglänzenden Nadeln, welche sich am Lichte allmählig röthlich färben, in Wasser leicht löslich sind, und aus dieser Lösung durch Alkohol und noch besser durch einen weiteren Zusatz von Aether, gefällt werden; zunächst ist der Niederschlag ölig, wird aber beim Stehen bald krystallinisch. Die Analyse dieses Salzes führte zu der Formel: $C_6H_{13}N_3O_2 \cdot HONO_2 + AgO \cdot NO_2$, in welcher höchstwahrscheinlich ein Molekül Krystallwasser angenommen werden muss. Der empirischen Zusammensetzung nach konnte der Körper $C_6H_{13}N_3O_2$ oder $C_6H_{11}N_3O$ ein Kreatin oder ein Kreatinin sein, da er der Formel nach mit diesen Verbindungen homolog ist; eine Entscheidung über die Richtigkeit dieser Ansicht schien dadurch herbeigeführt werden zu können, dass man sein Verhalten gegen kochendes Barytwasser untersuchte. War nämlich die Ansicht richtig, so war zu erwarten, dass er beim Kochen mit Barytwasser Harnstoff liefern werde, denn Kreatin lässt solchen bei der gleichen Behandlung nach Liebig entstehen, und Kreatinin wird bekanntlich durch Behandlung mit Alkalien wenigstens theilweise in Kreatin übergeführt,

Digitized by Google

muss also auch Harnstoff liefern. Ich habe desshalb 10 g des genannten Doppelsalzes in Wasser gelöst, durch einen kleinen Ueberschuss von Chlorbaryum zunächst vom Silber befreit, und das Filtrat vom Chlorsilber ca. 25 Minuten lang mit überschüssigem Barytwasser im Sieden erhalten. Nach Abscheidung des überschüssigen Barytes gelang es mir nun in der That, aus der Lösung ca. 1 g salpetersauren Harnstoff zu isoliren, eine ganz beträchtliche Menge, wenn man bedenkt, dass erstens die Spaltung des Kreatins durch Barytwasser nicht glatt verläuft, und zweitens der schon gebildete Harnstoff der Gefahr ausgesetzt ist, durch den Baryt sofort weiter zersetzt zu werden. Ich habe sodann den salpetersauren Harnstoff in reinen Harnstoff übergeführt, und dessen Natur durch seine Reactionen völlig sicher gestellt. Er krystallisirte in den bekannten langen, flachen, dem Kalisalpeter ähnlichen Prismen; seine wässerige Lösung gab mit Salpetersäure, Oxalsäure, Palladiumchlorür, salpetersaurem Quecksilberoxyd die bekannten für Harnstoff charakteristischen Niederschläge (der quecksilberhaltige löste sich sofort auf Zusatz von etwas Kochsalz), sie reagirte neutral und wurde durch Goldchlorid nicht gefällt. Der trockene Harnstoff schmolz beim Erhitzen und in höherer Temperatur wurde die Schmelze unter Gasentwicklung und Bildung eines öligen Sublimates allmählig fest: das Sublimat erstarrte beim Erkalten krystallinisch, löste sich leicht in Wasser und gab mit Kupfervitriol und Natronlauge die bekannte Rothfärbung des Biurets. Der fest gewordene weisse Rückstand löste sich in Wasser nur sehr wenig, etwas mehr in Ammoniak und diese Lösung gab mit einer ammoniakalischen Kupferlösung nach kurzer Zeit violettrothe prismatische Kryställchen; in verdünnter Natronlauge löste sich der Rückstand sehr leicht und schied auf Zusatz von conc. Natronlauge beim Erhitzen zum Sieden schöne farblose Nädelchen ab. Durch diese beiden Reactionen ist also die Gegenwart von Cyanursäure sicher nachgewiesen. Endlich ergab eine mit allerdings nur 0.0969 g Substanz von Herrn Dr. Siegfried ausgeführte Stickstoffbestimmung nach Dumas einen Gehalt von 47.35 %, während Harnstoff 46.67 % davon enthält.

Durch die beschriebenen Reactionen und das Resultat der Stickstoffbestimmung ist mit völliger Sicherheit dargethan, dass bei der Spaltung der Base $C_6H_{13}N_3O_2$, welche als Lysatin bez. Lysatinin bezeichnet werden mag, durch Kochen mit Baryt wirklich Harnstoff entsteht, und da diese Base auch aus anderen

Digitized by Google

Eiweissstoffen, wie Leim und Conglutin erhalten werden kann, so ist damit zugleich ein Weg gefunden worden, um Harnstoff aus Eiweiss zu erhalten. Das ist aber ein Problem, welches schon mehrere Forscher vor mir angelegentlich beschäftigt hat. Es besteht aber ein ganz wesentlicher Unterschied zwischen meinem Resultat und denen meiner Vorgänger. Diese nämlich, und zuerst A. Béchamp, gingen von der Ansicht aus, dass der Harnstoff ein Oxydationsproduct des Eiweisses sei, und deshalb behandelten sie das Eiweiss in alkalischer Lösung mit Permanganat. Béchamp nun behauptete, Harnstoff auf diese Weise aus Eiweiss erhalten zu haben; Städeler dagegen und O. Loew erhielten nur negative Resultate, als sie die Versuche von Béchamp wiederholten. Dann beschrieb Ritter neue Versuche, welche die Angaben von Béchamp bestätigten, aber Tappeiner konnte ebensowenig wie Städeler und Loew Harnstoff nach der Methode von Béchamp erhalten. Später nun hat F. Lossen diese Versuche mit der Abänderung wiederholt, dass er dem Reactionsgemische Magnesiasulfat zusetzte, und er fand, dass bei dieser Oxydation zwar nicht Harnstoff, wohl aber etwas Guanidin entsteht. Wenn man bedenkt, dass Kreatin eine methylguanidirte Essigsäure ist, und dass es bei Behandlung mit Quecksilberoxyd Methyluramin, d. i. Methylguanidin liefert, so kann man nicht daran zweifeln, dass das von Lossen gefundene Guanidin aus dem Lysatin stammt. Bevor aber dieses bekannt war, konnte man auch annehmen, dass das Guanidin aus einem Xanthinkörper stamme, denn bekanntlich liefert Guanin bei der Oxydation ebenfalls Guanidin.

Meinen Vorgängern war es also gelungen, unter den Oxydationsproducten des Eiweisses Guanidin aufzufinden, und im Hinblick auf die Bildung des Guanidins aus Guanin durch Salzsäure und chlorsaures Kali, sowie auf die des Methylguanidins durch Oxydation des Kreatins mit Quecksilberoxyd stehe ich nicht an, dieses Guanidin wirklich für ein Oxydationsproduct, und zwar des Lysatins anzunehmen, eine Annahme, welche ich noch experimentell zu bestätigen hoffe. Anders dagegen steht es mit der von mir nachgewiesenen Bildung von Harnstoff — dieser ist *kein Oxydations-*, sondern ein *hydrolytisches Spaltungs*product des Eiweisses. Wird dieses nach Hlasiwetz und Habermann durch Kochen mit Salzsäure und Zinnchlorür zersetzt, so *verhindert* letzteres *jede Oxydation des Eiweisses*, es entsteht aber

durch Hydrolyse Lysatin, und dieses zerfällt beim Kochen mit Barytwasser wiederum *ohne Oxydation* in Harnstoff und andere, krystallisirbare Producte, mit deren Untersuchung ich noch beschäftigt bin.

Die Bedeutung meiner Versuche für den thierischen Stoffwechsel liegt auf der Hand. Dieselben zeigen unwiderleglich, dass Harnstoff ohne jede Oxydation, einfach durch Hydrolyse aus Eiweiss entsteht, und wir können daraus schliessen, dass auch im thierischen Organismus Harnstoff auf diese Weise gebildet wird, um so mehr, als man bisher das Lysatin noch nirgends in thierischen Flüssigkeiten, besonders auch nicht im Harn gefunden hat. Damit soll aber natürlich nicht behauptet werden, dass der gesammte Harnstoff des Harns auf diese Weise gebildet werde, im Gegentheil, es ist dies nur Ein Weg, neben dem noch andere zum gleichen Ziele führen. Der Stickstoff der Amidosäuren, vor allem der des Leucins, wird jedenfalls durch die Zwischenstufe der Carbaminsäure in Harnstoff übergeführt. Nunmehr erhebt sich aber die neue Frage nach dem Verhältnisse, in welchem die auf beiden Wegen gebildeten Harnstoffmengen zu einander stehen, eine Frage, welche wir unter gewissen Voraussetzungen leicht lösen können. Schützenberger hat bekanntlich nachgewiesen, dass bei der Zersetzung der Eiweisskörper durch Barythydrat Kohlensäure gebildet wird, welche nach den Ergebnissen meiner Versuche aus dem Lysatin stammen muss, indem der primär gebildete Harnstoff sofort weiter zersetzt worden ist. Wir können deshalb unbedenklich die von Schützenberger bestimmte Menge Kohlensäure, die beim Erhitzen des Eiweisses mit Baryt auftritt, als Aequivalent für das zuerst abgespaltene Lysatin, und den aus diesem hervorgehenden Harnstoff betrachten, und auf dieser Grundlage die Rechnung ausführen. Schützenberger erhielt nun im Maximum aus 100 Th. Eiweiss 12.5 Th. kohlensauren Baryt entsprechend 2.4 Th. Kohlensäure. Da nun 1 Mol. Lysatinin $C_6H_{11}N_3O$ 1 Mol. Harnstoff bez. Kohlensäure liefert, so würden diese 2.4 Th. Kohlensäure 7.7 Th. Lysatin, bez. 3.27 Th. Harnstoff entsprechen; d. h. also, 100 Th. Eiweiss würden bei ihrer Spaltung im Organismus ohne irgend welche Oxydation zu erleiden 3.27 Th. Harnstoff liefern können, wenn nur das Lysatin völlig in dieser Richtung zersetzt wird. Da nun 100 Th. Eiweiss mit rund 16 Th. Stickstoff im Ganzen 34.3 Th. Harnstoff liefern können, so ergiebt unsere Rechnung, dass $^1/_{11} - ^1/_{10}$ der

Digitized by Google

gesammten zur Ausscheidung gelangenden Harnstoffmenge durch einfache Spaltung aus dem Eiweiss hervorgehen kann. Es wird von Interesse sein, die thermischen Verhältnisse dieser Reactionen zu untersuchen, um festzustellen, ob bei denselben Energie frei wird oder nicht.

Aber noch in anderer Hinsicht sind meine Versuche von Bedeutung für den Stoffwechsel. Sie zeigen zum ersten Male, dass ein Kreatin aus Eiweiss durch Spaltung hervorgehen kann, und wenn das Lysatin mit dem eigentlichen Kreatin auch nicht identisch ist, so erweckt seine Entstehung doch die Hoffnung, dass es unter geeigneten Bedingungen noch gelingen werde, auch dieses aus dem Eiweiss zu erhalten. Und selbst der Gedanke, dass die von mir aus dem Eiweiss dargestellten Basen in gewissem Sinne die Muttersubstanzen aller Alkaloïde seien, dass mit ihrer Hülfe die Synthese solcher in vielen Fällen gelingen werde, erscheint nicht zu kühn, wenn man bedenkt, dass, wo Alkaloïde im Pflanzenkörper entstehen, auch Eiweiss zu Grunde geht.

Digitized by Google

C. Neumann, *Ueber einige Fundamentalsätze der Potentialtheorie.*

Es sei gegeben ein Körper M von *endlicher* Ausdehnung und von der Dichtigkeit $\varkappa$. Diese Dichtigkeit $\varkappa$ mag an verschiedenen Stellen verschiedene (theils positive, theils negative) Werthe haben, und der Formel unterworfen sein:

$$\text{abs}\,\varkappa \leqq K \ ,$$

wo $K > 0$ eine gegebene endliche *Constante* vorstellt. Auch mag vorausgesetzt sein, dass $\varkappa$ eine *integrirbare* Function der rechtwinkligen Coordinaten ist.

Alsdann wird das *Potential* des Körpers M auf irgend einen Punkt (x, y, z) dargestellt sein durch

$$(f.) \qquad V = \sum_M \frac{\varkappa\, d\tau}{E} \ ,$$

die Summation ausgedehnt gedacht über alle Volum-Elemente $d\tau$ des Körpers M. Dabei bezeichnet $\varkappa$ die im Elemente $d\tau$ vorhandene Dichtigkeit, und E den Abstand des Elementes $d\tau$ vom Punkte (x, y, z). — Für dieses Potential gelten folgende Sätze:

Erster Satz. — Im Innern des Körpers M oder auch an seiner Oberfläche mag irgend ein Punkt (x, y, z) markirt sein; und um diesen Punkt (als Centrum) sei eine Kugelfläche vom Radius R beschrieben. Versteht man alsdann unter M_R den *ausserhalb* dieser Kugelfläche gelegenen Theil des Körpers M, und unter $V(M_R)$ das Potential dieses Körpertheiles M_R in Bezug

Digitized by Google

auf den Punkt (x, y, z), *so wird* $V(M_R)$ *bei abnehmendem* R *gegen einen bestimmten endlichen Werth convergiren*. Dieser Grenzwerth

$$V = \lim_{R=0} V(M_R)$$

pflegt kurzweg als der Werth des Potentiales V für den Punkt (x, y, z) bezeichnet zu werden.

Denkt man sich nun $V(M_R)$ ausgedrückt nach Maassgabe der Formel $(f.)$, so wird dabei [weil (x, y, z) im Mittelpunkte der Kugelfläche $(R.)$, mithin *ausserhalb* der Masse M_R liegt] ohne Weiteres die Anwendung des *Integralzeichens* [statt des Summenzeichens] gestattet sein. Demgemäss ist die letzte Formel auch so darstellbar:

$$V = \lim_{R=0} \int_{M_R} \frac{\varkappa d\tau}{E} \; ;$$

und hierfür pflegt man einfacher zu schreiben:

$$(F.) \qquad V = \int_M \frac{\varkappa d\tau}{E} \; ,$$

wo alsdann das Integral ein sogenanntes *uneigentliches* Integral, d. i. die Grenze eines Integrals vorstellt.

Liegt der betrachtete Punkt (x, y, z) nicht innerhalb, resp. an der Oberfläche des Körpers M, sondern *ausserhalb* desselben, so wird offenbar die Formel $(F.)$ ebenfalls gelten, nur mit dem Unterschiede, dass in diesem Falle das dortige Integral ein *wirkliches* oder *eigentliches* ist.

Auch ergiebt sich, dass V eine Function von (x, y, z) sein wird, die in jedwedem Punkte (x, y, z) *stetig* ist.

Zweiter Satz. — In jedwedem Punkte (x, y, z) *existirt* der Differentialquotient $\frac{\partial V}{\partial x}$. Für seinen Werth ergiebt sich die Formel:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \lim_{R=0} \frac{\partial V(M_R)}{\partial x} \; .$$

Auch ergiebt sich, dass dieser Differentialquotient aus der Formel $(F.)$ ableitbar ist durch Differentiation *unter* dem Integralzeichen; so dass man also schreiben darf:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int_M \frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial x} \varkappa d\tau \; .$$

Digitized by Google

Endlich ergiebt sich, dass $\frac{\partial V}{\partial x}$ eine Function von (x, y, z) sein wird, die in jedwedem Punkte (x, y, z) *stetig ist.*

Dritter Satz. — Wir wollen jetzt zu den schon gemachten Voraussetzungen noch eine neue hinzufügen, nämlich annehmen, um einen bestimmten *speciellen* Punkt (x, y, z) sei eine Kugelfläche construirbar von solcher Kleinheit, dass für alle innerhalb derselben liegenden Punkte (ξ, η, ζ) die Formel gilt

$$\operatorname{abs}(\varkappa_{\xi\eta\zeta} - \varkappa_{xyz}) \leqq G[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^g ,$$

wo $G > 0$ und $g > 0$ gegebene *Constanten* sind. Dabei sollen $\varkappa_{\xi\eta\zeta}$ und $\varkappa_{xyz}$ die Dichtigkeiten vorstellen in den Punkten (ξ, η, ζ) und (x, y, z).

Alsdann werden in diesem speciellen Punkte (x, y, z) die Differentialquotienten $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$ *existiren*, und darstellbar sein durch die Formeln:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{4\pi}{3}\varkappa_{xyz} + \lim_{R=0} \frac{\partial^2 V(M_R)}{\partial x^2} ,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \quad 0 \quad + \lim_{R=0} \frac{\partial^2 V(M_R)}{\partial x \partial y} ,$$

wobei unter R der Radius einer um jenen *speciellen* Punkt (x, y, z) beschriebenen Kugelfläche zu verstehen ist.

Aus diesen Formeln folgt z. B. sofort:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\varkappa_{xyz} ,$$

aber immer nur mit Bezug auf jenen *speciellen* Punkt (x, y, z).

Vierter Satz. — Wir wollen jetzt statt der im vorhergehenden Satze hinzugefügten Voraussetzung eine andere noch *mehr* erheischende Voraussetzung eintreten lassen, nämlich annehmen, um einen *speciellen* Punkt (x_0, y_0, z_0) sei eine Kugelfläche (R_0) construirbar von solcher Kleinheit, dass für *alle* innerhalb derselben liegenden Punkte (x, y, z), (ξ, η, ζ) die Formel gilt:

$$\operatorname{abs}(\varkappa_{\xi\eta\zeta} - \varkappa_{xyz}) \leqq G[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^g ,$$

wo $G > 0$ und $g > 0$ gegebene *Constanten* sind.

Digitized by Google

Selbstverständlich wird alsdann der vorhergehende Satz Gültigkeit haben für jedweden innerhalb der Kugelfläche (R_0) gelegenen Punkt (x, y, z). Gleichzeitig aber werden alsdann auch $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$ *stetig* sein im Punkte (x_0, y_0, z_0).

Die beiden ersten Sätze sind längst bekannt, mit wirklicher Strenge aber zuerst von HÖLDER bewiesen; und die beiden letzten Sätze haben wir Herrn HÖLDER nicht nur dem Beweise, sondern auch dem *Inhalte* nach zu verdanken [1]).

Da all' diese Sätze von fundamentaler Wichtigkeit sind, so dürfte es wohl der Mühe werth sein, zu versuchen, ob es nicht vielleicht möglich sei, das von Herrn HÖLDER zur Begründung dieser Sätze angewendete ziemlich verwickelte Verfahren durch etwas einfachere und mehr anschauliche Betrachtungen zu ersetzen.

Als einen derartigen Versuch bitte ich die nachfolgenden Darlegungen anzusehen. Die Tendenz derselben geht dahin, den ganzen überhaupt erforderlichen Rechnungs-Apparat auf die Herstellung von *vier elementaren Hülfssätzen* zusammenzudrängen, — der Art, dass nach Absolvirung dieser Hülfssätze die Begründung jener eigentlich zu beweisenden *Potentialsätze* sich gewissermassen *von selber* ergiebt.

Ich werde die in Rede stehenden vier Hülfssätze zuerst in bestimmter Weise aussprechen, und sodann der Reihe nach beweisen [2]).

Hülfssätze. — Es sei gegeben eine *materielle Kugel* vom Radius A und der Dichtigkeit $\varkappa$. Dabei mag $\varkappa$ an verschiedenen Stellen verschiedene (theils positive, theils negative) Werthe haben. Auch sei vorausgesetzt, dass überall

$$\text{abs}\, \varkappa \leqq K$$

ist, wo $K > 0$ eine gegebene *Constante* bezeichnet. Alsdann

1) OTTO HÖLDER: *Beiträge zur Potentialtheorie.* Inaugural-Dissertation. Stuttgart. Metzler'sche Buchdruckerei. 1882.

2) Dabei sei bemerkt, dass die beiden ersten dieser Sätze (I.) und (II.), wenn auch von DIRICHLET nicht in bestimmter Weise formulirt, so doch aus gewissen von DIRICHLET (in seinen Vorlesungen) angestellten Betrachtungen ohne Mühe sich ergeben.

Digitized by Google

gelten für einen im Innern der Kugel in beliebiger Bewegung begriffenen Punkt (x, y, z) fortdauernd die Formeln:

$$\text{(I.)} \qquad \operatorname{abs}\sum_{(A)} \frac{\varkappa\, d\tau}{E} < 8\pi A^2 K \ ,$$

$$\text{(II.)} \qquad \operatorname{abs}\sum_{(A)} \frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial x} \varkappa\, d\tau < 8\pi A K \ ,$$

die Summationen ausgedehnt gedacht über alle Volum-Elemente $d\tau$ der gegebenen Kugel (A). Dabei bezeichnet $\varkappa$ die in $d\tau$ vorhandene Dichtigkeit, und E den Abstand des Elementes $d\tau$ vom Punkte (x, y, z).

Denkt man sich ferner innerhalb der Kugel (A) *zwei* Punkte (x, y, z) und (x', y', z') in beliebigen Bewegungen begriffen, wobei ihr gegenseitiger Abstand λ im Allgemeinen von Augenblick zu Augenblick sich ändern wird, so gilt während dieser Bewegungen fortdauernd die Formel:

$$\text{(III.)} \qquad \operatorname{abs}\sum_{(A)} \frac{\frac{1}{E'} - \frac{1}{E}}{\lambda} \varkappa\, d\tau < 16\pi A K \ ,$$

wo E und E' die Abstände des Elementes $\varkappa\, d\tau$ von (x, y, z) und (x', y', z') bezeichnen.

Es bleibt noch übrig eine vierte Formel hinzuzufügen. Hierbei aber wollen wir den Punkt (x, y, z) irgendwo im Innern der Kugel (A) uns *fest* denken, und überdies voraussetzen, dass die Dichtigkeit $\varkappa_{\xi\eta\zeta}$ an jedweder Stelle (ξ, η, ζ) der Bedingung entspricht:

$$\operatorname{abs}\varkappa_{\xi\eta\zeta} \leqq G\,[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^g \ ,$$

wo $G > 0$ und $g > 0$ gegebene *Constanten* sind.

Denken wir uns alsdann innerhalb der Kugel einen Punkt (x', y', z') in beliebiger Bewegung begriffen, so wird während dieser Bewegung fortdauernd die Formel gelten:

$$\text{(IV.)} \qquad \operatorname{abs}\sum_{(A)} \frac{\frac{\partial \frac{1}{E'}}{\partial x'} - \frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial x}}{\lambda} \varkappa\, d\tau < \frac{24\pi G}{g} (4A)^{2g} \ .$$

Digitized by Google

Dabei bezeichnet λ den Abstand des Punkte (x', y', z') vom *festen* Punkte (x, y, z).

Beweis für (I.). — Denkt man sich um (x, y, z), als Centrum, eine Hülfskugelfläche vom Radius $B = 2A$ construirt, so wird die ursprüngliche Kugel (A) innerhalb dieser neuen Kugel (B) liegen. Mit Rücksicht hierauf ergiebt sich sofort:

$$\operatorname{abs}\sum_{(A)} \frac{\varkappa d\tau}{E} \leqq K \sum_{(A)} \frac{d\tau}{E} < K \sum_{(B)} \frac{d\tau}{E} ,$$

die *letzte* dieser Summen ausgedehnt gedacht über alle Volum-Elemente $d\tau$ der Kugel (B). Diese letzte Summe hat nun offenbar, weil E den Abstand eines solchen Elementes $d\tau$ vom *Centrum* (x, y, z) der Kugel (B) vorstellt, den Werth:

$$\int_0^B \frac{4\pi E^2 dE}{E} = 2\pi B^2 = 8\pi A^2 .$$

Somit folgt:

$$\operatorname{abs}\sum_{(A)} \frac{\varkappa d\tau}{E} < K \cdot 8\pi A^2 . \quad \text{— Q. e. d.}$$

Der Beweis für (II.) ist völlig analog mit dem für (I.), und bedarf daher kaum noch einer weiteren Besprechung.

Bezeichnet man die Coordinaten des Elementes $d\tau$ mit (ξ, η, ζ), so ist z. B.:

$$E^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 ,$$

mithin:

$$\operatorname{abs}\frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial x} = \operatorname{abs}\left(\frac{1}{E^2}\,\frac{\xi - x}{E}\right) \leqq \frac{1}{E^2} .$$

Und mit Rücksicht hierauf ergiebt sich sofort:

$$\operatorname{abs}\sum_{(A)} \frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial x} \varkappa d\tau \leqq K \sum_{(A)} \frac{d\tau}{E^2} < K \sum_{(B)} \frac{d\tau}{E^2} ,$$

wo wiederum (B) eine mit dem Radius $B = 2A$ um den Punkt (x, y, z) beschriebene Hülfskugelfläche vorstellen soll. Die *letzte* Summe hat daher den Werth:

Digitized by Google

$$\int_0^B \frac{4\pi E^2 dE}{E^2} = 4\pi B = 8\pi A \ .$$

Somit folgt:

$$\text{abs} \sum_{(A)} \frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial x} \varkappa d\tau < K \cdot 8\pi A \ . \ — \text{Q. e. d.}$$

Beweis für (III.). Durch den Halbirungspunkt der Linie λ denken wir uns eine Ebene gelegt, senkrecht gegen λ, und durch diese Ebene die Kugel (A) in zwei Theile (L) und (L') zerlegt, deren jeder die Gestalt einer plan-convexen Linse haben wird; und zwar mag (L) den Punkt (x, y, z), und (L') den Punkt (x', y', z') beherbergen [1]). Dieser Zerlegung entsprechend zerfällt die in (III.) zu betrachtende Summe in *zwei* Summen:

$$\sum_{(A)} = \sum_{(L)} + \sum_{(L')} \ ,$$

von denen die eine über (L), die andere über (L') ausgedehnt ist.

Was nun die Summe

$$\sum_{(L)} = \sum_{(L)} \frac{\frac{1}{E'} - \frac{1}{E}}{\lambda} \varkappa d\tau = \sum_{(L)} \frac{E - E'}{\lambda} \frac{\varkappa d\tau}{E E'}$$

anbetrifft, so ist zu bemerken, dass $\frac{E - E'}{\lambda}$ ein ächter Bruch ist; [denn die drei Linien λ, E, E' bilden ein Dreieck, und aus diesem Dreieck ergiebt sich: $\lambda \geqq \text{abs}\,(E - E')$]. Ueberdies ist für die zu (L) gehörigen Elemente $d\tau$ durchweg $E' > E$. Somit folgt:

$$\text{abs} \sum_{(L)} \leqq K \sum_{(L)} \frac{d\tau}{E^2} < K \sum_{(B)} \frac{d\tau}{E^2} \ ,$$

---

1) Bei der Beweisführung des Satzes (III.) denken wir uns die innerhalb (A) in beliebigen Bewegungen begriffenen Punkte (x, y, z) und (x', y', z') in irgend welchen Lagen *fixirt*, so dass also während dieser Beweisführung auch λ, (L) und (L') als völlig *fest* zu betrachten sind.

Digitized by Google

wo (B) eine mit dem Radius $B = 2A$ um (x, y, z) beschriebene Kugel vorstellen soll. Die *letzte* Summe dehnt sich aus über alle Elemente $d\tau$ dieser Kugel (B), und hat daher den Werth:

$$\int_0^B \frac{4\pi E^2 dE}{E^2} = 4\pi B = 8\pi A \ .$$

Somit folgt:

$$\text{abs} \sum_{(L)} < K \cdot 8\pi A \ .$$

Desgleichen ergiebt sich offenbar:

$$\text{abs} \sum_{(L')} < K \cdot 8\pi A \ .$$

Aus den beiden letzten Formeln folgt nun aber sofort:

$$\text{abs} \sum_{(A)} < K \cdot 16\pi A \ . \ — \text{ Q. e. d.}$$

Der Beweis für (IV.) ist einigermassen ähnlich mit dem für (III.), wenn auch mit etwas mehr Rechnung verknüpft. Es ist dabei wiederum die gegebene Kugel (A) in zwei Theile (L) und (L') zu zerlegen mittelst einer Ebene, die durch den Halbirungspunkt der Linie λ geht, und gegen λ senkrecht steht [1]). Setzt man dementsprechend die in (IV.) aufgeführte Summe

$$\sum_{(A)} = \sum_{(L)} + \sum_{(L')} \ ,$$

so wird z. B. die über (L) ausgedehnte Summe, falls man die Coordinaten des Elementes $d\tau$ mit (ξ, η, ζ) bezeichnet, folgendermassen darstellbar sein:

$$\sum_{(L)} = \sum_{(L)} \frac{\frac{\xi - x'}{E'^3} - \frac{\xi - x}{E^3}}{\lambda} \varkappa d\tau = \sum_{(L)} \frac{(\xi - x')E^3 - (\xi - x)E'^3}{\lambda E^3 E'^3} \varkappa d\tau \ ,$$

oder, was dasselbe ist, auch so:

---

1) Dabei ist Analoges zu bemerken wie in der vorhergehenden Note.

Digitized by Google

$$\sum_{(L)} = \sum_{(L)} \frac{[(\xi - x') - (\xi - x)]\, E^3 + (\xi - x)(E^3 - E'^3)}{\lambda E^3 E'^3} \varkappa d\tau \ ,$$

oder auch so:

$$\sum_{(L)} = \sum_{(L)} \left(\frac{x - x'}{\lambda} E^3 + E \frac{\xi - x}{E} \frac{E - E'}{\lambda} (E^2 + EE' + E'^2) \right) \frac{\varkappa d\tau}{E^3 E'^3} .$$

Nun sind offenbar $\frac{x - x'}{\lambda}$, $\frac{\xi - x}{E}$ und $\frac{E - E'}{\lambda}$ ächte Brüche. Somit folgt:

$$\operatorname{abs} \sum_{(L)} \leqq \sum_{(L)} (E^3 + E(E^2 + EE' + E'^2)) \frac{(\operatorname{abs} \varkappa) d\tau}{E^3 E'^3} \ ,$$

oder etwas anders geschrieben:

$$\operatorname{abs} \sum_{(L)} \leqq \sum_{(L)} \left[2 \left(\frac{E}{E'} \right)^3 + \left(\frac{E}{E'} \right) + 1 \right] \frac{(\operatorname{abs} \varkappa) d\tau}{E^2 E'} \ .$$

Für alle Elemente $d\tau$ des Körpers (L) ist aber $E' \geqq E$, mithin $\frac{E}{E'}$ ein ächter Bruch. Somit folgt:

(1.) $$\operatorname{abs} \sum_{(L)} \leqq 4 \cdot \sum_{(L)} \frac{(\operatorname{abs} \varkappa) d\tau}{E^2 E'} \ .$$

In analoger Weise wird offenbar für den Körper (L') die analoge Formel sich ergeben:

(2.) $$\operatorname{abs} \sum_{(L')} \leqq 4 \cdot \sum_{(L')} \frac{(\operatorname{abs} \varkappa) d\tau}{E'^2 E} \ .$$

Der zwischen diesen beiden Formeln (1.), (2.) vorhandene Parallelismus wird nun leider weiterhin verloren gehen, nämlich zerstört werden durch die Unsymmetrie, welche die bei (IV.) über $\varkappa$ gemachte Voraussetzung in Bezug auf die beiden Kugeltheile (L) und (L') hineinbringt. Nach jener Voraussetzung ist nämlich für jedwedes Element $d\tau$:

$$\operatorname{abs} \varkappa \leqq G E^{2g} \ , \quad (G > 0 \ , \quad g > 0) \ ,$$

Digitized by Google

wo, ebenso wie in (1.), (2.), E den Abstand des Elementes $d\tau$ vom festen Punkte (x, y, z) vorstellt. Demgemäss gewinnen die Formeln (1.), (2.) die *nicht* mehr parallelen Gestalten:

$$\text{(3.)} \qquad \text{abs}\sum_{(L)} \leqq 4G \cdot \sum_{(L)} \frac{E^{2g-2}\, d\tau}{E'} \ ,$$

$$\text{(4.)} \qquad \text{abs}\sum_{(L')} \leqq 4G \cdot \sum_{(L')} \frac{E^{2g-1}\, d\tau}{E'^2} \ .$$

Für alle Elemente $d\tau$ des Körpers (L) ist $E' \geqq E$. Somit folgt aus (3.):

$$\text{(5.)} \quad \text{abs}\sum_{(L)} \leqq 4G \cdot \sum_{(L)} E^{2g-3} d\tau < 4G \cdot \sum_{(B)} E^{2g-3}\, d\tau \ ,$$

wo (B) eine mit dem Radius $B = 2A$ um (x, y, z) beschriebene Hülfskugel vorstellt. Die über diese Hülfskugel ausgedehnte *letzte* Summe hat offenbar den Werth:

$$\int_0^B E^{2g-3} \cdot 4\pi E^2\, dE = \frac{4\pi}{2g} B^{2g} < \frac{2\pi}{g} (2B)^{2g} = \frac{2\pi}{g} (4A)^{2g} \ .$$

Somit folgt aus (5.):

$$\text{(6.)} \qquad \text{abs}\sum_{(L)} < \frac{8\pi G}{g} (4A)^{2g} \ .$$

Nachdem die Formel (3.) in diese Gestalt versetzt ist, wenden wir uns jetzt zur Formel (4.), und beschreiben zu diesem Zwecke um (x', y', z') eine Hülfskugel vom Radius $B = 2A$. Bezeichnen wir diese neue Hülfskugel, zur Unterscheidung von der vorigen, mit (B'), so ergiebt sich aus (4.) sofort[1]):

---

1) Ebenso wie die frühere Hülfskugel (B) ihr Centrum in (x, y, z) hat, ebenso hat die gegenwärtige Hülfskugel (B') ihr Centrum in (x', y', z'). Bei beiden ist der Radius *derselbe*, nämlich $= B = 2A$.

Digitized by Google

$$(7.) \qquad \text{abs}\sum_{(L')} < 4G \cdot \underbrace{\sum_{(B')} \frac{E^{2g-1}\,d\tau}{E'^2}}_{J} .$$

Die Polarcoordinaten des Elementes $d\tau$ in einem Polarcoordinatensysteme, dessen Anfangspunkt mit (x', y', z') und dessen Axe mit λ zusammenfällt, sind dargestellt durch E', ferner durch den Winkel $\vartheta = (E', \lambda)$, und endlich durch dasjenige Azimuth φ, unter welchem die Ebene dieses Winkels gegen irgend eine feste durch λ gehende Ebene geneigt ist. Demgemäss ist $d\tau = E'^2\,dE'\,d\mu\,d\varphi$, wo $\mu = \cos\vartheta$; so dass also die in (7.) mit J bezeichnete Summe übergeht in:

$$(8.) \qquad J = \sum_{B')} E^{2g-1}\,dE'\,d\mu\,d\varphi \ .$$

Ist $2g = 1$, so folgt hieraus sofort:

$$(\alpha.) \qquad J = 4\pi B < 8\pi(B + B), \quad \text{für } 2g = 1 \ .$$

Ist ferner $2g > 1$, mithin $2g - 1$ *positiv*, so wird in (8.) das E^{2g-1} *vergrössert* werden, sobald man E *vergrössert*, also z. B., sobald man E ersetzt durch $E' + \lambda$; [denn aus dem Dreieck (E, E', λ) ergiebt sich: $E \leqq E' + \lambda$]. Somit folgt aus (8.):

$$J \leqq \sum_{(B')} (E' + \lambda)^{2g-1}\,dE'\,d\mu\,d\varphi = 4\pi \int_0^B (E' + \lambda)^{2g-1}\,dE' \ ,$$

d. i.

$$J \leqq 4\pi \frac{(B + \lambda)^{2g} - \lambda^{2g}}{2g} \ ,$$

also, weil λ (seiner Definition zufolge) stets $\leqq 2A = B$ ist:

$$(\beta.) \quad J \leqq 4\pi \frac{(B + B)^{2g}}{2g} < 8\pi \frac{(B + B)^{2g}}{2g}, \quad \text{für } 2g > 1 \ .$$

Ist endlich $2g < 1$, mithin $2g - 1$ *negativ*, so wird in (8.) das E^{2g-1} *vergrössert* werden, sobald man E *verkleinert*, also

Digitized by Google

z. B., sobald man E durch $\operatorname{abs}(\lambda - E')$ ersetzt; [denn aus dem Dreiecke (E, E', λ) ergiebt sich: $E \geqq \operatorname{abs}(\lambda - E')$]. Somit folgt aus (8.):

$$J \leqq \sum_{(B')} [\operatorname{abs}(\lambda - E')]^{2g-1} dE' \, d\mu \, d\varrho = 4\pi \int_0^B [\operatorname{abs}(\lambda - E')]^{2g-1} dE' .$$

Die hier auszuführende Integration über $E' = 0 \ldots B$ ist zerlegbar in die beiden Intervalle $0 \ldots \lambda$ und $\lambda \ldots B$; und zwar ist das $\operatorname{abs}(\lambda - E')$ im *ersten* Intervall $= \lambda - E'$, hingegen im *zweiten* $= E' - \lambda$. Somit folgt:

$$J \leqq 4\pi \int_0^\lambda (\lambda - E')^{2g-1} dE' + 4\pi \int_\lambda^B (E' - \lambda)^{2g-1} dE' ,$$

oder, falls man die Integrationen wirklich ausführt:

$$J \leqq 4\pi \frac{\lambda^{2g}}{2g} + 4\pi \frac{(B-\lambda)^{2g}}{2g} \leqq 4\pi \frac{B^{2g}}{2g} + 4\pi \frac{B^{2g}}{2g} ,$$

also a fortiori:

$$(\gamma.) \qquad J \leqq 8\pi \frac{(B+B)^{2g}}{2g} , \quad \text{für } 2g < 1 .$$

Für alle drei Fälle ergiebt sich also aus $(\alpha.)$, $(\beta.)$, $(\gamma.)$ die *gemeinschaftliche* Formel:

$$(9.) \qquad J \leqq 8\pi \frac{(2B)^{2g}}{2g} = \frac{4\pi}{g} (4A)^{2g} .$$

Dies in (7.) an Stelle von J substituirt, erhält man:

$$(10.) \qquad \operatorname{abs} \sum_{(L')} < \frac{16\pi G}{g} (4A)^{2g} .$$

Schliesslich folgt jetzt aus (6.) und (10.)

$$(11.) \qquad \operatorname{abs} \left(\sum_{(L)} + \sum_{(L')} \right) < \frac{24\pi G}{g} (4A)^{2g} ,$$

Digitized by Google

oder, was dasselbe ist:

$$(12.) \qquad \text{abs} \sum_{(A)} < \frac{24\pi G}{g} (4A)^{2g} . \text{ — Q. e. d.}$$

Ableitung der Potentialsätze. — Auf Grund der soeben bewiesenen Hülfssätze (I.), (II.), (III.), (IV.) ergiebt sich nun die Ableitung der zu Anfang dieses Aufsatzes von mir hingestellten vier Potentialsätze mit solcher *Leichtigkeit*, *Einfachheit* und *Uebersichtlichkeit*, dass es wohl überflüssig sein würde, hier auf diese Ableitung näher eingehen zu wollen.

Auch ist die Begründung der drei ersten Hülfssätze (I.), (II.), (III.) als eine sehr einfache zu bezeichnen. Nur für die Ableitung des (IV.)ten Hülfssatzes dürfte noch nach einem etwas *kürzeren* Wege zu suchen sein.

Beiläufige Bemerkung. — Wenn Herr Hölder in der schon citirten Dissertation (1882) auf Seite 42 bei seinen Untersuchungen über das Flächen-Potential von einem gewissen Wege spricht, den ich in meinem Werke über das Logarithmische und Newton'sche Potential (1877) auf Seite 14 als einen »*bequemen, aber allerdings nicht strengen*« Weg bezeichnet hätte, sonst aber meiner eignen Arbeiten in der Theorie des Flächen-Potentials *nirgends* Erwähnung thut, so könnte hierdurch leicht die Vorstellung erweckt werden, als ob ich mich mit jenem »bequemen« Wege begnügt hätte.

Dem gegenüber mag darauf hingewiesen sein, dass ich die Theorie des Flächen-Potentials bereits zwei Jahre vor dem Erscheinen der Hölder'schen Dissertation zum Gegenstande *eingehender* und *strenger* Untersuchungen gemacht habe. Diese Untersuchungen sind 1880 in zwei aufeinander folgenden Aufsätzen, in den Math. Annal. Bd. 16, Seite 409—440, ihrem allgemeinen Gange nach von mir angedeutet worden; auch sind die Resultate derselben dort sorgfältig formulirt. Und zwar beziehen sich diese Untersuchungen in ziemlich gleichmässiger Weise einerseits auf das Logarithmische Potential einer materiellen Curve in der Ebene, und andererseits auf das Newtonsche Potential einer materiellen Fläche im Raume. Später sind sodann diese Untersuchungen, wenigstens so weit sie das Logarithmische Potential betreffen, mehr *in extenso* von mir dargelegt werden in meiner »Methode des arithmetischen Mittels«

Digitized by Google

in den Abh. der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. vom Jahre 1888. — Dabei sei übrigens ausdrücklich bemerkt, dass es sich hier *nicht* um irgend welche Prioritätsansprüche handelt. Denn meine Untersuchungen sind, was ihre ganze Anlage und namentlich die Natur der gemachten Voraussetzungen betrifft, von den HÖLDER'schen Untersuchungen völlig verschieden.

Digitized by Google

SITZUNG VOM 20. OCTOBER 1890.

E. Study, *Ueber die Bewegungen des Raumes* [1].

Schreibt man eine orthogonale Substitution in drei Veränderlichen z_1, z_2, z_3 so:

$$(1) \qquad a_{00} z_i' = a_{i1} z_1 + a_{i2} z_2 + a_{i3} z_3 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

so kann man die Coefficienten a_{ik}, wie bekanntlich schon EULER gezeigt hat, durch vier homogene Parameter $a_0 : a_1 : a_2 : a_3$ in einfacher Weise ausdrücken:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} a_{00} = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & \\ a_{11} = a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 & \\ a_{22} = a_0^2 + a_2^2 - a_3^2 - a_1^2 & \\ a_{33} = a_0^2 + a_3^2 - a_1^2 - a_2^2 & \\ a_{23} = 2(a_2 a_3 + a_0 a_1) & a_{32} = 2(a_2 a_3 - a_0 a_1) \\ a_{31} = 2(a_3 a_1 + a_0 a_2) & a_{13} = 2(a_3 a_1 - a_0 a_2) \\ a_{12} = 2(a_1 a_2 + a_0 a_3) & a_{21} = 2(a_1 a_2 - a_0 a_3) \,. \end{array} \right.$$

Lässt man hier die Verhältnisse der Parameter a_i alle möglichen Werthe annehmen, und deutet man die Grössen z_i und z_i' als rechtwinklige Coordinaten im Raume, so erhält man die Gruppe aller Drehungen um den Anfangspunkt des Coordinatensystems.

Die Darstellung der Drehungen eines starren Körpers um einen festen Punkt durch die Formeln (1) und (2) besitzt nun bemerkenswerthe Eigenschaften. Erstens haben die Parameter a_i, oder vielmehr ihre Verhältnisse, wie schon vor langer Zeit Ro-

1) Der Inhalt dieser Mittheilung wurde in etwas verkürzter Form in der mathematischen Abtheilung der Naturforscherversammlung zu Bremen vorgetragen.

Digitized by Google

DRIGUES gezeigt hat, eine sehr einfache geometrische Bedeutung. Zweitens drücken sich die Coefficienten der orthogonalen Substitution durch die Parameter α_i rational aus, und umgekehrt lassen sich die Parameter α_i wieder durch rationale Operationen darstellen, wenn die Substitutionscoefficienten $a_{ik} : a_{00}$ gegeben sind. Endlich aber, und das ist das Wichtigste, kann man mit Hülfe der Parameter α_i zwei hinter einander ausgeführte Drehungen auf höchst einfache Weise zu einer neuen zusammensetzen. Seien α_i und α_i' die Parameter zweier Drehungen S und S', und α_i'' die Parameter der zusammengesetzten Drehung $S'' = SS'$, so hat man nach CAYLEY die einfachen Formeln

$$(3)\qquad \left|\begin{array}{l} \alpha_0'' = \alpha_0\alpha_0' - \alpha_1\alpha_1' - \alpha_2\alpha_2' - \alpha_3\alpha_3' \\ \alpha_1'' = \alpha_0\alpha_1' + \alpha_1\alpha_0' + \alpha_2\alpha_3' - \alpha_3\alpha_2' \\ \alpha_2'' = \alpha_0\alpha_2' + \alpha_2\alpha_0' + \alpha_3\alpha_1' - \alpha_1\alpha_3' \\ \alpha_3'' = \alpha_0\alpha_3' + \alpha_3\alpha_0' + \alpha_1\alpha_2' - \alpha_2\alpha_1' , \end{array}\right.$$

die das sogenannte *Multiplicationstheorem der Quaternionen* vorstellen. Die Parameter α_i' der zusammengesetzten Drehung S'' werden also lineare homogene Functionen der Parameter von S sowohl als auch der Parameter von S'; oder, wie wir kurz sagen wollen: *Die Euler'schen Parameter einer Drehung setzen sich bilinear zusammen.*

Eine noch einfachere Art der analytischen Darstellung und Zusammensetzung der Drehungen eines starren Körpers kann offenbar nicht gedacht werden. Es kommt aber noch die beachtenswerthe Thatsache hinzu, dass die angegebenen Ausdrücke EULER's in gewissem Sinne einzig in ihrer Art sind. Es lässt sich nämlich zeigen, dass jedes System von vier homogenen Parametern mit bilinearer Zusammensetzung, das zum Ausdruck der Drehungen eines starren Körpers dienen kann, mit den EULERschen Parametern durch eine lineare Substitution zusammenhängt, dass es also von den EULER'schen Parametern im Sinne der projectiven Auffassung nicht wesentlich verschieden ist.

Diese Bemerkungen haben den Verfasser veranlasst, sich die Frage vorzulegen, ob nicht die allgemeinere Gruppe aller ∞^6 Bewegungen des Raumes einer ähnlichen Parameterdarstellung fähig sei.

Will man dieser zunächst noch etwas unbestimmten Aufgabe eine scharfe Fassung geben, so dass das Vorhandensein

Digitized by Google

einer Lösung von vorn herein klar ist, so kann man sie etwa so aussprechen:

»Man soll die Coefficienten a_{ik} in den Gleichungen einer Bewegung des Raumes

$$(4) \qquad a_{00}\, z_i' = a_{i0} + a_{i1} z_1 + a_{i2} z_2 + a_{i3} z_3 \quad (i = 1,2,3)$$

durch eine möglichst geringe Zahl r von homogenen, durch $r-7$ unabhängige Relationen verknüpften Parametern in allgemeinster Weise derart ausdrücken, dass für diese Parameter bilineare Zusammensetzung besteht.«

Die Hülfsmittel zur Lösung dieser Aufgabe sind in der von Herrn S. Lie begründeten Theorie der Transformationsgruppen gegeben, sowie in neueren Untersuchungen über sogenannte Systeme von complexen Zahlen, die von Herrn Scheffers und vom Verfasser ausgestellt worden sind.

Das Ergebniss ist:

Eine Darstellung der Bewegungen des Raumes durch sieben homogene Parameter mit bilinearer Zusammensetzung ist *nicht* möglich.

Dagegen kann man die Bewegungen des Raumes durch acht homogene Parameter mit bilinearer Zusammensetzung ausdrücken, und zwar im Wesentlichen nur auf eine Art.

Im Wesentlichen: das heisst, abgesehen von *linearen* Transformationen der Parameter, und abgesehen natürlich auch von Umgestaltungen vermöge der Relation, die zwischen diesen Parametern angenommen werden muss.

Wählt man unter den verschiedenen Gestalten, deren die gefundene Parameterdarstellung hiernach noch fähig ist, ein geeignete aus, so kann man erreichen, dass die Coefficienten $a_{00}, a_{11} \cdots a_{33}$ nur von vier der acht Parameter $\alpha_0 \cdots \alpha_3$ abhängen, und dass ihre Ausdrücke gerade die Euler'schen werden. Die übrigen vier Parameter, die durch $\beta_0 \cdots \beta_3$ bezeichnet werden sollen, treten dann nur in den drei Coefficienten a_{10}, a_{20}, a_{30} auf, und zwar etwa in folgender Weise:

$$(5) \qquad \begin{cases} a_{10} = 2\,(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 - \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0) \\ a_{20} = 2\,(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 - \alpha_0\beta_2 + \alpha_2\beta_0) \\ a_{30} = 2\,(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 - \alpha_0\beta_3 + \alpha_3\beta_0)\,. \end{cases}$$

Die identische Relation zwischen den Parametern (α, β) lautet einfach:

Digitized by Google

$$0 = \alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3, \tag{6}$$

sie ist also linear in jedem einzelnen der acht Parameter.

Die Ausdrücke der Parameter α_i'' der aus zwei gegebenen Bewegungen $S(\alpha, \beta)$ und $S'(\alpha' \beta')$ zusammengesetzten Bewegung $S'' = SS'$ hängen nur von den Parametern α_i und α_i' ab, und werden wieder geliefert durch die Formeln (3); die Parameter β_i'' aber erhalten die folgenden Ausdrücke:

$$\left\{\begin{aligned}
\beta_0'' &= \alpha_0\beta_0' - \alpha_1\beta_1' - \alpha_2\beta_2' - \alpha_3\beta_3' \\
&\quad + \beta_0\alpha_0' - \beta_1\alpha_1' - \beta_2\alpha_2' - \beta_3\alpha_3' \\
\beta_1'' &= \alpha_0\beta_1' + \alpha_1\beta_0' + \alpha_2\beta_3' - \alpha_3\beta_2' \\
&\quad + \beta_0\alpha_1' + \beta_1\alpha_0' + \beta_2\alpha_3' - \beta_3\alpha_2' \\
\beta_2'' &= \alpha_0\beta_2' + \alpha_2\beta_0' + \alpha_3\beta_1' - \alpha_1\beta_3' \\
&\quad + \beta_0\alpha_2' + \beta_2\alpha_0' + \beta_3\alpha_1' - \beta_1\alpha_3' \\
\beta_3'' &= \alpha_0\beta_3' + \alpha_3\beta_0' + \alpha_1\beta_2' - \alpha_2\beta_1' \\
&\quad + \beta_0\alpha_3' + \beta_3\alpha_0' + \beta_1\alpha_2' - \beta_2\alpha_1'.
\end{aligned}\right. \tag{7}$$

Genügen die Parameter (α, β) und ebenso auch (α', β') der Gleichung (6), so thun es von selbst auch die Ausdrücke (3) und (7) der Parameter (α'', β'').

Wie man sieht, nimmt die gefundene Parameterdarstellung der Bewegungen an allen wesentlichen Vortheilen der Euler-schen Formeln theil; es darf von ihr behauptet werden, dass sie die *einfachste* Parameterdarstellung der Bewegungen des Raumes ist, die es gibt.

Der Ausdruck a_{00} spielt in unseren Formeln die Rolle der Discriminante der Bewegung $S(\alpha, \beta)$; so lange er von Null verschieden ist, ist auch die Determinante des Gleichungssystems (4) von Null verschieden. Aber auch umgekehrt:

Jeder eigentlichen, nicht ausgearteten Bewegung des Raumes entspricht nur *ein* System von Verhältnissen der Parameter (α, β); und zwar entsprechen einer reellen Bewegung auch reelle Werthe dieser Verhältnisse.

Besonders hervorgehoben zu werden verdient noch folgende Bemerkung:

Die entgegengesetzte S^{-1} der Bewegung $S(\alpha, \beta)$ wird einfach dadurch erhalten, dass man die Parameterverhältnisse

$$\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \beta_0 : \beta_1 : \beta_2 : \beta_3$$

Digitized by Google

durch die Verhältnisse

$$\alpha_0 : -\alpha_1 : -\alpha_2 : -\alpha_3 : \beta_0 : -\beta_1 : -\beta_2 : -\beta_3$$

ersetzt. —

Was ist nun die geometrische Bedeutung der Parameter (α, β)?

Bei Behandlung dieser Frage beschränken wir uns, um nicht zu sehr in Weitläufigkeiten zu gerathen, auf reelle Bewegungen, und nehmen in der Hauptsache auch nur Rücksicht auf den allgemeinen Fall einer eigentlichen *Schraubung* (Schraubenbewegung); wir setzen also zunächst voraus, dass die Bewegung keine blosse *Drehung*, und insbesondere auch keine blosse *Schiebung* (Parallelverschiebung, Translation, Drehung um eine unendlich ferne Axe) ist.

Dies angenommen, sei x irgend ein Punkt des Raumes, x' der ihm in der Bewegung $S(\alpha, \beta)$ zugeordnete Punkt, $\overline{x}$ die Mitte der »Sehne« xx', $\overline{\pi}$ die in $\overline{x}$ errichtete »Normalebene« der Sehne xx'.

Dann entsprechen sich bekanntlich x und $\overline{x}$ in einer gewissen affinen Transformation $\mathfrak{T}_1$, und $\overline{x}$ und x' in einer zweiten affinen Transformation $\mathfrak{T}_2$, so dass $S = \mathfrak{T}_1 \cdot \mathfrak{T}_2$.

Ferner entsprechen sich x und $\overline{\pi}$ in einer gewissen dualistischen Transformation T, und in derselben Transformation entsprechen sich auch die Ebene $\overline{\pi}$ und der Punkt x', so dass also die Bewegung S durch zweimalige Ausführung dieser dualistischen Transformation entsteht: $S = T^2$.[1]) Durch dieselbe dualistische Transformation werden ferner die Axen von je zwei Drehungen einander zugeordnet, die hinter einander ausgeführt die Bewegung S erzeugen (»Conjugirte Drehungen«).

Endlich entsprechen sich die Sehnenmitte $\overline{x}$ und die Normalebene $\overline{\pi}$ in einer involutorisch-dualistischen Transformation $\mathfrak{W}$, einem *Nullsystem*, dessen Hauptaxe die Axe der Schraubung S ist. Der zu diesem Nullsystem gehörige lineare Strahlencomplex mag der Kürze halber der »*Mittelcomplex*« genannt werden.

---

1) Wiewohl dieser Satz *implicite* schon in den Arbeiten von Chasles enthalten ist, und wiewohl er eine der wichtigsten Eigenschaften einer Bewegung zum Ausdruck bringt, scheint er doch bis jetzt noch nicht ausgesprochen worden zu sein.

Digitized by Google

Er ist der Ort aller Geraden, die auf den Sehnen xx' senkrecht stehen, deren Mitten $\overline{x}$ sie enthalten; und zugleich der Ort aller Axen conjugirter Drehungen, zu denen ein Drehungswinkel gleich zwei Rechten gehört.

Es ist nicht möglich, hier in der Kürze die Bedeutung völlig klarzulegen, die den Transformationen T und $\mathfrak{W}$ in der Theorie der Bewegungen zukommt. Nur soviel sei erwähnt, dass sie, in beliebiger Wiederholung zusammengefügt, eine unendliche Gruppe discreter Transformationen erzeugen, deren charakteristische Eigenschaften durch die beiden symbolischen Gleichungen

$$\mathfrak{W}^2 = 1, \quad T^2\mathfrak{W} = \mathfrak{W}T^2 \tag{8}$$

zum Ausdruck gebracht werden.

Diese und andere mit der Bewegung S verknüpfte geometrische Gebilde erhalten nun überraschend einfache analytische Ausdrücke, wenn man sich der Darstellung von S durch die Parameter (α, β) bedient. Führen wir statt der bisher benutzten Cartesischen rechtwinkligen Coordinaten z_1, z_2, z_3 homogene rechtwinklige Coordinaten $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ ein, die mit jenen durch die Gleichungen

$$\frac{x_1}{x_0} = z_1, \quad \frac{x_2}{x_0} = z_2, \quad \frac{x_3}{x_0} = z_3$$

zusammenhängen, und bedienen wir uns zugleich der mit dem Coordinatensystem (x) in bekannter Weise verknüpften Liniencoordinaten p_{ik} und Ebenencoordinaten u_i, so bestehen unter anderen die folgenden Sätze:

1) Die Coordinaten des Mittelcomplexes sind gegeben durch die Proportion

$$\begin{aligned} &p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{23} : p_{31} : p_{12} \\ &= \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \beta_1 : \beta_2 : \beta_3, \end{aligned}$$

d. h. dieser Complex, oder das Nullsystem $\mathfrak{W}$, hat in Ebenencoordinaten die Gleichung

$$\begin{cases} \alpha_1(u_0v_1 - u_1v_0) + \alpha_2(u_0v_2 - u_2v_0) + \alpha_3(u_0v_3 - u_3v_0) \\ + \beta_1(u_2v_3 - u_3v_2) + \beta_2(u_3v_1 - u_1v_3) + \beta_3(u_1v_2 - u_2v_1) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

2) Die Coordinaten aller reellen linearen Complexe, die bei der Schraubung $S(\alpha, \beta)$ in Ruhe bleiben, sind im Allgemeinen unter der Form darstellbar

Digitized by Google

$$(10)\quad \begin{cases} p_{01} = \lambda\alpha_1 \quad , \; p_{02} = \lambda\alpha_2 \quad , \; p_{03} = \lambda\alpha_3 \quad , \\ p_{23} = \lambda\beta_1 - \mu\alpha_1 \, , \; p_{31} = \lambda\beta_2 - \mu\alpha_2 \, , \; p_{12} = \lambda\beta_3 - \mu\alpha_3 , \end{cases}$$

worin man dem Parameter $\lambda : \mu$ alle möglichen Werthe zu ertheilen hat.

Insbesondere entspricht der Schraubenaxe der Bewegung S der Parameterwerth

$$(11)\quad \frac{\mu}{\lambda} = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{\alpha_1\alpha_1 + \alpha_2\alpha_2 + \alpha_3\alpha_3} = \frac{-\alpha_0\beta_0}{a_{00} - \alpha_0^2} .$$

3) Bezeichnet man mit 2ϑ den *Drehungswinkel* und mit 2η die *Schiebungsgrösse* der Schraubung S (d. i. die Länge der Strecke, um die irgend ein Punkt der Schraubenaxe fortrückt), nennt man endlich $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Neigungswinkel der Schraubenaxe gegen die positiven Richtungen der Coordinatenaxen, so besteht die Proportion

$$(12)\quad \begin{cases} \operatorname{ctg}\vartheta : \cos\lambda_1 : \cos\lambda_2 : \cos\lambda_3 : \eta \\ = \quad \alpha_0 : \quad \alpha_1 \quad : \quad \alpha_2 \quad : \quad \alpha_3 \quad : \beta_0 . \end{cases}$$

Verschwindet also der Parameter α_0, so ist der Drehungswinkel der Schraubung gleich zwei Rechten; verschwindet β_0, so reducirt sich die Bewegung S auf eine reine Drehung.

Hieraus und aus 2) folgt noch insbesondere:

4) Die *Umwendung* (Drehung um 180°) um eine Axe mit den Liniencoordinaten p_{ik} wird erhalten, wenn man den Parametern α_0 und β_0 den Werth Null, und den übrigen Parametern die Werthe

$$\begin{aligned} &\alpha_1 \; : \alpha_2 \; : \alpha_3 \; : \beta_1 \; : \beta_2 \; : \beta_3 \\ &= p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{23} : p_{31} : p_{12} \end{aligned}$$

beilegt.

5) Die dualistische Transformation T wird als eine Ebenen-Punkttransformation (Zuordnung zwischen Ebenen $\bar{\pi}$ und Punkten x') dargestellt durch die Gleichungen

$$(13)\quad \begin{cases} x_0 = \quad \cdot \quad + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 \\ x_1 = -\alpha_1 u_0 + \beta_0 u_1 + \beta_3 u_2 - \beta_2 u_3 \\ x_2 = -\alpha_2 u_0 - \beta_3 u_1 + \beta_0 u_2 + \beta_1 u_3 \\ x_3 = -\alpha_3 u_0 + \beta_2 u_1 - \beta_1 u_2 + \beta_0 u_3 , \end{cases}$$

Digitized by Google

oder durch die gleich Null gesetzte bilineare Form

$$(14)\quad \begin{cases} \beta_0 (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3) \\ -\{\alpha_1 (u_0 v_1 - u_1 v_0) + \alpha_2 (u_0 v_2 - u_2 v_0) + \alpha_3 (u_0 v_3 - u_3 v_0 \\ + \beta_1 (u_2 v_3 - u_3 v_2) + \beta_2 (u_3 v_1 - u_1 v_3) + \beta_3 (u_1 v_2 - u_2 v_1)\}. \end{cases}$$

Die Coefficienten werden also auch hier wieder *linear* in den Parametern (α, β). Das Gleiche gilt von der Transformation $\mathfrak{T}_1 = T\,\mathfrak{W}$, wenn man sie als eine Transformation von Ebenen auffasst; ihr Ausdruck wird alsdann

$$(15)\quad \begin{cases} u_0' = -\alpha_0 u_0 + \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3 \\ u_1' = \quad \cdot \quad + \alpha_0 u_1 + \alpha_3 u_2 - \alpha_2 u_3 \\ u_2' = \quad \cdot \quad - \alpha_3 u_1 + \alpha_0 u_2 + \alpha_1 u_3 \\ u_3' = \quad \cdot \quad + \alpha_2 u_1 - \alpha_1 u_2 + \alpha_0 u_3\,, \end{cases}$$

und analog wird der Ausdruck der Transformation $\mathfrak{T}_2 = \mathfrak{W}\,T$ als einer Transformation zwischen Punkten:

$$(16)\quad \begin{cases} x_0' = \quad \alpha_0 x_0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_1' = -\beta_1 x_0 + \alpha_0 x_1 + \alpha_3 x_2 - \alpha_2 x_3 \\ x_2' = -\beta_2 x_0 - \alpha_3 x_1 + \alpha_0 x_2 + \alpha_1 x_3 \\ x_3' = -\beta_3 x_0 + \alpha_2 x_1 - \alpha_1 x_2 + \alpha_0 x_3\,. \end{cases}$$

Wie man sieht, treten die Parameter (α, β) in den analytischen Ausdrücken der wichtigsten mit einer Bewegung S verknüpften Transformationen in sehr einfacher Weise auf; und dem entsprechend gestaltet sich auch die Rechnung mit diesen Transformationen sehr einfach, indem bei Zusammensetzung mehrerer von ihnen in der Regel Graderniedrigungen auftreten, hervorgerufen durch die Abscheidung von Factoren α_{00}, α_0 oder β_0.

Besondere Beachtung verdient der Ausdruck der dualistischen Transformation T durch die bilineare Form (14), weil er zeigt, dass die Erzeugung der Bewegung S durch Wiederholung der Transformation T genau dem Verfahren entspricht, das nach den Untersuchungen von HERMITE, CAYLEY und Anderen zur Darstellung der allgemeinen linearen Transformation einer allgemeinen Fläche 2. Classe angewendet wird.

Digitized by Google

Die linearen Transformationen, die eine Fläche 2. Classe und 2. Ordnung

$$u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0$$

unverändert lassen, sind bekanntlich identisch mit den linearen Transformationen, die die symmetrische bilineare Form

(17) $$u_0 v_0 + u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

in sich selbst überführen. Sie zerfallen in zwei Schaaren, die bei Beschränkung auf reelle Transformationen durch das Vorzeichen der Substitutionsdeterminante unterschieden werden können; die eine von diesen Schaaren bildet eine continuirliche Gruppe, die als die Gruppe der Bewegungen in einem Nicht-Euclidischen Raum aufgefasst werden kann.

Um die allgemeine Transformation dieser Gruppe zu erhalten, bildet man nun nach Cayley die Summe der symmetrischen Form (17) und einer beliebigen alternirenden Form, und setzt diese Summe gleich Null. Damit hat man den Ausdruck einer dualistischen Transformation T, und diese ergibt, zweimal hinter einander ausgeführt, zwar nicht jede, aber doch die allgemeine Transformation der genannten Gruppe.

Durch ein genau entsprechendes Verfahren sind wir nun zur Darstellung der Bewegungen des Euclidischen Raumes gelangt.

Die Gesammtheit aller linearen Transformationen, die den sogenannten absoluten Kegelschnitt unserer Maassbestimmung, die ausgeartete Fläche 2. Classe

(18) $$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0$$

in sich selbst überführen, zerfällt ebenfalls in zwei getrennte Schaaren. Von diesen bildet die eine eine siebengliedrige continuirliche Gruppe, die Gruppe der Aehnlichkeitstransformationen. Diese enthält eine sechsgliedrige invariante Untergruppe, die Gruppe aller Bewegungen des Raumes, die dadurch gekennzeichnet sind, dass sie als Transformationen von der Determinante Eins geschrieben, nicht allein die *Gleichung* (18), sondern bereits auch die zugehörige symmetrische bilineare *Form*

(19) $$u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

unverändert lassen.

Wir haben nun in dem Ausdruck der Transformation T die

Digitized by Google

Summe der Form (19) und einer allgemeinen alternirenden bilinearen Form, die für sich gleich Null gesetzt, den Mittelcomplex vorstellt; und diese Transformation T ergibt, wie gesagt, zweimal hinter einander ausgeführt, die allgemeine Bewegung des Raumes.

Die geometrische Bedeutung der Transformation T ist soeben angegeben worden. Wir sind also durch unsere Untersuchung nicht allein auf eine naturgemässe Weise dahin geführt worden, die Hermite-Cayley'sche Methode auf die Bewegungen des Raumes anzuwenden, sondern wir sind auch dazu gelangt, dieser Methode eine anschauliche Deutung unterzulegen.

Es muss übrigens noch hervorgehoben werden, dass man durch Wiederholung der dualistischen Transformation T zwar die *allgemeine*, aber doch nicht *jede* Bewegung des Raumes darstellen kann. Eine genauere Untersuchung zeigt vielmehr, dass die reinen Drehungen, die Bewegungen also, bei denen der Parameter β_0 verschwindet, ausgeschlossen sind. Eben hierin ist auch, ganz abgesehen von der Forderung der bilinearen Zusammensetzung der Parameter, die Nothwendigkeit begründet, neben den im Ausdruck von T allein auftretenden Parametern $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ noch den weiteren Parameter α_0 einzuführen: Erst durch unsere acht Parameter wird wirklich jede Bewegung darstellbar.

Ferner verdient bemerkt zu werden, dass die dualistische Transformation T nicht etwa die einzige dualistische Transformation ist, durch deren Wiederholung die Bewegung S entsteht. Vielmehr hat z. B. die dualistische Transformation $\mathfrak{W} T \mathfrak{W}$ dieselbe Eigenschaft. Die Transformation T selbst ist allerdings die einfachste und wichtigste Transformation dieser Art. —

Die continuirliche Gruppe einer allgemeinen Fläche 2. Grades ist bereits von Cayley durch acht homogene Parameter dargestellt worden, zwischen denen eine quadratische Relation besteht. Es liegt daher nahe, zu vermuthen, dass unsere Formeln aus den Cayley'schen durch einen *Grenzübergang* erhalten werden können. In der That lässt sich ein solcher Grenzübergang herstellen.

Schreibt man die Cayley'sche Transformation der quadratischen Form

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

Digitized by Google

mit Einführung zweckmässigerer Bezeichnungen an Stelle der Cayley'schen so:

$$(20)\quad \begin{cases} x_0' = (\alpha_0^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2-\beta_0^2-\beta_1^2-\beta_2^2-\beta_3^2)\,x_0 \\ \qquad + 2(\alpha_0\beta_1-\alpha_1\beta_0+\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)\,x_1 \\ \qquad + 2(\alpha_0\beta_2-\alpha_2\beta_0+\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)\,x_2 \\ \qquad + 2(\alpha_0\beta_3-\alpha_3\beta_0+\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\,x_3\,, \\ x_1' = -2(\alpha_0\beta_1-\alpha_1\beta_0-\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2)\,x_0 \\ \quad + (\alpha_0^2+\alpha_1^2-\alpha_2^2-\alpha_3^2-\beta_0^2-\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2)\,x_1 \\ \qquad + 2(\alpha_0\alpha_3-\beta_0\beta_3+\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)\,x_2 \\ \qquad - 2(\alpha_0\alpha_2-\beta_0\beta_2-\alpha_3\alpha_1+\beta_3\beta_1)\,x_3\,, \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

so lautet die genannte quadratische Relation

$$(21)\qquad \alpha_0\beta_0+\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=0\,.$$

Was die Zusammensetzung der Parameter angeht, so lässt sich zeigen, dass sie geleistet wird durch die Formeln (3), das Multiplicationstheorem der Quaternionen, in Verbindung mit den Formeln

$$(22)\quad \begin{cases} \beta_0'' = \alpha_0\beta_0' - \alpha_1\beta_1' - \alpha_2\beta_2' - \alpha_3\beta_3' \\ \qquad + \beta_0\alpha_0' - \beta_1\alpha_1' - \beta_2\alpha_2' - \beta_3\alpha_3' \\ \qquad + \beta_0\beta_0' - \beta_1\beta_1' - \beta_2\beta_2' - \beta_3\beta_3'\,, \\ \beta_1'' = \alpha_0\beta_1' + \alpha_1\beta_0' + \alpha_2\beta_3' - \alpha_3\beta_2' \\ \qquad + \beta_0\alpha_1' + \beta_1\alpha_0' + \beta_2\alpha_3' - \beta_3\alpha_2' \\ \qquad + \beta_0\beta_1' + \beta_1\beta_0' + \beta_2\beta_2' - \beta_3\beta_3', \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

Führen wir nun neue Parameter und neue Veränderliche ein durch die Substitutionen

$$(23)\qquad \alpha_i=\overline{\alpha}_i,\ \beta_i=\lambda\overline{\beta}_i,\ x_0=\overline{x}_0,\ x_i=\lambda\overline{x}_i,$$

und setzen wir dann nachträglich den Parameter λ gleich Null, so erhalten wir genau die früher angegebene Parameterdarstellung der Bewegungen des gewöhnlichen Raumes. — Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden, dass auch die Gruppe der Bewegungen im Nicht-Euclidischen Raume einer ganz ähnlichen Behandlung fähig ist, wie wir sie für die Gruppe der Bewegungen im gewöhnlichen Raume skizzirt haben. —

Digitized by Google

Versuchen wir, die Bewegungen in der Euclidischen *Ebene* unter Anwendung des Hermite-Cayley'schen Verfahrens durch Wiederholung einer dualistischen Transformation T zu erzeugen, so gelangen wir *nicht* zum Ziel; und ein ähnliches Verhalten zeigen zweifellos überhaupt alle Mannichfaltigkeiten gerader Dimension.

Die Erklärung dieser Erscheinung ist im Falle der Ebene in Folgendem zu suchen.

In der Ebene bilden die linearen Transformationen eines eigentlichen Kegelschnittes eine irreducibele Mannigfaltigkeit, eine continuirliche Gruppe; und diese Transformationen können nach Hermite durch Wiederholung einer dualistischen Transformation erzeugt werden. Lassen wir nun den Kegelschnitt ausarten, etwa in das Paar der sogenannten unendlich fernen Kreispunkte, so zerfällt jene Mannigfaltigkeit in zwei getrennte Schaaren, von denen die eine aus den Bewegungen, die andere aus den *Umlegungen* (symmetrisch-congruenten Transformationen) der Euclidischen Ebene besteht. Nur die Umlegungen, die für sich allein keine Gruppe bilden, können auch jetzt noch durch das Hermite'che Verfahren erzeugt werden, die Bewegungen aber nicht mehr.

Gleichwohl erhält man aus der Hermite'schen Transformation eines allgemeinen Kegelschnittes in der Ebene durch geeignete Grenzübergänge nicht allein Formeln zur Darstellung der Umlegungen, sondern auch Formeln zur Darstellung der Bewegungen der Euclidischen Ebene.

Die Formeln zur Darstellung der *Bewegungen* können so geschrieben werden:

$$(24)\quad \begin{cases} (a_0^2+a_1^2)\,x' = (a_0^2-a_1^2)\,x + 2\,a_0\,a_1\cdot y + 2\,(a_1a_2-a_0a_3) \\ (a_0^2+a_1^2)\,y' = -2\,a_0a_1\cdot x + (a_0^2-a_1^2)\,y + 2\,(a_3a_1+a_0a_2) \end{cases}$$

und die Formeln zur Darstellung der *Umlegungen* so:

$$(25)\quad \begin{cases} -(a_2^2+a_3^2)\,x' = (a_2^2-a_3^2)\,x + 2\,a_2a_3\cdot y + 2\,(a_1a_2-a_0a_3) \\ -(a_2^2+a_3^2)\,y' = 2\,a_2a_3\cdot x - (a_2^2-a_3^2)\,y + 2\,(a_3a_1+a_0a_2). \end{cases}$$

Mit Hülfe dieser Formeln, in denen den Parametern a_i wieder einfache geometrische Bedeutungen zukommen, kann man nun nicht allein zwei Bewegungen, sondern auch zwei Umlegungen,

Digitized by Google

oder auch eine Bewegung und eine Umlegung in der einfachsten Weise zusammensetzen.

Zwei *Bewegungen* $S(\alpha)$ und $S'(\alpha')$ geben hinter einander ausgeführt eine neue Bewegung $S'' = SS'$, deren Parameter durch die Formeln geliefert werden:

$$(26)\quad \begin{cases} \alpha_0'' = \alpha_0\alpha_0' - \alpha_1\alpha_1' \quad . \quad . \\ \alpha_1'' = \alpha_0\alpha_1' + \alpha_1\alpha_0' \quad . \quad . \\ \alpha_2'' = \alpha_0\alpha_2' + \alpha_2\alpha_0' + \alpha_3\alpha_1' - \alpha_1\alpha_3' \\ \alpha_3'' = \alpha_0\alpha_3' + \alpha_3\alpha_0' + \alpha_1\alpha_2' - \alpha_2\alpha_1' \end{cases}$$

Ebenso ergeben zwei *Umlegungen* $S(\alpha)$ und $S'(\alpha')$ zusammengesetzt eine Bewegung $S'' = SS'$, deren Parameter den Formeln zu entnehmen sind:

$$(27)\quad \begin{cases} \alpha_0'' = \quad . \quad . \quad - \alpha_2\alpha_2' - \alpha_3\alpha_3' \\ \alpha_1'' = \quad . \quad . \quad + \alpha_2\alpha_3' - \alpha_3\alpha_2' \\ \alpha_2'' = \alpha_0\alpha_2' + \alpha_2\alpha_0' + \alpha_3\alpha_1' - \alpha_1\alpha_3' \\ \alpha_3'' = \alpha_0\alpha_3' + \alpha_3\alpha_0' + \alpha_1\alpha_2' - \alpha_2\alpha_1' \end{cases}$$

Sei ferner $S(\alpha)$ eine *Bewegung*, und $S'(\alpha')$ eine *Umlegung* so wird die zusammengesetzte Transformation $S'' = SS'$ eine Umlegung mit den Parametern:

$$(28)\quad \begin{cases} \alpha_0'' = \alpha_0\alpha_0' - \alpha_1\alpha_1' - \alpha_2\alpha_2' - \alpha_3\alpha_3' \\ \alpha_1'' = \alpha_0\alpha_1' + \alpha_1\alpha_0' + \alpha_2\alpha_3' - \alpha_3\alpha_2' \\ \alpha_2'' = \alpha_0\alpha_2' \quad . \quad . \quad - \alpha_1\alpha_3' \\ \alpha_3'' = \alpha_0\alpha_3' \quad . \quad + \alpha_1\alpha_2' \quad . \end{cases}$$

Sei endlich $S(\alpha)$ eine *Umlegung* und $S'(\alpha')$ eine *Bewegung*, so werden die Parameter der zusammengesetzten Transformation $S'' = SS'$, die wieder eine Umlegung ist, gegeben durch die Gleichungen:

$$(29)\quad \begin{cases} \alpha_0'' = \alpha_0\alpha_0' - \alpha_1\alpha_1' - \alpha_2\alpha_2' - \alpha_3\alpha_3' \\ \alpha_1'' = \alpha_0\alpha_1' + \alpha_1\alpha_0' + \alpha_2\alpha_3' - \alpha_3\alpha_2' \\ \alpha_2'' = \quad . \quad + \alpha_2\alpha_0' + \alpha_3\alpha_1' \quad . \\ \alpha_3'' = \quad . \quad + \alpha_3\alpha_0' \quad . \quad - \alpha_2\alpha_1' \end{cases}$$

Digitized by Google

Der Grund für die bemerkenswerthe Gesetzmässigkeit der Formeln (26) · · · (29) liegt darin, dass sie allesammt Grenzfälle der Formeln (3) sind.

Auch im Raume stellen sich neben die congruenten Transformationen, die ∞^6 *Bewegungen*, ∞^6 symmetrische Transformationen, »*Umlegungen*« des Raumes, die mit den Bewegungen zusammen wieder eine Gruppe bilden. Auch die Umlegungen des Raumes lassen sich durch unsere Parameter (α, β) so ausdrücken, dass für die Parameter zweier hinter einander auszuführender Umlegungen, oder einer Umlegung und einer Bewegung bilineare Zusammensetzung besteht. Dieser Gegenstand mag indessen späterer Mittheilung vorbehalten bleiben. —

In dieser ganzen Betrachtung haben wir, um ihr einen möglichst elementaren Charakter zu verleihen, alle Coordinaten und Parameter einzeln geschrieben. Ich bin indessen nicht der Meinung, dass die Art von Einfachheit, die dem gewöhnlichen Coordinaten-Rechnen innewohnt, mit dem wahren Wesen der Dinge zusammentrifft. Es ist die historische Entwickelung der Wissenschaft, die Macht einer durch Generationen gepflegten Gewohnheit, die uns Das als natürlich erscheinen lässt, was wir uns in den ersten Studienjahren eingeprägt haben. Tiefer blickende Geister, wie Leibniz und dann vor Allen Hermann Grassmann, haben uns gelehrt, dass wir dabei nicht stehen bleiben dürfen. Freilich sind wir noch lange nicht so weit, überall nach den Principien verfahren zu können, die uns Grassmann als ein werthvolles Vermächtniss hinterlassen hat. In der Theorie der Bewegungen jedoch, wie in der elementaren Geometrie überhaupt sind wir dazu im Stande.

Ich hoffe, dass es mir möglich sein wird neben die hier geschilderte demnächst genauer auszuarbeitende Gestaltung der Lehre von den Bewegungen später noch eine andere zu stellen, daraus alle Willkür des Coordinatensystems verschwunden sein soll. Eine solche Behandlung der Bewegungen wird zwar nicht ganz so »elementar« sein, wie die gegenwärtige, dafür aber wird die algebraische Natur der einzelnen Processe desto klarer hervortreten.

Digitized by Google

Sophus Lie, *Ueber die Grundlagen der Geometrie.* (Zweite Abhandlung.)

Nach dem Vorgange von Riemann und Herrn v. Helmholtz habe ich versucht die Axiome, welche der Geometrie zu Grunde liegen, auf ein Minimum zurückzuführen. Ich habe mich dabei auf die Seiten dieses allgemeinen Problems beschränkt, welche, wie mir scheint, bisher nur unvollkommen behandelt worden sind. Eine kurze Zusammenfassung meiner wichtigsten Resultate gab ich schon im Jahre 1886 in diesen Berichten in der Note: *Bemerkungen zu v. Helmholtz' Arbeit über die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen.*

In einer Abhandlung, die vor Kurzem in diesen Berichten erschienen ist, entwickelte ich sodann eine ausführliche Begründung einiger neuer Resultate, die sich durch besondere Einfachheit und Schönheit auszeichnen. In der nachstehenden Arbeit gebe ich nunmehr eine vollständige Darstellung meiner übrigen Untersuchungen auf diesem Gebiete. Ich glaube durch dieselben die älteren Untersuchungen von Herrn v. Helmholtz und von Riemann wesentlich vervollständigt und verbessert zu haben.

Zu bemerken ist hierbei, dass ich mich in der vorliegenden Arbeit im Gegensatz zu der vorigen auf den *dreifach* ausgedehnten Raum beschränke. Ich bezweifle nicht, dass die hier abgeleiteten Resultate sich auf n-dimensionale Räume übertragen lassen. Es ist mir aber nicht gelungen diese Uebertragung durchzuführen. Dieselbe verlangt, wie es scheint, wesentlich andere Methoden, als von mir im Folgenden benutzt worden sind.

Digitized by Google

In neuerer Zeit hat sich Herr POINCARÉ mit ähnlichen Untersuchungen beschäftigt, leider ohne die einschlagende Litteratur vollkommen zu kennen. Es ist mir aber eine Befriedigung gewesen, dass auch dieser grosse Mathematiker in seiner interessanten Note meine Theorie der Transformationsgruppen zum Ausgangspunkte genommen hat. Unter diesen Umständen ist zu hoffen, dass die Bedeutung der Gruppentheorie für die Grundlagen der Geometrie in künftigen Untersuchungen gebührend berücksichtigt werden wird.

Herr POINCARÉ hat in anderen Arbeiten die Bedeutung der Gruppentheorie für die Theorie der complexen Zahlen klargestellt. Diese seine Bemerkung hat in neuerer Zeit die Herren SCHUR, STUDY und SCHEFFERS zu einer Reihe von interessanten Untersuchungen über complexe Zahlen vom gruppentheoretischen Standpunkt veranlasst. In dieser Richtung ist offenbar noch viel zu thun.

Andere Verfasser, insbesondere die Herren PICARD, STUDY und ENGEL haben in neuerer Zeit, wesentlich im Anschluss an meine Arbeiten, die Gruppentheorie auf die Theorie der Differentialgleichungen angewendet und mit der Invariantentheorie in Verbindung gebracht.

Endlich haben die Herren ENGEL, KILLING [1]) und SCHUR sowie einige unter meinen jüngeren Schülern mit grossem Erfolge in der abstracten Theorie der Transformationsgruppen gearbeitet.

Unter diesen Umständen darf ich hoffen, dass die Entwickelung dieser wichtigen Theorie, die ich als meine wesentlichste Lebensaufgabe betrachtet habe, auch zukünftig rasch vorwärts schreiten wird. Insbesondere wünsche ich, dass die *Bedeutung dieser Theorie für die Differentialgleichungen* durch neue Untersuchungen klarer gestellt werde. Es dürfte für jüngere Mathematiker eine dankbare Aufgabe sein, alle von mir skizzirten Integrationstheorien im Einzelnen auszuführen und ihren Zusammenhang mit anderen Untersuchungen auf diesem Gebiete klar zu stellen. Ich denke hier in erster Linie an

---

1) Die Untersuchungen des Herrn Prof. KILLING über die *Zusammensetzung der Gruppen* gehen wesentlich weiter als meine älteren Arbeiten auf diesem Gebiete. Verbunden mit meinen älteren Integrationstheorien geben sie Resultate von der höchsten Bedeutung für die Integralrechnung.

Digitized by Google

Halphen's bekannte Untersuchungen über Differentialinvarianten. Ich denke ferner an neuere Untersuchungen von jüngeren französischen Mathematikern, die thatsächlich mit meinen allgemeinen Theorien im genauesten Zusammenhange stehen.

Auch bei der Behandlung von rein geometrischen Problemen gewährt die Gruppentheorie oft mächtige Unterstützung.

Schliesslich glaube ich, dass auch die Mechanik dadurch gewinnen wird, wenn sie die Principien der Gruppentheorie verwerthet.

Ich habe geglaubt, dass es nützlich sein könnte, wenn ich einmal auf die Aufgaben hinwiese, deren Erledigung mir zur Förderung der Theorie der Transformationsgruppen zunächst wünschenswerth erscheint.

Ich hoffe bald dieser Gesellschaft eine Reihe Untersuchungen über *unendliche* Gruppen vorlegen zu können. Die Theorie der unendlichen Gruppen, die bis jetzt von mir nur unvollkommen skizzirt worden ist, eröffnet den Mathematikern ein noch grösseres und noch dankbareres Gebiet der Forschung, als die Theorie der endlichen Gruppen.

Ich habe es für richtig erachtet, der nachstehenden Arbeit eine möglichst *elementare Form* zu geben; aus der allgemeinen Theorie der Transformationsgruppen habe ich daher verhältnissmässig wenig und jedenfalls nur ganz einfache Sätze entlehnt.

§ 1.

Vorbereitende Entwickelungen.

Es sei

$$(1.)\qquad \begin{cases} x_1 = f(x, y, z, a_1, a_2 \ldots) \\ y_1 = \varphi(x, y, z, a_1, a_2 \ldots) \\ z_1 = \psi(x, y, z, a_1, a_2 \ldots) \end{cases}$$

eine Schaar von unendlich vielen *reellen* Transformationen des Raumes x, y, z, über welche wir die folgenden Annahmen machen:

A) Die Functionen f, φ, ψ mögen *analytische* Functionen der Coordinaten x, y, z und der Parameter a_1, a_2, a_3 ... sein.

Digitized by Google

B) Zwei Punkte x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 sollen gegenüber jeder Transformation unserer Schaar eine Invariante

$$\Omega(x_1, y_1, z_1, \quad x_2, y_2, z_2)$$

haben. Giebt es also eine Transformation der Schaar, welche diesen beiden Punkten die neuen Lagen

$$x_1', y_1', z_1'; \quad x_2', y_2', y_2'$$

ertheilt, so soll die Gleichung

$$\Omega(x_1', y_1', z_1', \quad x_2', y_2', z_2') = \Omega(x_1, y_1, z_1, \quad x_2, y_2, z_2)$$

bestehen.

C) Es findet im RIEMANN-HELMHOLTZ'schen Sinne freie Beweglichkeit des Raumes statt. Das heisst, der Punkt x_1, y_1, z_1 kann in jeden anderen Punkt übergeführt werden; wird der Punkt x_1, y_1, z_1 festgehalten, so kann jeder andere Punkt x_2, y_2, z_2 (*von allgemeiner Lage*) gerade ∞^2 Lagen annehmen, welche durch die Gleichung:

$$\Omega(x_1, y_1, z_1, x_2', y_2', z_2') = \Omega(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$$

bestimmt sind. Werden die beiden Punkte x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 festgehalten, so kann ein dritter Punkt x_3, y_3, z_3 von allgemeiner Lage gerade ∞^1 Lagen x_3', y_3', z_3' annehmen, welche durch die beiden Gleichungen

$$\Omega(x_1, y_1, z_1, x_3', y_3', z_3') = \Omega(x_1, y_1, z_1, x_3, y_3, z_3)$$

$$\Omega(x_2, y_2, z_2, x_3', y_3', z_3') = \Omega(x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3)$$

bestimmt sind. Werden endlich drei Punkte x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 festgehalten, so bleiben alle Punkte des Raumes in Ruhe, es sollen also die drei Gleichungen:

$$\Omega(x_1, y_1, z_1, x_4', y_4', z_4') = \Omega(x_1, y_1, z_1, x_4, y_4, z_4)$$

$$\Omega(x_2, y_2, z_2, x_4', y_4', z_4') = \Omega(x_2, y_2, z_2, x_4, y_4, z_4)$$

$$\Omega(x_3, y_3, z_3, x_4', y_4', z_4') = \Omega(x_3, y_3, z_3, x_4, y_4, z_4)$$

nur für $x_4' = x_4, y_4' = y_4, z_4' = z_4$ erfüllt sein.

Digitized by Google

Herr v. Helmholtz betrachtet ebenfalls Transformationsgleichungen, an die er, wenn ich ihn richtig verstanden habe, die drei Forderungen A, B und C stellt. Ueberdies stellt er noch eine vierte Forderung (sein Axiom der Monodromie), die in seinen Untersuchungen eine ganz besondere Rolle spielt. Dieses vierte Axiom wird in meiner Arbeit gar nicht benutzt [1]).

Ich will hervorheben, dass es mir keineswegs klar ist, ob ich Herrn v. Helmholtz's Axiome ganz correct wiedergegeben habe. Besonders an einer Stelle habe ich Zweifel gehegt, denen ich hier dadurch Ausdruck gegeben habe, dass ich die Worte »von allgemeiner Lage« eingeklammert habe. Ich komme auf diese für das Folgende besonders wichtige Bemerkung später zurück. Werden die eingeklammerten Worte, welche bei Herrn v. Helmholtz jedenfalls nicht ausdrücklich vorkommen, gestrichen, so ergiebt es sich, dass die drei Axiome, A, B, C, von denen sogar das erste A nicht wesentlich ist, vollkommen genügen, um die Bewegungen des Euclidischen Raumes vollständig zu charakterisiren [2]).

Erfüllt ein System von Transformationsgleichungen (1.) die Forderungen A, B, und C, so leuchtet unmittelbar ein

a) *erstens*, dass die Aufeinanderfolge von zwei solchen Transformationen stets wieder mit einer Transformation des Systems äquivalent ist;

b) *zweitens*, dass die zu einer Transformation der Schaar gehörige inverse Transformation ebenfalls der Schaar angehört.

---

1) In meiner Theorie der Transformationsgruppen habe ich den Begriff *Invariante von q Punkten* eingeführt. Mit Benutzung dieses allgemeinen Begriffes kommen die Forderungen B und C darauf hinaus, dass jede Invariante von q Punkten sich auf Invarianten zweier Punkte zurückführen lassen soll.

2) Ich will hier hervorheben, dass mein Freund Prof. Klein mich zuerst auf den Zusammenhang zwischen der mir damals unbekannten Helmholtz'schen Arbeit und meiner Theorie der Transformationsgruppen aufmerksam gemacht hat. Nach wiederholten Aufforderungen von seiner Seite unternahm ich es, eine sorgfältige gruppentheoretische Untersuchung des Riemann-Helmholtz'schen Problems über die Grundlagen der Geometrie durchzuführen. Herr Klein machte mich darauf aufmerksam, dass die Helmholtz'schen Resultate nicht von allen Seiten als endgültig betrachtet würden.

Digitized by Google

Herr v. HELMHOLTZ giebt diese beiden Schlüsse nicht ausdrücklich, sie sind jedoch implicite in seiner Arbeit enthalten.

Nun aber definire ich eine continuirliche Transformationsgruppe als eine Schaar von Transformationen, welche die Eigenschaften a) und b) besitzt. Dabei betrachte ich allerdings im Allgemeinen die in den Transformationsgleichungen auftretenden Grössen als complexe Veränderliche und nehme an, dass die Eigenschaften a) und b) für beliebige complexe Werthe der betreffenden Grössen bestehen. Das macht indess keinen wesentlichen Unterschied, weil reelle analytische Gleichungen von der Form (1.), welche die Forderungen a) b) für alle reellen Werthsysteme erfüllen, dies auch für complexe Werthsysteme thun; das werden wir bald erkennen.

Ein System Transformationsgleichungen (1.), welches Herrn v. HELMHOLTZ's drei erste Forderungen A, B und C erfüllt, bestimmt unter allen Umständen eine continuirliche Transformationsgruppe mit drei Veränderlichen und sechs Parametern; es sind ja drei Bedingungen erforderlich, um einen ersten Punkt x_1, y_1, z_1 festzuhalten; sodann kann ein zweiter Punkt x_2, y_2, z_2 sich nur auf einer Fläche bewegen, und es sind somit zwei Bedingungen erforderlich, um auch diesen zweiten Punkt festzuhalten; darnach kann ein dritter Punkt x_3, y_3, z_3 nur eine Curve beschreiben, zum Festhalten desselben genügt somit eine einzige Bedingung.

Da es aus Herrn von HELMHOLTZ's Forderungen unmittelbar hervorgeht, dass die Transformationsgleichungen (1.) sowohl die Eigenschaft a) wie die Eigenschaft b) besitzen, ist es überflüssig, hier auf die an sich wichtige Frage einzugehen, ob die Eigenschaft b) eine Consequenz der Eigenschaft a) ist. An einer anderen Stelle habe ich versucht, diese Frage eingehend zu erörtern.

Wird zuerst eine beliebige Transformation der Schaar (1.) und darnach die inverse Transformation, welche ebenfalls der Schaar angehört, ausgeführt, so entsteht eine Transformation der Schaar. Unsere Gruppe enthält somit die *identische Transformation*. Es ist daher möglich, den Parametern $a_1, a_2 \ldots$ solche Werthe $a_1^0, a_2^0 \ldots$ zu ertheilen, dass die Gleichungen

$$f(x, y, z, a_1^0, a_2^0 \cdots) = x \ ,$$
$$\varphi(x, y, z, a_1^0, a_2^0 \cdots) = y \ ,$$
$$\psi(x, y, z, a_1^0, a_2^0 \cdots) = z$$

Digitized by Google

bestehen. Giebt man den Parametern Werthe $a_k^0 + da_k$, die von den a_k^0 unendlich wenig verschieden sind, so erhält man jedesmal eine infinitesimale Transformation der Gruppe.

Ich gebe jetzt eine kurze Zusammenstellung meiner für das Folgende nothwendigen Sätze über die infinitesimalen Transformationen einer Gruppe. Dabei muss ich hervorheben, dass meine Beweise für diese Sätze noch gültig bleiben, wenn die Gruppeneigenschaft nur für reelle Werthsysteme als gegeben betrachtet wird.

Ertheilt eine infinitesimale Transformation den Grössen x, y, z die Zuwachse

$$\delta x = \xi(x, y, z)\,\delta t\,, \quad \delta y = \eta\,\delta t\,, \quad \delta z = \zeta\,\delta t\,,$$

so ertheilt sie einer beliebigen Function $f(x, y, z)$ den Zuwachs:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\xi + \frac{\partial f}{\partial y}\eta + \frac{\partial f}{\partial z}\zeta\right)\delta t\,.$$

Kennt man die Form dieses Zuwachses für ein unbestimmtes f, so kennt man gleichzeitig die drei Functionen ξ, η, ζ. Daher kann ich den Ausdruck:

$$\xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z} = Xf$$

als Symbol meiner infinitesimalen Transformation benutzen.

Sind mehrere etwa r unabhängige infinitesimale Transformationen:

$$X_k f = \xi_k\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_k\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$(k = 1, 2 \cdots r)$$

vorgelegt, so bezeichne ich dieselben als von einander unabhängig, wenn sie keine lineare Relation

$$c_1 X_1 f + \cdots + c_r X_r f = 0$$

mit constanten Coefficienten identisch erfüllen.

Dies vorausgesetzt, lauten die betreffenden Fundamentalsätze folgendermassen.

Digitized by Google

I. Eine continuirliche Transformationsgruppe mit r wesentlichen Parametern (deren Transformationen sich paarweise als inverse zusammenordnen lassen) enthält r unabhängige Transformationen $X_1 f \ldots X_r f$, und die allgemeinste infinitesimale Transformation der Gruppe hat die Form

$$e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f ,$$

wo $e_1 \ldots e_r$ willkürliche Constanten bezeichnen.

II. Die ∞^r endlichen Transformationen der Gruppe ordnen sich in ∞^{r-1} verschiedene Untergruppen, deren jede nur einen Parameter und eine infinitesimale Transformation

$$e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$$

enthält.

III. Sind $X_1 f \ldots X_r f$ r unabhängige infinitesimale Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe, so erfüllen dieselben paarweise Relationen von der Form:

$$X_i X_k f - X_k X_i f = \sum_s^{1 \ldots r} c_{iks} X_s f ,$$

in denen die c_{iks} Constanten bezeichnen.

IV. Sind umgekehrt r unabhängige infinitesimale Transformationen: $X_1 f \ldots X_r f$ gegeben, welche Relationen von der Form:

$$X_i X_k f - X_k X_i f = \sum_s^{1 \ldots r} c_{iks} X_s f$$

erfüllen, so giebt es eine Gruppe mit r Parametern, deren infinitesimale Transformationen die Form: $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ haben.

Aus diesen Sätzen können wir nun sogleich einen wichtigen Schluss ziehen.

Satz 1. *Erfüllen die Transformationsgleichungen (1.) die Forderungen* B, C, *wenn die auftretenden Grössen als reelle Veränderliche betrachtet werden, so bestimmen diese Gleichungen auch dann eine Gruppe, wenn die Grössen* x, y, z, a_1, a_2 ... *als complexe Veränderliche aufgefasst werden.*

Digitized by Google

In der That, die Sätze I, II, III, IV behalten ihre Geltung. Unsere Gruppe von reellen Transformationen (1.) enthält r reelle unabhängige infinitesimale Transformationen $X_1 f \ldots X_r f$, welche Relationen von der Form:

$$X_i X_k f - X_k X_i f = \sum_s^{1 \ldots r} c_{iks} X_s f$$

mit reellen Constanten c_{iks} erfüllen. Daher erzeugen die infinitesimalen Transformationen:

$$e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f \ ,$$

auch wenn $e_1 \ldots e_r$ als complexe Constanten aufgefasst werden, eine Gruppe von complexen Transformationen, unter denen sich die reellen Transformationen (1.) befinden.

§ 2.

Ableitung mehrerer Hülfssätze.

In dieser Arbeit stellen wir uns die Aufgabe, *alle sechsgliedrigen Transformationsgruppen*

$$X_k f = \xi_k \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_k \frac{\partial f}{\partial z} \ .$$
$$(k = 1 \ldots 6)$$

des Raumes x, y, z zu finden, welche durch reelle analytische Gleichungen definirt sind und für reelle Punkte die Forderungen B *und* C *erfüllen.* Wir wollen zunächst mehrere Eigenschaften der gesuchten Gruppen ableiten; dadurch wird uns die wirkliche Bestimmung aller dieser Gruppen, die wir in den folgenden Paragraphen durchführen, wesentlich erleichtert.

Wir stellen die Forderung B, dass alle Transformationen der gesuchten Gruppe eine gewisse Function der Coordinaten zweier Punkte:

$$\Omega(x_1, y_1, z_1; \ x_2, y_2, z_2)$$

invariant lassen sollen. Alsdann verhält sich natürlich auch jede Function von Ω als absolute Invariante. Die Forderung C lehrt

Digitized by Google

uns überdies, dass zwei Punkte ausser Ω (und allen Functionen von Ω) keine absolute Invariante haben.

Da alle endlichen Transformationen unserer Gruppe durch unendlich oft wiederholte Ausführung von infinitesimalen Transformationen erzeugt werden, so deckt sich die Forderung, dass Ω alle endlichen Transformationen unserer Gruppe gestatten soll, damit, dass Ω alle *infinitesimalen* Transformationen der Gruppe oder, was auf dasselbe hinauskommt, dass es sechs unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe

$$X_1 f \cdots X_6 f$$

gestatten soll.

Erhalten nun $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ bei einer infinitesimalen Transformation der Gruppe die Incremente $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \delta x_2, \delta y_2, \delta z_2$, so erhält eine Function $f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$ das Increment:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial f}{\partial z_1}\delta z_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\delta x_2 + \frac{\partial f}{\partial y_2}\delta y_2 + \frac{\partial f}{\partial z_2}\delta z_2 .$$

Unsere Forderung, dass unsere Gruppe eine und nur eine Invariante zweier Punkte besitzen soll, kommt hiernach darauf hinaus, dass die sechs linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$W_k f = 0 = \xi_k(x_1, y_1, z_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \eta_k(\cdots)\frac{\partial f}{\partial y_1} + \cdots + \zeta_k(x_2, y_2, z_2)\frac{\partial f}{\partial z_2}$$
$$(k = 1, 2 \cdots 6)$$

eine und nur eine gemeinsame Lösung:

$$f = \Omega(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$$

besitzen sollen.

Nun leuchtet ein, dass die $W_k f$ wie die $X_k f$ paarweise Relationen von der Form:

$$W_i W_k f - W_k W_i f = \sum_1^6 c_{iks} W_s f$$

erfüllen. *Sollen daher die Gleichungen $W_k f = 0$ ein vollständiges System mit nur einer Lösung bestimmen, so ist dazu nur erforderlich, dass die Determinante*

Digitized by Google

$$\Delta = \sum \pm \xi_1(x_1, y_1, z_1)\, \eta_2(x_1, y_1, z_1) \cdots \zeta_6(x_2, y_2, z_2)$$

identisch verschwindet, während ihre fünfreihigen Unterdeterminanten nicht alle gleich Null sind. Also:

Satz 2. *Bei einer sechsgliedrigen Gruppe $X_1 f \ldots X_6 f$ haben zwei Punkte eine und nur eine Invariante, sobald die Determinante Δ identisch verschwindet, während ihre fünfreihigen Unterdeterminanten nicht alle gleich Null sind.*

Für die Anwendungen ist es nützlich, dieses Kriterium auf eine andere Form zu bringen. Das erreichen wir folgendermassen.

Wir multipliciren die $W_k f$ mit solchen Functionen ψ_k von x_1, y_1, z_1, dass in dem Ausdrucke

$$\psi_1 W_1 f + \cdots + \psi_6 W_6 f$$

die Coefficienten von $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial y_1}$, $\frac{\partial f}{\partial z_1}$ alle gleich Null werden. Diese Forderung genügt natürlich nicht zur Bestimmung der ψ_k; die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\psi_1 \xi_1(x_1, y_1, z_1) + \cdots + \psi_6 \xi_6(x_1, y_1, z_1) &= 0 \\
\psi_1 \eta_1(\ \cdots\ ) + \cdots + \psi_6 \eta_6(\ \cdots\ ) &= 0 \\
\psi_1 \zeta_1(\ \cdots\ ) + \cdots + \psi_6 \zeta_6(x_1, y_1, z_1) &= 0
\end{aligned}$$

lassen sich nämlich, da die Gruppe $X_1 f \cdots X_6 f$ transitiv ist, nach drei von den ψ_k auflösen, und es können daher die drei übrigen ψ_k willkürlich gewählt werden.

Unter allen möglichen in dieser Weise hervorgehenden Ausdrücken $\Sigma \psi_k \cdot W_k f$ können wir drei wählen, etwa

$$\overline{W}_i f = \sum \psi_{ik}(x_1, y_1, z_1)\, W_k f, \quad (i = 1, 2, 3)$$

welche keine Relation:

$$w_1(x_1, y_1, z_1)\, \overline{W}_1 f + w_2\, \overline{W}_2 f + w_3\, \overline{W}_3 f = 0\ ,$$

erfüllen. Setzen wir dann:

$$\overline{W}_i f = \overline{\xi}_i \frac{\partial f}{\partial x_2} + \overline{\eta}_i \frac{\partial f}{\partial y_2} + \overline{\zeta}_i \frac{\partial f}{\partial z_2}, \quad (i = 1, 2, 3),$$

Digitized by Google

so verschwindet die Determinante

$$\sum \pm \overline{\xi}_1, \overline{\eta}_2, \overline{\zeta}_3 = \overline{\Delta}$$

gleichzeitig mit Δ, da Δ und $\overline{\Delta}$ sich nur um einen nicht verschwindenden Factor

$$\sum \pm \xi_a(x_1, y_1, z_1)\ \eta_b(x_1 \cdot\cdot)\ \zeta_c(x_1 \cdot\cdot)$$

unterscheiden. Es leuchtet andererseits ein, dass alle zweireihigen Unterdeterminanten von $\overline{\Delta}$ nur dann verschwinden, wenn alle fünfreihigen Determinanten von Δ gleich Null sind. *Bei einer sechsgliedrigen Gruppe $X_1 f \ldots X_6 f$ haben daher zwei Punkte eine und nur eine Invariante, sobald die dreireihige Determinante $\overline{\Delta}$ identisch verschwindet, während ihre zweireihigen Unterdeterminanten nicht alle gleich Null sind.*

Es ist nützlich, den begrifflichen Sinn dieses neuen Kriteriums näher zu erörtern.

Dass alle Transformationen unserer sechsgliedrigen Gruppe eine und nur eine Function der Coordinaten zweier Punkte x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 invariant lassen, kommt darauf hinaus, dass ein beliebig gewähltes Punktepaar durch die Transformationen der Gruppe nicht in alle anderen Punktepaare, sondern nur in ∞^5 verschiedene Punktepaare übergeführt werden kann. Das ist offenbar dann und nur dann der Fall, wenn erstens ein beliebig gewählter Punkt x_1, y_1, z_1 in jeden andern Punkt x_1', y_1', z_1' übergeführt werden kann und wenn zweitens die Transformationen der Gruppe, welche den Punkt x_1', y_1', z_1' invariant lassen, einem beliebig gewählten Punkte x_2, y_2, z_2 noch gerade ∞^1 verschiedene Lagen ertheilen können.

Bei einer sechsgliedrigen Gruppe haben daher zwei Punkte eine und nur eine Invariante, sobald erstens die Gruppe transitiv ist und sobald zweitens die Transformationen der Gruppe, die einen beliebig gewählten Punkt x_1', y_1', z_1' festhalten, jeden anderen Punkt von allgemeiner Lage in ∞^2 verschiedene andere Punkte überführen können.

Hiermit ist die begriffliche Deutung des früher abgeleiteten analytischen Kriteriums gefunden. In der That, die infinitesimalen Transformationen: $\overline{W}_i f = \sum \psi_{ik}(x_1, y_1, z_1)\ W_k f$ lassen den

Digitized by Google

Punkt x_1, y_1, z_1 in Ruhe und sind die allgemeinsten Transformationen der Gruppe $X_k f$, welche diesen Punkt invariant lassen. Dass die Determinante Δ verschwindet, während ihre zweireihigen Unterdeterminanten nicht alle gleich Null sind, bedeutet, dass die Transformationen $\overline{W}_i f$ den Punkt x_1, y_1, z_1 in gerade ∞^2 verschiedene andere Punkte überführen können.

Betrachten wir für einen Augenblick die Gruppe der Euclidischen Bewegungen. Alle Transformationen dieser Gruppe, die einen Punkt x_1, y_1, z_1 in Ruhe halten, ertheilen einem anderen Punkte x_2, y_2, z_2 ∞^2 verschiedene Lagen, deren Inbegriff eine Kugel mit dem Mittelpunkt x_1, y_1, z_1 bildet. Die ∞^3 Punkte des Raumes vertheilen sich auf ∞^1 Kugeln mit demselben Mittelpunkt x_1, y_1, z_1.

In dem allgemeinen von uns betrachteten Falle ist es zweckmässig, eine entsprechende Ausdrucksweise anzuwenden. Die Transformationen unserer Gruppe, welche den Punkt x_1, y_1, z_1 in Ruhe halten, ertheilen einem anderen Punkte x_2, y_2, z_2 ∞^2 verschiedene Lagen, deren Inbegriff eine Fläche bildet; wir nennen diese Fläche eine *Pseudokugel* und betrachten x_1, y_1, z_1 als ihren *Pseudomittelpunkt*. Jeder Punkt x_1, y_1, z_1 ist auf diese Weise der Pseudomittelpunkt von ∞^1 Pseudokugeln. Jede Pseudokugel mit dem Mittelpunkt x_1, y_1, z_1 wird dargestellt durch die Gleichung:

$$\Omega(x_1, y_1, z_1, x_2^0, y_2^0, z_2^0) = \Omega(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) ,$$

wenn wir darin x_2^0, y_2^0, z_2^0 als einen gegebenen, x_2, y_2, z_2 als einen veränderlichen Punkt betrachten.

Alle Transformationen $\overline{W}_i f$ unserer Gruppe, welche den Punkt x_1, y_1, z_1 in Ruhe lassen, führen jeden Punkt in die ∞^2 Punkte der hindurchgehenden Pseudokugel mit dem Mittelpunkte x_1, y_1, z_1 über.

Ehe wir weiter gehen, wollen wir noch das früher abgeleitete analytische Kriterium in der folgenden Form aussprechen:

Satz 3. *Bei der sechsgliedrigen Gruppe:*

$$X_k f = \xi_k \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_k \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$(k = 1, \cdots 6)$$

Digitized by Google

besitzen zwei Punkte eine und nur eine Invariante, wenn erstens die dreireihigen Determinanten $\sum \pm \xi_i \eta_k \zeta_j$ *nicht alle verschwinden, und wenn zweitens die Determinante* Δ *von drei unabhängigen infinitesimalen Transformationen* $c_1 X_1 f + \cdots + c_6 X_6 f$, *welche einen Punkt allgemeiner Lage* x_1, y_1, z_1 *invariant lassen, selbst verschwindet, während ihre zweireihigen Unterdeterminanten nicht alle gleich Null sind.*

Alle Pseudokugeln mit dem gemeinsamen Mittelpunkte x_1, y_1, z_1 erfüllen nach dem Vorangehenden drei lineare partielle Differentialgleichungen

$$W_1 f = 0 , \quad W_2 f = 0 , \quad W_3 f = 0 ,$$

unter denen jedoch nur je zwei von einander unabhängig sind.

Es seien demnach:

$$\alpha_k \frac{\partial f}{\partial x} + \beta_k \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma_k \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (k = 1, 2)$$

zwei unabhängige lineare partielle Differentialgleichungen, welche von allen Pseudokugeln mit dem Mittelpunkte x_1, y_1, z_1 erfüllt werden.

Nach ihrer Ableitung hängen die Coefficienten α_k, β_k, γ_k nicht nur von x, y, z, sondern auch von x_1, y_1, z_1 ab und wir werden zeigen, dass sie von x_1, y_1, z_1 nicht blos formal abhängen.

Unsere Behauptung kommt darauf hinaus, dass die Schaar:

$$\Omega(x_1, y_1, z_1, x, y, z) = a = \text{Const.}$$

der Pseudokugeln mit demselben Mittelpunkte nicht von diesem Mittelpunkte unabhängig sein kann; anders ausgesprochen: wir behaupten, dass es im Raume mehr als ∞^1 verschiedene Pseudokugeln giebt.

Setzen wir in der That voraus, dass es nur ∞^1 Pseudokugeln giebt, dass also durch jeden Punkt des Raumes nur eine Pseudokugel hindurchgeht. Halten wir nun mit Herrn v. HELMHOLTZ zwei reelle Punkte p_1 und p_2 von allgemeiner Lage fest, so kann nach seinem Principe der freien Beweglichkeit ein beliebiger dritter Punkt p sich nur auf einer Curve bewegen und zwar auf

Digitized by Google

der Schnittcurve der beiden durch p gehenden Pseudokugeln, deren Mittelpunkte eben p_1 und p_2 sind. Das Princip der freien Beweglichkeit schliesst also die Annahme, dass durch p nur eine Pseudokugel hindurchgeht, ohne Weiteres aus.

Betrachtet man daher jeden Punkt des Raumes als Mittelpunkt von ∞^1 Pseudokugeln, so ist die Anzahl aller dieser Pseudokugeln mindestens ∞^2.

Hiermit ist nachgewiesen, dass es unmöglich ist, in den Veränderlichen x, y, z *zwei* unabhängige lineare partielle Differentialgleichungen;

$$\alpha_k \frac{\partial f}{\partial x} + \beta_k \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma_k \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (k = 1, 2)$$

aufzustellen, welche von allen Pseudokugeln des Raumes befriedigt werden, wohlbemerkt, wenn die Forderung hinzugefügt wird, dass die Coefficienten α_k, β_k, γ_k von den Coordinaten x_1, y_1, z_1 des Mittelpunktes unabhängig sein sollen.

Wir gehen jetzt einen Schritt weiter und behaupten, dass es sogar unmöglich ist, eine einzelne lineare partielle Differentialgleichung

$$Af = 0 = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma \frac{\partial f}{\partial z}$$

anzugeben, welche von allen Pseudokugeln des Raumes erfüllt wird und deren Coefficienten von x_1, y_1, z_1 unabhängig sind.

Gesetzt nämlich, dass alle Pseudokugeln des Raumes eine Gleichung: $Af = 0$ erfüllten, deren Coefficienten von x, y, z unabhängig wären. Alsdann besässen alle Pseudokugeln die gemeinsame Gleichungsform $u - f(v) = 0$, wo u und v zwei unabhängige Lösungen der Gleichung $Af = 0$ bezeichneten. Zugleich bestimmten die Gleichungen:

$$u = a = \text{Const.}, \quad v = b = \text{Const.}$$

∞^2 Curven des Raumes: die Monge'schen Charakteristiken der Gleichung $Af = 0$, und jede Pseudokugel wäre von ∞^1 solchen Charakteristiken erzeugt.

Digitized by Google

Da nun durch jeden Punkt des Raumes nur eine Charakteristik hindurchgeht, so hätten alle durch den Punkt p gehenden Pseudokugeln eine gemeinsame Schnittcurve, nämlich die durch diesen Punkt gehende Charakteristik.

Hieraus folgt sogleich, dass die Charakteristiken reelle Curven sein müssen. Denn nach v. HELMHOLTZ' Princip der freien Beweglichkeit schneiden sich zwei durch einen reellen Punkt p gehende Pseudokugeln mit den Mittelpunkten p_1 und p_2 in einer reellen Curve, welche von dem Punkte p durchlaufen wird, wenn die beiden Punkte p_1 und p_2 festgehalten und sodann die noch möglichen Bewegungen des Raumes ausgeführt werden. Erfüllten daher alle Pseudokugeln die lineare partielle Differentialgleichung $Af = 0$, so müssten die Coefficienten α, β, γ oder jedenfalls ihre Verhältnisse reelle Functionen von x, y, z sein.

Es ist aber leicht zu sehen, dass dieser Fall gar nicht eintreten kann. Das Princip der freien Beweglichkeit verlangt ja, dass wenn drei Punkte von allgemeiner Lage: p_1, p_2 und p_3 festgehalten werden, dass dann die durch einen vierten Punkt p von allgemeiner Lage gehenden Pseudokugeln mit den Mittelpunkten p_1, p_2, p_3 nur den einen Punkt p gemein haben.

Es gilt somit der

Satz 4. *Erfüllt eine sechsgliedrige Transformationsgruppe die beiden Forderungen* B *und* C, *so giebt es keine lineare partielle Differentialgleichung*:

$$Af = \alpha(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y} + \gamma\frac{\partial f}{\partial z} = 0\ ,$$

welche von allen Pseudokugeln mit dem Mittelpunkte x_1, y_1, z_1 *befriedigt wird und deren Coefficienten von* x_1, y_1, y_1 *unabhängig sind.*

Aus den beiden abgeleiteten Hülfssätzen lassen sich jetzt wichtige Schlüsse ziehen, welche die Bestimmung aller sechsgliedrigen Transformationsgruppen mit den verlangten Eigenschaften wesentlich erleichtern.

Zunächst zeigen wir, dass eine sechsgliedrige Transformationsgruppe, welche die beiden Forderungen B und C erfüllt, nie zwei infinitesimale Transformationen:

Digitized by Google

$$X_k f = \xi_k \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_k \frac{\partial f}{\partial z} \quad (k = 1, 2)$$

enthält, welche durch eine lineare Relation

$$\varphi_1(x, y, z)\, X_1 f + \varphi_2(x, y, z)\, X_2 f = 0$$

verknüpft sind und somit dieselben Bahncurven besitzen.

Enthielte nämlich die Gruppe zwei solche infinitesimale Transformationen $X_1 f$ und $X_2 f$, so besässe sie auch immer eine von der Form: $c_1 X_1 f + c_2 X_2 f$, welche einen beliebig gewählten Punkt x_1, y_1, z_1 in Ruhe liesse, nämlich die Transformation:

$$\varphi_1(x_1, y_1, z_1) \cdot X_1 f + \varphi_2(x_1, y_1, z_1) \cdot X_2 f \ .$$

Es erfüllten daher alle Pseudokugeln mit dem Mittelpunkte x_1, y_1, z_1 die lineare partielle Differentialgleichung:

$$\varphi_1(x_1, y_1, z_1)\, X_1 f + \varphi_2(x_1, y_1, z_1)\, X_2 f = 0 \ ,$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Gleichung

$$[\varphi_1(x_1, y_1, z_1) \cdot \varphi_2(x, y, z) - \varphi_2(x_1, y_1, z_1) \cdot \varphi_1(x, y, z)]\, X_1 f = 0 \ ,$$

welche mit der Gleichung

$$X_1 f = 0$$

aequivalent wäre, da der Factor:

$$\varphi_1(x_1, y_1, z_1) \cdot \varphi_2(x, y, z) - \varphi_2(x_1, y_1, z_1) \cdot \varphi_1(x, y, z)$$

nicht identisch gleich Null ist. Hiermit sind wir indess auf einen Widerspruch geführt, weil alle Pseudokugeln mit dem Mittelpunkte x_1, y_1, z_1 keine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung erfüllen können, deren Coefficienten von x_1, y_1, z_1 unabhängig sind.

Später wird sich ergeben, dass eine sechsgliedrige Gruppe häufig eine Schaar von ∞^1 Flächen invariant lässt. Es ist daher zweckmässig, schon hier Gruppen zu betrachten, welche die beiden besprochenen Forderungen erfüllen und gleichzeitig eine Schaar von ∞^1 Flächen $\varphi(x, y, z) = a =$ Const. invariant lassen.

Digitized by Google

Ist eine derartige Gruppe vorgelegt, so können wir durch Einführung des φ als eines neuen x immer erreichen, dass die infinitesimalen Transformationen unserer Gruppe sämmtlich die Form:

$$\xi_k(x)\frac{\partial f}{\partial x}+\eta_k\frac{\partial f}{\partial y}+\zeta_k\frac{\partial f}{\partial z}$$

erhalten, wo die ξ_k nur von x abhängen. Es ist dann klar, dass die verkürzten infinitesimalen Transformationen $\xi_k(x)\frac{\partial f}{\partial x}$ selbst eine Gruppe erzeugen. Nach meiner allgemeinen Theorie kann überdies stets eine solche Function von x als neues x eingeführt werden, dass alle ξ_k ganze Functionen vom zweiten Grade in x werden:

$$\xi_k = a_k + b_k x + c_k x^2 \ .$$

Es sind daher immer vier oder eine noch geringere Anzahl ξ_k immer durch eine lineare Relation mit constanten Coefficienten verknüpft. Wir wollen nun untersuchen, welche Möglichkeiten in unserem Falle wirklich eintreten können.

Da die sechsgliedrige Gruppe transitiv ist, können die ξ_k nicht alle gleich Null sein; daher kommen in den zwischen ξ_k bestehenden linearen homogenen Relationen mindestens zwei solche Grössen vor. Wäre nun dies der Fall, so bestimmten alle $\xi_k\frac{\partial f}{\partial x}=\xi_k p$ eine eingliedrige Gruppe, welche auf die Form p reducibel wäre. Dann wäre $x_1 - x_2$ eine Invariante von zwei Punkten, und also würden die zu dem Mittelpunkte x_1, y_1, z_1 gehörigen ∞^1 Pseudokugeln durch die Gleichung

$$x_1 - x = a = \text{Const.}$$

dargestellt. In diesem Falle existirten also nur ∞^1 Pseudokugeln, nämlich die Ebenen $x = \text{Const.}$; da aber die Anzahl der Pseudokugeln, wie früher nachgewiesen, immer grösser als ∞^1 ist, so können die verkürzten infinitesimalen Transformationen: $\xi_k(x)\,p$ nicht blos eine eingliedrige Gruppe bestimmen.

Wir wollen jetzt untersuchen, ob es denkbar ist, dass die verkürzten infinitesimalen Transformationen $\xi_k(x)\,p$ eine *zweigliedrige* Gruppe bestimmen, oder, was auf dasselbe hinaus-

Digitized by Google

kommt, ob es denkbar ist, dass jedesmal drei von den Grössen ξ_k durch eine lineare homogene Relation verknüpft sind.

In dem angenommenen Falle liessen sich die ξ_k nach meiner allgemeinen Theorie auf die Form

$$a_k + b_k x$$

bringen, es enthielte also die sechsgliedrige Gruppe des Raumes sechs unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form:

$$\begin{aligned} & p + \eta_1 q + \zeta_1 r \\ & xp + \eta_2 q + \zeta_2 r \\ & \eta_k q + \zeta_k r , \quad (k = 3, 4, 5, 6) , \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = q , \quad \frac{\partial f}{\partial z} = r$$

gesetzt ist. Ein Punkt x_1, y_1, z_1 von allgemeiner Lage gestattete in Folge dessen drei infinitesimale Transformationen von der Form:

$$\begin{aligned} \overline{X_1} f &= (x - x_1) p + \overline{\eta_1} q + \overline{\zeta_1} r , \\ \overline{X_2} f &= \overline{\eta_2} q + \overline{\zeta_2} r , \\ \overline{X_3} f &= \overline{\eta_3} q + \overline{\zeta_3} r , \end{aligned}$$

deren Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} x - x_1 & \overline{\eta_1} & \overline{\zeta_1} \\ 0 & \overline{\eta_2} & \overline{\zeta_2} \\ 0 & \overline{\eta_3} & \overline{\zeta_3} \end{vmatrix} = (x - x_1) \begin{vmatrix} \overline{\eta_2} & \overline{\zeta_2} \\ \overline{\eta_3} & \overline{\zeta_3} \end{vmatrix}$$

nach dem Satze 3 sicher Null wäre. Unsere Gruppe enthielte also zwei infinitesimale Transformationen $\overline{X_2} f$ und $\overline{X_3} f$, welche durch eine lineare Relation:

$$\varphi_2(x, y, z)\, \overline{X_2} f + \varphi_3(x, y, z)\, \overline{X_3} f \equiv 0$$

verknüpft wären. Da dies indess nach einer früheren Bemerkung ausgeschlossen ist, folgt der

Digitized by Google

Satz 5. *Lässt eine sechsgliedrige Transformationsgruppe des Raumes x, y, z, welche die Forderungen B und C erfüllt, eine Schaar von ∞^1 reellen oder imaginären Flächen invariant, so transformirt sie diese Flächenschaar, die ja eine einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit bildet, durch eine dreigliedrige Gruppe.*

In meiner ersten Abhandlung über die Grundlagen der Geometrie zeigte ich, dass *eine dreigliedrige projective Gruppe der Ebene entweder aus allen projectiven Transformationen besteht, welche einen Kegelschnitt invariant lassen, oder einen Punkt in Ruhe lässt.*

Für das Folgende ist es nothwendig, ähnliche Sätze für ein- und zweigliedrige projective Gruppen aufzustellen.

Eine eingliedrige projective Gruppe einer Ebene lässt immer mindestens einen Punkt in Ruhe.

Betrachten wir jetzt eine zweigliedrige projective Gruppe $X_1 f$, $X_2 f$ der Ebene. Eine allgemeine infinitesimale Transformation $c_1 X_1 f + c_2 X_2 f$ lässt entweder mindestens einen isolirten Punkt oder alle Punkte einer Geraden in Ruhe. Im ersten Falle ist es denkbar, dass alle ∞^1 infinitesimalen Transformationen $c_1 X_1 + c_2 X_2$ denselben Punkt in Ruhe lassen; tritt dieser Fall nicht ein, so bilden die ∞^1 invarianten Punkte eine Curve, welche offenbar bei der zweigliedrigen Gruppe invariant bleibt. — Lässt andrerseits eine allgemeine infinitesimale Transformation $c_1 X_1 f + c_2 X_2 f$ alle Punkte einer Geraden in Ruhe, so ist es denkbar, dass zu allen Transformationen dieselbe Gerade gehört, es ist aber auch denkbar, dass ∞^1 solche Gerade auftreten, welche dann eine invariante Curve oder einen invarianten Punkt umhüllen.

Bei einer zweigliedrigen projectiven Gruppe bleibt also entweder ein Punkt oder eine Gerade oder eine krumme Curve invariant. Im zweiten dieser drei Fälle bleibt auf der Geraden nothwendig ein Punkt stehen. Im dritten Falle ist die krumme Curve nach einem bekannten Satze ein Kegelschnitt und auf diesem Kegelschnitt bleibt ebenfalls ein Punkt invariant. Es gilt somit der allgemeine Satz:

Satz 6. *Lässt eine projective Gruppe der Ebene mit weniger als vier Parametern keinen Punkt in Ruhe, so ist sie dreigliedrig und besteht aus allen projectiven Transformationen, welche einen Kegelschnitt in sich überführen.*

Digitized by Google

§ 3.

Zerlegung des Problems.

Jetzt können wir unser allgemeines Problem in Angriff nehmen und alle sechsgliedrigen Transformationsgruppen des Raumes bestimmen, bei denen zwei Punkte eine und nur eine Invariante haben, während freie Beweglichkeit im bekannten Sinne stattfindet.

Ist eine derartige Gruppe vorgelegt, so erzeugen alle Transformationen derselben, die einen Punkt von allgemeiner Lage in Ruhe lassen, eben weil die Gruppe transitiv ist, eine *dreigliedrige* Untergruppe. Die durch den festgehaltenen Punkt gehenden Linienelemente bilden eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, welche von den Transformationen der soeben besprochenen dreigliedrigen Gruppe projectiv transformirt wird. Diese projectiven Transformationen unserer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit bilden eine Gruppe mit *höchstens* drei Parametern [1]). Daher zeigen die vorangehenden Entwickelungen (Satz 6), dass zwei Möglichkeiten vorhanden sind. Mit jedem Punkte von allgemeiner Lage ist entweder eine Richtung $dx : dy : dz$ oder ein Kegel zweiten Grades invariant verknüpft.

Im letzten Falle lässt die Gruppe eine Differentialgleichung zweiten Grades

$$0 = \alpha dx^2 + \beta dy^2 + \gamma dz^2 + 2\varepsilon dx dy + 2\varphi dy dz + 2\psi dz dx$$

invariant; sie ist überdies *primitiv*, weil mit einem Punkte allgemeiner Lage kein Linienelement und auch kein Flächenelement invariant verknüpft ist.

Diesen Fall habe ich in früheren Arbeiten erledigt (vgl.

1) Wenn ich Herrn v. Helmholtz's Arbeit richtig verstanden habe, enthält dieselbe den wesentlichen Fehler, dass sie es implicite als selbstverständlich betrachtet, dass die Linienelemente durch einen festgehaltenen Punkt von einer *dreigliedrigen* projectiven Gruppe transformirt werden. Es wäre ja möglich, dass es unter den infinitesimalen Transformationen der sechsgliedrigen Gruppe des Raumes, welche einen Punkt von allgemeiner Lage festhalten, eine giebt, die zugleich alle durch denselben gehenden Linienelemente invariant lässt. Ich will aber auch hier hervorheben, dass *der eigentliche Sinn der Auseinandersetzungen des berühmten Verfassers mir an einigen Stellen dunkel geblieben ist.*

Digitized by Google

auch meine erste Abhandlung über die Grundlagen der Geometrie). Es ergab sich, dass die gesuchte sechsgliedrige Gruppe durch eine reelle Transformation entweder mit der Gruppe der Euclidischen oder mit einer der beiden Gruppen von Nicht-euclidischen Bewegungen ähnlich ist.

Es erübrigt also nur noch den Fall zu erledigen, dass mit jedem Punkte ein Linienelement invariant verknüpft ist. In diesem Falle existirt ein bei der Gruppe invariantes simultanes System

$$\frac{dx}{\alpha} = \frac{dy}{\beta} = \frac{dz}{\gamma} .$$

Sind u, v unabhängige Integrale desselben, so bestimmen die Gleichungen

$$u = a = \text{Const.}; \quad v = b = \text{Const.}$$

die ∞^2 Integralcurven unseres simultanen Systems, die eine bei unserer Gruppe invariante *reelle* oder *imaginäre* Curvenschaar bilden.

Führen wir daher die *reellen oder imaginären Grössen* u und v als neues x respective neues y ein, so erhalten unsere infinitesimalen Transformationen sämmtlich die Form:

$$X_k f = \xi_k(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_k(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial z}$$

oder:

$$X_k f = \xi_k(x, y)\, p + \eta_k(x, y)\, q + \zeta_k(x, y, z)\, r .$$

Es leuchtet hier ohne Weiteres ein, dass die verkürzten infinitesimalen Transformationen:

$$\overline{X_k} f = \xi_k(x, y)\, p + \eta_k(x, y)\, q$$

ihrerseits eine Gruppe erzeugen, welche die Geradenschaar: $x = \text{Const.}$, $y = \text{Const.}$ transformirt und dabei höchstens sechs Parameter enthält.

Die im vorigen Paragraphen abgeleiteten Hülfssätze lassen nun zunächst leicht erkennen, dass die Gruppe $X_k f$ mindestens fünf Parameter enthält. Sonst enthielte nämlich die sechsgliedrige

Digitized by Google

Gruppe $X_k f$ zwei unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form

$$\overline{Y}_1 f = \overline{\xi}_1 r , \quad \overline{Y}_2 f = \overline{\xi}_2 r ,$$

welche durch die identische Relation

$$\overline{\xi}_2 \overline{Y}_1 f - \overline{\xi}_1 \overline{Y}_2 f = 0$$

verknüpft wären. Da aber eine solche Relation von vornherein ausgeschlossen ist, so dürfen wir schliessen, dass die Gruppe $\overline{X}_k f$ wirklich mindestens fünf wesentliche Parameter enthält.

Wir wollen zunächst annehmen, dass die Gruppe $\overline{X}_k f$ sechs unabhängige infinitesimale Transformationen enthält. In früheren Arbeiten von mir (vgl. insbesondere Math. Annalen Bd. 16) sind nun alle Transformationsgruppen einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit bestimmt. Jetzt müssen wir unter allen Transformationsgruppen der Mannigfaltigkeit x, y die sechsgliedrigen herausgreifen, sodann nach und nach jede sechsgliedrige Gruppe als eine Gruppe $\overline{X}_k f$ auffassen und endlich alle Gruppen von der Form:

$$X_k f = \overline{X}_k f + \zeta_k \frac{\partial f}{\partial z} \quad (k = 1 \ldots 6)$$

bestimmen, welche unsere Forderungen erfüllen.

Die im vorangehenden Paragraphen entwickelten Hülfssätze zeigen, dass man unter allen sechsgliedrigen Gruppen der Mannigfaltigkeit x, y gewisse von vornherein ausschliessen kann.

Lässt eine sechsgliedrige Gruppe $Y_k f$ der Ebene x, y eine und nur eine Curvenschaar $\varphi(x, y) = a = \text{Const.}$ invariant, so lässt jede Transformationsgruppe des Raumes, welche die Form

$$Y_k f + \zeta_k r \quad (k = 1 \ldots r)$$

besitzt, die Flächenschaar $\varphi(x, y) = a$ invariant. Nach Satz 5, S. 374 brauchen wir aber nur solche Gruppen: $Y_k f + \zeta_k r$ zu berücksichtigen, bei denen die Flächenschaar $\varphi = a$ dreigliedrig transformirt wird. Unter den sechsgliedrigen Gruppen der Ebene x, y, welche eine einzige Curvenschaar $\varphi(x, y) = a$ invariant lassen, kommen daher nur die in Betracht, welche diese Curven-

Digitized by Google

schaar dreigliedrig transformiren. Es sind das nur die beiden Gruppen

$$q,\ xq,\ x^2q,\ p,\ xp+yq,\ x^2p+2xyq\ ,$$
$$q,\ xq,\ yq,\ p,\ xp,\ x^2p+xyq\ .$$

Lässt eine sechsgliedrige Gruppe der Ebene x, y gar keine Curvenschaar $\varphi(x, y) = a$ invariant, so kann sie auf die kanonische Form:

$$p,\ q,\ xq,\ xp,\ yq,\ yp$$

gebracht werden. Lässt sie dagegen zwei Curvenschaaren invariant, so kann sie die kanonische Form:

$$p,\ xp,\ x^2p,\ q,\ yq,\ y^2q$$

erhalten.

Wir wenden uns jetzt zu dem Falle, dass die verkürzte Gruppe $\overline{X}_kf$ fünfgliedrig ist. Auch hier muss jede etwa vorkommende invariante Curvenschaar $\varphi(x, y) = a$ dreigliedrig transformirt werden.

Es giebt aber in diesem Falle nur zwei Gruppen, welche berücksichtigt werden müssen; das sind die Gruppen

$$p,\ q,\ xq,\ xp-yq,\ yp$$

und

$$q,\ xq,\ p,\ 2xp+yq,\ x^2p+xyq\ .$$

Diese sechs Gruppen haben wir jetzt der Reihe nach als Gruppen $\overline{X}_kf$ zu betrachten und die zugehörigen Gruppen X_kf zu berechnen.

§ 4.

Bestimmung aller Gruppen, deren verkürzte Gruppen sechsgliedrig sind.

Wir setzen zunächst voraus, dass die verkürzte Gruppe $\overline{X}_kf$ sechsgliedrig ist und somit eine der vier folgenden Formen besitzt:

(A) $$p,\ q,\ xq,\ xp,\ yq,\ yp$$

(B) $$p,\ xp,\ x^2p,\ q,\ yq,\ y^2q$$

Digitized by Google

(C) $$q,\ xq,\ x^2q,\ p,\ xp+yq,\ x^2p+2xyq$$

(D) $$q,\ xq,\ yq,\ p,\ xp,\ x^2p+xyq\ .$$

Diese vier Fälle gehen wir jetzt der Reihe nach durch.

Wir setzen zunächst voraus, dass die Gruppe X_kf die Form

(A) $$p,\ q,\ xq,\ xp,\ yq,\ yp$$

besitzt. Wir müssen also sechs Functionen $f_1, f_2 \ldots f_6$ von x, y, z derart bestimmen, dass die infinitesimalen Transformationen:

$$p+f_1r,\ q+f_2r,\ xq+f_3r,\ xp-yq+f_4r\ ,$$
$$yp+f_5r,\ xp+yq+f_6r$$

eine sechsgliedrige Gruppe erzeugen, welche die verlangten Eigenschaften besitzt. Durch Klammeroperation erhalten wir eine Anzahl Differentialrelationen, welche zwischen den sechs Functionen f_k bestehen. Wir suchen die allgemeinsten Functionen f_k, welche diese Relationen erfüllen; ausserdem versuchen wir durch passende Wahl der unabhängigen Veränderlichen z zu erreichen, dass die Form der f_k so einfach wie möglich wird.

Durch Combination ergiebt sich

$$(p+f_1r,\quad q+f_2r)=\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}+f_1\frac{\partial f_2}{\partial z}-\frac{\partial f_1}{\partial y}-f_2\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)r\ ;$$

nun aber enthält unsere Gruppe keine infinitesimale Transformation von der Form:

$$w(x,y,z)\cdot r\ .$$

Also ist

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}+f_1\frac{\partial f_2}{\partial z}-\frac{\partial f_1}{\partial y}-f_2\frac{\partial f_1}{\partial z}=0\ .$$

Denken wir uns nun, wie offenbar möglich, die Veränderliche z von vornherein in solcher Weise gewählt, dass f_1 gleich Null ist, so erhalten wir die einfache Gleichung

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}=0\ ,$$

welche zeigt, dass f_2 von x frei ist.

Digitized by Google

Unsere beiden ersten infinitesimalen Transformationen haben somit die Form

$$p,\ q + f_2(y, z)\, r\ .$$

Es ist indess leicht, diese Transformationen auf eine noch einfachere Form zu bringen; wir führen

$$z_1 = \varphi(y, z)$$

als neues z ein; dabei behält p seine Form, während

$$\frac{\partial f}{\partial y} + f_2(y, z)\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial y} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + f_2\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial z_1}$$

wird. Wählen wir daher φ so, dass

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + f_2\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

ist, so erhalten die beiden ersten infinitesimalen Transformationen die Formen

$$p,\ q\ .$$

Zur Bestimmung von f_3 bilden wir die Gleichungen

$$(p,\ xq + f_3 r) = q + \frac{\partial f_3}{\partial x} r\ ,$$

$$(q,\ xq + f_3 r) = \frac{\partial f_3}{\partial y} r\ ,$$

welche zeigen, dass f_3 nur von z abhängt. Es ist dabei klar, dass f_3 von Null verschieden sein muss, weil sonst die infinitesimalen Transformationen q, xq durch eine lineare Relation verknüpft wären. Die dritte infinitesimale Transformation hat somit die Form:

$$xq + Z(z)\, r\ ,\quad Z \neq 0\ ,$$

und man kann auch noch durch Einführung einer passenden Grösse $\varphi(z)$ an Stelle von z erreichen, dass $Z = 1$ wird.

Da dies keinen Einfluss auf die Form der beiden ersten infinitesimalen Transformationen hat, so erscheinen jetzt die drei ersten in der Gestalt

Digitized by Google

$$p,\ q,\ xq+r\ .$$

Um die Form der vierten infinitesimalen Transformation

$$X_4 f = xp - yq + f_4 r$$

zu bestimmen, bilden wir die Gleichungen:

$$(p,\ xp - yq + f_4 r) = \quad p + \frac{\partial f_4}{\partial x} r$$

$$(q,\ xp - yq + f_4 r) = -q + \frac{\partial f_4}{\partial y} r$$

$$(xq + r,\ xp - yq + f_4 r) = -2xq + \left(x\frac{\partial f_4}{\partial y} + \frac{\partial f_4}{\partial z}\right) r\ ,$$

von denen die beiden ersten zeigen, dass f_4 nur von z abhängt: die letzte Gleichung giebt uns sodann die Relation

$$\frac{\partial f_4}{\partial z} = -2\ ,$$

also:

$$f_4 = -2z + a\ ,$$

wo aber die Integrationsconstante a ohne Beschränkung gleich Null gesetzt werden kann. Es ist daher

$$X_4 f = xp - yq - 2zr\ .$$

Zur Bestimmung der fünften infinitesimalen Transformation

$$X_5 f = yp + f_5 r$$

bilden wir zunächst die Gleichungen:

$$(p,\ yp + f_5 r) = \quad \frac{\partial f_5}{\partial x} r$$

$$(q, yp + f_5 r) = p + \frac{\partial f_5}{\partial y} r\ ,$$

welche zeigen, dass f_5 nur von z abhängt, dass also $X_5 f$ die Form

$$X_5 f = yp + Z(z)\frac{\partial f}{\partial z}$$

Digitized by Google

besitzt. Sodann bilden wir die Gleichung

$$(xp - yq - 2zr,\ yp + Z(z)\,r) = -2yp - (2zZ' - 2Z)\,r\,,$$

welche zur Bestimmung von Z die Gleichung

$$2zZ' - 2Z = 2Z$$

liefert; sodass

$$Z = kz^2 \quad (k = \text{Const.})$$

wird. Zur Bestimmung der Constanten k müssen wir die Gleichung

$$(xq + r,\ yp + kz^2 r) = xp - yq + 2kzr$$

bilden; diese zeigt, dass $k = -1$ und

$$X_6 f = yp - z^2 r$$

ist.

Endlich zur Bestimmung von

$$X_6 f = xp + yq + f_6 r$$

bilden wir zunächst die Gleichungen

$$(p,\ xp + yq + f_6 r) = p + \frac{\partial f_6}{\partial x} r\,,$$

$$(q,\ xp + yq + f_6 r) = q + \frac{\partial f_6}{\partial y} r\,,$$

welche zeigen, dass f_6 nur von z abhängt; sodann bilden wir die Gleichungen

$$(xq + r,\ xp + yq + Zr) = Z'r$$

$$(xp - yp - 2zr,\ xp + yq + Zr) = (-2zZ' + 2Z)\,r$$

$$(yp - z^2 r,\ xp + yq + Zr) = (-z^2 Z' + 2zZ)\,r\,,$$

welche zeigen, dass Z gleich Null ist.

Hiermit sind die infinitesimalen Transformationen $X_1 f \ldots X_6 f$ auf die einfache Form

$$p,\ q,\ xq + r,\ xp - yq - 2zr$$

$$yp - z^2 r,\ xp + yq$$

Digitized by Google

gebracht[1]). Diese infinitesimalen Transformationen erzeugen eine Gruppe; es erübrigt zu untersuchen, ob diese Gruppe die verlangten Eigenschaften besitzt.

Die drei infinitesimalen Transformationen

$$p,\ q,\ xq + r$$

zeigen, dass der Coordinatenanfang $x = y = z = 0$ ein Punkt allgemeiner Lage ist. Dieser Punkt bleibt in Ruhe bei den drei infinitesimalen Transformationen

$$xp - yq - 2zr,\ yp - z^2 r,\ xp + yq\,.$$

Wir haben also die Determinante

$$\begin{vmatrix} x & -y & -2z \\ y & 0 & -z^2 \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = 2xyz^2 - 2y^2 z$$

zu bilden. Diese verschwindet nicht identisch; daher schliessen wir, dass die gefundene sechsgliedrige Gruppe die Forderungen B und C nicht erfüllt.

Jetzt setzen wir voraus, dass die verkürzte Gruppe die Form

$$p,\ q,\ xp,\ yq,\ x^2 p,\ y^2 q$$

besitzt. Wir suchen also alle sechsgliedrigen Gruppen, welche die Form:

$$p + f_1 r,\ q + f_2 r,\ xp + f_3 r,\ yq + f_4 r\ ,$$
$$x^2 p + f_5 r,\ y^2 q + f_6 r$$

haben und dabei unsere Forderungen B und C erfüllen.

Wie im vorigen Falle erkennen wir, dass wir ohne Beschränkung

1) Wenn man die Gruppe $p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq$ als eine Gruppe von Punkttransformationen der xy-Ebene betrachtet und sie durch Hinzunahme der Grösse

$$z = \frac{dy}{dx}$$

erweitert, so erhält man grade die Gruppe des Textes.

Digitized by Google

$$f_1 = f_2 = 0$$

und dementsprechend

$$X_1 f = p\,, \quad X_2 f = q$$

setzen können. Sodann bilden wir die Ausdrücke:

$$(p,\ xp + f_3 r) = p + \frac{\partial f_3}{\partial x} r\ ,$$

$$(q,\ xp + f_3 r) = \frac{\partial f_3}{\partial y} r\ ,$$

welche zeigen, dass f_3 nur von z abhängen kann; überdies ist klar, dass f_3 von Null verschieden sein muss; wir können daher $f_3 = 1$ und also:

$$X_3 f = xp + r$$

setzen. In entsprechender Weise erkennen wir durch Bildung der Gleichungen:

$$(p,\ yq + f_4 r) = \frac{\partial f_4}{\partial x} r$$

$$(q,\ yq + f_4 r) = q + \frac{\partial f_4}{\partial y} r$$

$$(xp + r,\ yq + f_4 r) = \left(x \frac{\partial f_4}{\partial x} + \frac{\partial f_4}{\partial z}\right) r\ ,$$

dass f_4 von x, y, z frei sein muss. Da aber andererseits f_4 von Null verschieden sein muss, erkennen wir, dass $X_4 f$ die Form

$$X_4 f = yq + kr\,. \quad (k = \text{Const.} \neq 0)$$

besitzt.

Zur Bestimmung von

$$X_5 f = x^2 p + f_5 r$$

bilden wir die Gleichungen:

$$(p,\ x^2 p + f_5 r) = 2xp + \frac{\partial f_5}{\partial x} r$$

$$(q,\ x^2 p + f_5 r) = \frac{\partial f_5}{\partial y} r$$

Digitized by Google

$$(xp + r,\quad x^2p + f_5 r) = x^2p + \left(x\frac{\partial f_5}{\partial x} + \frac{\partial f_5}{\partial z}\right) r$$

$$(yq + kr,\ x^2p + f_5 r) = \left(y\frac{\partial f_5}{\partial y} + k\frac{\partial f_5}{\partial z}\right) r\ ,$$

von denen die beiden ersten zeigen, dass f_5 die Form

$$f_5 = 2x + Z(z)$$

besitzt; die beiden letzten Gleichungen geben zur Bestimmung von Z

$$2x + Z'(z) = 2x + Z$$

$$Z'(z) = 0\ .$$

Es ist daher $Z = 0$, $f_5 = 2x$ und

$$X_5 f = x^2 p + 2xr\ .$$

Eine ganz ähnliche Rechnung liefert:

$$X_6 f = y^2 q + 2kyr\ .$$

Die sechs hiermit gefundenen infinitesimalen Transformationen:

$$\boxed{p,\ q,\ xp + r,\ yq + kr,\ x^2p + 2xr,\ y^2q + 2kyr}$$

bilden eine sechsgliedrige Gruppe. Es fragt sich, ob dieselbe die verlangten Eigenschaften besitzt.

Die drei infinitesimalen Transformationen: p, q, $xp + r$ zeigen, dass der Coordinatenanfang ein Punkt von allgemeiner Lage ist. Dieser Punkt bleibt in Ruhe bei den drei infinitesimalen Transformationen:

$$yq - kxp,\ x^2p + 2xr,\ y^2q + 2kyr\ .$$

Die zugehörige Determinante

$$\begin{vmatrix} -kx & y & 0 \\ x^2 & 0 & 2x \\ 0 & y^2 & 2ky \end{vmatrix} = 2kx^2y^2 - 2kx^2y^2$$

verschwindet identisch, während ihre zweireihigen Unterdeterminanten nicht alle gleich Null sind Also erfüllt diese Gruppe die Forderungen B und C.

Digitized by Google

Zwei Punkte haben daher eine und nur eine Invariante, die man ohne Schwierigkeit berechnen könnte, was jedoch für unsere Zwecke überflüssig ist.

Dagegen heben wir hervor, dass *alle infinitesimalen Transformationen unserer Gruppe mit der infinitesimalen Transformation r vertauschbar sind.* Hieraus folgt, dass unsere Gruppe *systatisch* ist; das heisst, wenn ein Punkt p in Ruhe gehalten wird, so bleiben alle Punkte einer durch p gehenden Curve in Ruhe. In der That, halten wir den Punkt x_0, y_0, z_0 fest. Die allgemeinste Transformation unserer Gruppe, welche diese Forderung erfüllt, wird linear abgeleitet aus den drei folgenden:

$$k(x - x_0)\ p - (y - y_0)\ q$$
$$(x - x_0)^2 p + 2(x - x_0)\ r$$
$$(y - y_0)^2 q + 2k(y - y_0)\ r.$$

Man übersieht ohne Weiteres, dass jede infinitesimale Transformation unserer Gruppe, welche den Punkt x_0, y_0, z_0 festhält, gleichzeitig die ∞^1 Punkte x_0, y_0, z invariant lässt.

Hält man daher den Punkt x_0, y_0, z_0 fest, so kann allerdings ein Punkt *von allgemeiner Lage* ∞^2 verschiedene Lagen annehmen. Es giebt aber, wie wir sehen, ∞^1 Punkte, welche das nicht können.

Unsere Gruppe erfüllt die Forderung C, wenn man die eingeklammerten Worte mitnimmt, sie erfüllt aber diese Forderung nicht, wenn man die eingeklammerten Worte streicht.

Es ist mir nicht klar, wie Herr v. HELMHOLTZ sein Axiom der freien Beweglichkeit versteht. Will er, dass die von ihm gestellte Forderung C innerhalb eines gewissen Bereiches ausnahmslos erfüllt sein soll, so muss er sagen, dass die vorliegende Gruppe die Forderung der freien Beweglichkeit nicht erfüllt. Es ist ja unmöglich, einen Bereich derart abzugrenzen, dass, wenn ein beliebiger Punkt desselben festgehalten wird, dann jeder andere Punkt des Bereiches ∞^2 verschiedene Lagen annehmen kann.

Unsere Gruppe besitzt freie Beweglichkeit, wenn man diesen Begriff im weiteren Sinne des Wortes nimmt; dagegen besitzt sie freie Beweglichkeit nicht, wenn man diesen Begriff im engeren Sinne des Wortes nimmt.

Digitized by Google

Ich werde jetzt annehmen, dass die verkürzte Gruppe $\overline{X}_k f$ die Form

$$q,\ p,\ xq,\ yq,\ xp,\ x^2p + xyq$$

besitzt.

Wir haben also die sechs Functionen f_k derart zu bestimmen, dass die sechs infinitesimalen Transformationen:

$$X_1 f = q + f_1 r,\ X_2 f = p + f_2 r,\ X_3 f = xq + f_3 r\ ,$$

$$X_4 f = yq + f_4 r,\ X_5 f = xp + f_5 r,\ X_6 f = x^2 p + xyq + f_6 r$$

eine Gruppe mit den verlangten Eigenschaften bestimmen.

Wie in den beiden früheren Fällen erkennen wir, dass wir ohne Beschränkung

$$X_1 f = q\ ,\quad X_2 f = p\ ,\quad X_3 f = xq + r$$

setzen können.

Um nun die infinitesimale Transformation

$$X_4 f = yq + f_4 r$$

zu bestimmen, bilden wir die Gleichungen

$$(q, yq + f_4 r) = q + \frac{\partial f_4}{\partial y} r$$

$$(p, yq + f_4 r) = \frac{\partial f_4}{\partial x} r$$

$$(xq + r,\ yq + f_4 r) = xq + \left(x\frac{\partial f_4}{\partial y} + \frac{\partial f_4}{\partial z}\right) r\ ,$$

welche zeigen, dass f_4 eine Function Z von z ist, welche die Gleichung

$$\frac{dZ}{dz} = 1$$

erfüllt; also kommt $Z = z + a$, wo wir die Integrationsconstante a ohne Beschränkung gleich Null setzen können.

Es wird daher:

$$X_4 f = yq + zr\ .$$

Digitized by Google

Zur Bestimmung von $X_5 f$ bilden wir die Gleichungen:

$$(p,\ xp + f_5 r) = p + \frac{\partial f_5}{\partial x} r\ ,$$

$$(q,\ xp + f_5 r) = \frac{\partial f_5}{\partial y} r\ ,$$

$$(xq + r,\ xp + f_5 r) = -xq + \left(x\frac{\partial f_5}{\partial y} + \frac{\partial f_5}{\partial z}\right) r\ ,$$

$$(yq + zr,\ xp + f_5 r) = \left(y\frac{\partial f_5}{\partial y} + z\frac{\partial f_5}{\partial z} - f_5\right) r\ ,$$

welche zeigen, dass f_5 eine Function von z ist, welche die Gleichungen

$$\frac{\partial f_5}{\partial z} = -1\ ,\quad z\frac{\partial f_5}{\partial z} - f_5 = 0$$

erfüllt, sodass $f_5 = -z$ und

$$X_5 f = xp - zr$$

wird.

Endlich zur Bestimmung von

$$X_6 f = x^2 p + xyq + f_6 r$$

bilden wir zunächst die Gleichungen

$$(p,\ x^2 p + xyq + f_6 r) = 2xp + yq + \frac{\partial f_6}{\partial x} r\ ,$$

$$(q,\ x^2 p + xyq + f_6 r) = xq + \frac{\partial f_6}{\partial y} r\ ,$$

$$(xq + r,\ x^2 p + xyq + f_6 r) = \left(x\frac{\partial f_6}{\partial y} + \frac{\partial f_6}{\partial z}\right) r\ ,$$

welche zeigen, dass

$$\frac{\partial f_6}{\partial x} = -z\ ,\quad \frac{\partial f_6}{\partial y} = 1\ ,\quad x\frac{\partial f_6}{\partial y} + \frac{\partial f_6}{\partial z} = 0$$

ist und also:

$$f_6 = -xz + y + a\quad (a = \text{Const.})\ .$$

Digitized by Google

Nun aber liefern die Relationen

$$(yq + zr,\ x^2p + xyq + f_6 r) = \left(y\frac{\partial f_6}{\partial y} + z\frac{\partial f_6}{\partial z} - f_6\right) r\ ,$$

$$(xp - zr,\ x^2p + xyq + f_6 r) = x^2p + xyq + \left(x\frac{\partial f_6}{\partial x} - z\frac{\partial f_6}{\partial z} + f_6\right) r$$

die Gleichungen

$$y\frac{\partial f_6}{\partial y} + z\frac{\partial f_6}{\partial z} - f_6 = 0\ ,$$

$$x\frac{\partial f_6}{\partial x} - z\frac{\partial f_6}{\partial z} + f_6 = f_6\ ,$$

welche bei der Substitution $f_6 = -xz + y + a$ nur für $a = 0$ erfüllt werden.

Wir erhalten in dieser Weise die sechs infinitesimalen Transformationen:

$$\boxed{\begin{array}{c} q,\ p,\ xq + r,\ yq + zr,\ xp - zr, \\ x^2p + xyq + (y - xz)r\ , \end{array}}$$

die eine sechsgliedrige Gruppe erzeugen[1]). Es fragt sich, ob diese Gruppe die gewünschten Eigenschaften besitzt.

Die drei infinitesimalen Transformationen q, p, $xq + r$ zeigen, dass der Coordinatenanfang ein Punkt von allgemeiner Lage ist. Dieser Punkt bleibt in Ruhe bei den Transformationen

$$yq + zr,\quad xp - zr,\quad x^2p + xyq + (y - xz)r\ .$$

Wir bilden daher die Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & y & z \\ x & 0 & -z \\ x^2 & xy & y - xz \end{vmatrix} = xy(xz - y)\ .$$

1) Betrachtet man die Gruppe q, p, xq, yq, xp, $x^2p + xyq$ als eine Gruppe von Punkttransformationen der Ebene und erweitert dieselbe durch Mitnahme der Grösse

$$z = \frac{dy}{dx}\ ,$$

so erhält man grade die Gruppe des Textes.

Digitized by Google

Dieselbe verschwindet nicht identisch und also erfüllt unsere Gruppe die gestellten Forderungen nicht.

Endlich müssen wir annehmen, dass die verkürzte Gruppe die Form

$$p,\ q,\ xq,\ x^2q,\ xp+yq,\ x^2p+2xyq$$

besitzt. Wir suchen also die f_k so zu bestimmen, dass die sechs infinitesimalen Transformationen:

$$X_1f=p+f_1r,\quad X_2f=q+f_2r,\quad X_3f=xq+f_3r\ ,$$
$$X_4f=x^2q+f_4r,\ X_5f=xp+yq+f_5r,\ X_6f=x^2p+2xyq+f_6r$$

eine Gruppe mit den gewünschten Eigenschaften bestimmen.

Wir erkennen wie früher, dass wir

$$X_1f=p,\quad X_2f=q,\quad X_3f=xq+r$$

setzen können.

Sodann bilden wir die Gleichungen:

$$(p,\ x^2q+f_4r)=2xq+\frac{\partial f_4}{\partial x}r\ ,$$
$$(q,\ x^2q+f_4r)=\frac{\partial f_4}{\partial y}r\ ,$$
$$(xq+r,\ x^2q+f_4r)=\left(x\frac{\partial f_4}{\partial y}+\frac{\partial f_4}{\partial z}\right)r\ .$$

welche zeigen, dass

$$\frac{\partial f_4}{\partial x}=2\ ,\quad \frac{\partial f_4}{\partial y}=0\ ,\quad \frac{\partial f_4}{\partial z}=0$$

und dementsprechend

$$f_4=2x+a\quad (a=\text{Const.})$$

und

$$X_4f=x^2q+(2x+a)r$$

ist.

Zur Bestimmung von

$$X_5f=xp+yq+f_5r$$

bilden wir die Gleichungen

Digitized by Google

$$(q,\ xp+yq+f_5 r) = q + \frac{\partial f_5}{\partial y} r$$

$$(p,\ xp+yq+f_5 r) = p + \frac{\partial f_5}{\partial x} r$$

$$(xq+r,\ xp+yq+f_5 r) = \left(x\frac{\partial f_5}{\partial y} + \frac{\partial f_5}{\partial z}\right) r\ ,$$

welche zeigen, dass

$$\frac{\partial f_5}{\partial y} = 0\ ,\quad \frac{\partial f_5}{\partial x} = 0\ ,\quad \frac{\partial f_5}{\partial z} = 0$$

und $f_5 = A = \text{Const.}$ ist.

Nun aber ist

$$(x^2 q + (2x+a) r,\ xp+yq+Ar) = -x^2 q - 2xr\ ,$$

also ergiebt sich $a = 0$ und

$$X_4 f = x^2 q + 2xr\ ,$$
$$X_5 f = xp + yq + Ar\ .$$

Uebrig bleibt jetzt noch die Bestimmung der infinitesimalen Transformation:

$$X_6 f = x^2 p + 2xyq + f_6 r\ .$$

Es ist:

$$(p,\ x^2 p + 2xyq + f_6 r) = 2xp + 2yq + \frac{\partial f_6}{\partial x} r$$

$$(q,\ x^2 p + 2xyq + f_6 r) = 2xq + \frac{\partial f_6}{\partial y} r$$

$$(xq+r,\ x^2 p + 2xyq + f_6 r) = x^2 q + \left(x\frac{\partial f_6}{\partial y} + \frac{\partial f_6}{\partial z}\right) r$$

$$(xp+yq+Ar,\ x^2 p + 2xyq + f_6 r) = x^2 p + 2xyq + \left(x\frac{\partial f_6}{\partial x} + y\frac{\partial f_6}{\partial y} + A\frac{\partial f_6}{\partial z}\right) r$$

$$(x^2 q + 2xr,\ x^2 p + 2xyq + f_6 r) = \left(x^2\frac{\partial f_6}{\partial y} + 2x\frac{\partial f_6}{\partial z} - 2x^2\right) r,$$

Digitized by Google

also kommt:

$$\frac{\partial f_6}{\partial x} = 2A\,, \quad \frac{\partial f_6}{\partial y} = 2\,, \quad \frac{\partial f_6}{\partial z} = 0\,,$$

$$x\frac{\partial f_6}{\partial x} + y\frac{\partial f_6}{\partial y} + A\frac{\partial f_6}{\partial z} = f_6\,,$$

$$x^2\frac{\partial f_6}{\partial y} + 2x\frac{\partial f_6}{\partial z} - 2x^2 = 0\,.$$

Die drei ersten Gleichungen geben

$$f_6 = 2Ax + 2y + B\,, \quad (B = \text{Const.})\,,$$

und wenn dieser Werth in die beiden letzten Gleichungen eingesetzt wird, ergiebt sich, dass $B = 0$ und demnach:

$$X_6 f = x^2 p + 2xyq + (2Ax + 2y)r\,.$$

Die sechs infinitesimalen Transformationen

$$\boxed{\begin{array}{c} q,\ p,\ xq + r,\ x^2 q + 2xr\,, \\ xp + yq + Ar\,,\quad x^2 p + 2xyq + (2Ax + 2y)r \end{array}}$$

bestimmen eine Gruppe. Es fragt sich, ob dieselbe die verlangten Eigenschaften besitzt.

Die drei ersten infinitesimalen Transformationen zeigen, dass der Coordinatenanfang ein Punkt allgemeiner Lage ist. Derselbe bleibt in Ruhe bei den Transformationen:

$$xp + (y - Ax)q\,,\quad x^2 q + 2xr\,,$$
$$x^2 p + 2xyq + (2Ax + 2y)r\,,$$

deren Determinante

$$\begin{vmatrix} x & y - Ax & 0 \\ 0 & x^2 & 2x \\ x^2 & 2xy & 2Ax + 2y \end{vmatrix}$$

identisch verschwindet, während die zugehörigen zweireihigen Unterdeterminanten nicht sämmtlich Null sind.

Bei unserer Gruppe findet also freie Beweglichkeit jedenfalls im weiteren Sinne des Wortes statt.

Digitized by Google

Die sechs infinitesimalen Transformationen sind sämmtlich vertauschbar mit der Transformation r; daher ist die Gruppe *systatisch*; d. h. wenn ein Punkt festgehalten wird, so giebt es ∞^1 Punkte, die gleichzeitig in Ruhe bleiben. In der That, der Punkt x_0, y_0, z_0 bleibt in Ruhe bei den infinitesimalen Transformationen

$$(x - x_0)\,p + (y - y_0 - A(x - x_0))\,q \ ,$$

$$(x - x_0)^2 q + 2\,(x - x_0)\,r \ ,$$

$$(x^2 - x_0^2)\,p + (2x(y - y_0) - 2Ax_0\,(x - x_0))\,q +$$

$$+ (2A(x - x_0) + 2(y - y_0))\,r$$

und bei keiner von ihnen unabhängigen. Bei diesen Transformationen bleiben aber gleichzeitig die unendlich vielen Punkte x_0, y_0, z sämmtlich in Ruhe.

Bei unserer Gruppe findet also im engeren Sinne des Wortes freie Beweglichkeit nicht statt.

Es ist auch jetzt unmöglich, einen Bereich des Raumes derart abzugrenzen, dass, wenn ein Punkt des Bereiches festgehalten wird, dann *jeder* andere Punkt des Bereiches ∞^2 verschiedene Lagen annehmen kann.

§ 5.

Bestimmung aller Gruppen, deren verkürzte Gruppen fünfgliedrig sind.

Wir wenden uns jetzt zur Bestimmung aller Gruppen von der verlangten Beschaffenheit, deren verkürzte Gruppen *fünfgliedrig* sind.

Wie schon früher bemerkt, muss die verkürzte Gruppe entweder die Form

$$q,\ p,\ xq,\ xp - yq,\ yp$$

oder die Form

$$q,\ p,\ xq,\ 2xp + yq,\ x^2p + xyq$$

besitzen. Es ist ja von vornherein klar, dass sie z. B. nicht die Form

$$q,\ yq,\ y^2q,\ p,\ xp$$

Digitized by Google

haben kann, weil bei dieser Gruppe die Geradenschaar $x = \text{Const.}$ invariant bleibt, aber nur zweigliedrig transformirt wird.

Wir wollen zunächst alle sechsgliedrigen Gruppen von der Form

$$fr,\ q + f_1 r,\ p + f_2 r,\ xq + f_3 r\ ,$$
$$xp - yq + f_4 r,\ yp + f_5 r$$

bestimmen.

Dabei können wir offenbar $f = 1$ setzen, sodass wir zuerst die infinitesimale Transformation r erhalten.

Combiniren wir nun r etwa mit $q + f_1 r$, so kommt:

$$(r,\ q + f_1 r) = \frac{\partial f_1}{\partial z}\, r$$

und also:

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = A_1 = \text{Const.},$$
$$f_1 = A_1 z + \omega_1(x, y)\ .$$

In genau derselben Weise erkennen wir, dass alle f_k die Form

$$f_k = A_k z + \omega_k(x, y)$$

besitzen. Es ist aber leicht einzusehen, dass alle A_k gleich Null sind. Bildet man nämlich z. B. die Gleichung:

$$(q + (A_1 z + \omega_1)\, r,\quad xp - yq + (A_4 z + \omega_4)\, r)$$
$$= -q + \left(\frac{\partial \omega_4}{\partial y} + A_4 \omega_1 - x\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + y\frac{\partial \omega_1}{\partial y} - A_1 \omega_4\right) r\ ,$$

so sieht man, dass $A_1 = 0$ ist. Combinirt man die übrigen infinitesimalen Transformationen mit

$$xp - yq + (A_4 z + \omega_4)\, r\ ,$$

so erkennt man, dass A_2, A_3 und A_5 gleich Null sind. Combinirt man endlich $xq + (A_3 z + \omega_3)\, r$ mit $yp + (A_5 z + \omega_5)\, r$, so ergiebt sich, dass auch A_4 gleich Null ist.

Wir müssen also jetzt die ω_k bestimmen und sie zugleich auf möglichst einfache Formen bringen.

Digitized by Google

Wählen wir einen geeigneten Ausdruck: $z + \omega(x, y)$ als neues z, so erhält $q + \omega_1 r$ die Form q. Die Gleichung

$$(q,\ p + \omega_2 r) = \frac{\partial \omega_2}{\partial y} r$$

zeigt sodann, dass

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial y} = B = \text{Const.}$$

und also:

$$\omega_2 = By + X(x)$$

ist. Aber indem wir einen geeigneten Ausdruck: $z + \varphi(x)$ als neues z einführen, können wir erreichen, dass X gleich Null wird. Hiermit sind die drei ersten infinitesimalen Transformationen auf die Form:

$$r,\ q,\ p + Byr$$

gebracht.

Ferner ist:

$$(q,\ xq + \omega_3 r) = \frac{\partial \omega_3}{\partial y} r$$

und demnach wird:

$$xq + \omega_3 r = xq + (Ey + \varphi(x))\, r\ .$$

Nun aber ist

$$(p + Byr,\ xq + (Ey + \varphi)\, r) = q + (\varphi' - Bx)\, r\ ;$$

also wird

$$\varphi' - Bx = C = \text{Const.}$$

und

$$\varphi = \tfrac{1}{2} Bx^2 + Cx + D$$

und endlich, da $D = 0$ gesetzt werden kann:

$$xq + \omega_3 r = xq + (Ey + \tfrac{1}{2} Bx^2 + Cx)\, r\ .$$

Wird nun $z - Cy$ als neues z eingeführt, so behalten die drei Transformationen $r,\ q,\ p + Byr$ im Wesentlichen ihre Form. Dagegen erhält $xq + \omega_3 r$ die einfachere Gestalt:

$$xq + \omega_3 r = xq + (Ey + \tfrac{1}{2} Bx^2)\, r\ .$$

Digitized by Google

Es ist weiter:

$$(q,\ xp - yq + \omega_4 r) = -q + \frac{\partial \omega_4}{\partial y} r$$

und also

$$\frac{\partial \omega_4}{\partial y} = F = \text{Const.}; \quad \omega_4 = F \cdot y + \varphi(x) \ .$$

Nun aber ist

$$(p + Byr,\ xp - yq + (Fy + \varphi)\, r) = p + (\varphi' + By)\, r \ :$$

also ist $\varphi' = G = \text{Const.}$ und

$$\varphi = Gx + G_4 \ ,$$

wo die Constante G_4 ohne Beschränkung gleich Null gesetzt werden kann. Es ist daher

$$X_5 f = xp - yq + (Fy + Gx)\, r \ .$$

Zur näheren Bestimmung der Constanten bilden wir die Gleichung

$$(xq + (Ey + \tfrac{1}{2} Bx^2)\, r,\ xp - yq + (Fy + Gx)\, r) =$$
$$= -2xq + (Fx + Ey - Bx^2)\, r \ ,$$

welche zeigt, dass

$$F = 0 \ , \quad E = 0$$

sind und dass unsere infinitesimalen Transformationen $X_4 f$ und $X_5 f$ die Form

$$X_4 f = xq + \tfrac{1}{2} Bx^2 r \ , \quad X_5 f = xp - yq + Gxr$$

besitzen. Ueberdies leuchtet ein, dass die Constante B von Null verschieden sein muss; denn sonst wären die Transformationen $X_2 f$, $X_4 f$ durch die von vornherein ausgeschlossene Gleichung

$$x X_2 f - X_4 f = 0$$

verknüpft. Führen wir daher $\frac{z}{B}$ als neues z ein, so erhalten die infinitesimalen Transformationen $X_3 f$ und $X_4 f$ die einfachere Form:

$$X_3 f = p + yr, \ X_4 f = xq + \tfrac{1}{2} x^2 r \ .$$

Digitized by Google

Unsere Gruppe enthält somit die folgenden infinitesimalen Transformationen:

$$r,\ q,\ p + yr,\ xq + \tfrac{1}{2}x^2 r\ ,$$
$$xp - yq + Gx\,r,\ yp + \omega(x, y)\,r\ .$$

Hier können wir noch $z - Gx$ als neues z einführen, wir können also G ohne Beschränkung gleich Null setzen.

Es ist

$$(q,\ yp + \omega r) = p + \frac{\partial \omega}{\partial y} r\ ,$$
$$(p + yr,\ yp + \omega r) = \frac{\partial \omega}{\partial x} r\ ,$$

also wird

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = y + K\ ,\quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = H$$

oder nach Wegwerfung einer unwesentlichen Integrationsconstanten:

$$\omega = \tfrac{1}{2}y^2 + Ky + Hx$$

und

$$X_0 f = yp + (\tfrac{1}{2}y^2 + Ky + Hx)\,r\ .$$

Nun aber ist

$$(xp - yq,\ yp + (\tfrac{1}{2}y^2 + Ky + Hx)\,r)$$
$$= -2yp + (-y^2 - Ky + Hx)\,r\ ,$$

also $K = 0$, $H = 0$ und mithin:

$$X_0 f = yp + \tfrac{1}{2}y^2 r\ .$$

Die hiermit gefundenen infinitesimalen Transformationen

$$\boxed{\begin{array}{c} r,\ q,\ p + yr,\ xq + \tfrac{1}{2}x^2 r\ , \\ xp - yq,\ yp + \tfrac{1}{2}y^2 r \end{array}}$$

bilden eine Gruppe (die uns aus der Theorie der Berührungstransformationen wohlbekannt ist). Wir müssen untersuchen, ob dieselbe die verlangten Eigenschaften besitzt.

Digitized by Google

Die drei Transformationen q, r, $p + yr$ zeigen, dass der Coordinatenanfang ein Punkt von allgemeiner Lage ist. Dieser Punkt bleibt nun in Ruhe bei den infinitesimalen Transformationen:

$$xq + \tfrac{1}{2}x^2 r, \quad xp - yq, \quad yp + \tfrac{1}{2}y^2 r \ ,$$

deren Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & x & \frac{1}{2}x^2 \\ x & -y & 0 \\ y & 0 & \frac{1}{2}y^2 \end{vmatrix}$$

identisch verschwindet, während ihre zweireihigen Unterdeterminanten nicht alle Null sind.

Bei unserer sechsgliedrigen Gruppe haben daher die beiden Punkte x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 wirklich eine und nur eine Invariante und zwar, wie wir beiläufig bemerken, die folgende

$$z_2 - z_1 - \tfrac{1}{2}(x_2 + x_1)(y_2 - y_1) \ .$$

Bei unserer Gruppe findet daher freie Beweglichkeit jedenfalls in dem weiteren Sinne des Wortes statt. Wird ein Punkt x_1^0, y_1^0, z_1^0 von allgemeiner Lage festgehalten, so kann jeder andere Punkt von *allgemeiner Lage* ∞^2 verschiedene Lagen annehmen, u. s. w.

Aber es ist leicht zu sehen, dass im engeren Sinne des Wortes keine freie Beweglichkeit stattfindet. Es folgt dies schon daraus, dass die infinitesimale Transformation r mit allen Transformationen unserer Gruppe vertauschbar, dass also unsere Gruppe *systatisch* ist.

In der That, der Punkt von allgemeiner Lage: x_0, y_0, z_0 bleibt in Ruhe bei der dreigliedrigen Gruppe:

$$(x - x_0)\, q + \tfrac{1}{2}(x^2 - x_0^2)\, r \ ,$$
$$(x - x_0)\, p - (y - y_0)\, q - x_0 (y - y_0)\, r \ ,$$
$$(y - y_0)\, p + \tfrac{1}{2}(y - y_0)^2 r \ .$$

Bei derselben bleiben aber offenbar ∞^1 Punkte, nämlich alle Punkte x_0, y_0, z in Ruhe.

Es ist daher unmöglich, einen Bereich derart abzugrenzen, dass wenn ein Punkt des Bereiches festgehalten wird, dann jeder andere Punkt des Bereiches ∞^2 verschiedene Lagen annehmen kann.

Digitized by Google

Im engeren Sinne des Wortes findet somit bei unserer Gruppe keine freie Beweglichkeit statt.

Es erübrigt jetzt nur noch anzunehmen, dass die verkürzte Gruppe $X_k f$ die Form:

$$q,\ xq,\ p,\ 2xp + yq,\ x^2 p + xyq$$

besitzt.

Wir suchen daher jetzt alle Gruppen, welche die Form besitzen

$$X_1 f = r,\ X_2 f = q + f_2 r,\ X_3 f = xq + f_3 r,\ X_4 f = p + f_4 r,$$
$$X_5 f = 2xp + yq + f_5 r,\quad X_6 f = x^2 p + xyq + f_6 r\ .$$

Wie im vorigen Falle erkennen wir, dass alle f_k von z frei sind und dass wir

$$X_1 f = r,\quad X_2 f = q,\quad X_4 f = p + Byr\ ,$$
$$X_3 f = xq + (Ey + \tfrac{1}{2} Bx^2)\, r$$

setzen können.

Zur Bestimmung der infinitesimalen Transformation

$$X_5 f = 2xp + yq + f_5 r$$

bilden wir die Gleichungen

$$(q,\ 2xp + yq + f_5 r) = q + \frac{\partial f_5}{\partial y} r,$$

$$(p + Byr,\ 2xp + yq + f_5 r) = 2p + \left(\frac{\partial f_5}{\partial x} - By\right) r$$

welche ergeben:

$$\frac{\partial f_5}{\partial y} = F = \text{Const.}$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x} - By = 2By + C\ .$$

Es leuchtet hier zunächst ein, dass $B = 0$ ist; ferner wird

$$f_5 = Fy + Cx + D\ ,$$

wo die Constante D ohne Beschränkung gleich Null gesetzt werden kann.

Digitized by Google

Nun ist

$$(xq + Eyr,\ 2xp + yq + (Fy + Cx)r) = \\ = -xq + (Fx - Ey)r\ ,$$

also wird $F = 0$ und

$$X_5 f = 2xp + yq + Cxr\ .$$

Zur Bestimmung der infinitesimalen Transformation

$$X_6 f = x^2 p + xyq + \omega_6 r$$

bilden wir die Gleichungen:

$$(q,\ x^2 p + xyq + \omega_6 r) = \qquad xq + \frac{\partial \omega_6}{\partial y} r$$

$$(p,\ x^2 p + xyq + \omega_6 r) = 2xp + yq + \frac{\partial \omega_6}{\partial x} r\ ,$$

welche ergeben:

$$\frac{\partial \omega_6}{\partial y} = Ey + E_1$$

$$\frac{\partial \omega_6}{\partial x} = Cx + C_1$$

oder:

$$\omega_6 = \tfrac{1}{2} Ey^2 + \tfrac{1}{2} Cx^2 + E_1 y + C_1 x\ ,$$

wo wir die Integrationsconstante ohne Beschränkung gleich Null gesetzt haben. Nun aber ist

$$(xq + Eyr,\ x^2 p + xyq + \omega_6 r) = \left(x \frac{\partial \omega_6}{\partial y} - Exy\right) r$$

und demnach:

$$x \frac{\partial \omega_6}{\partial y} - Exy = K_2\ .$$

Wird hier der gefundene Werth von ω_6 eingesetzt, so kommt

$$x(Ey + E_1) - Exy = K_2\ ,$$

woraus $E_1 = K_2 = 0$ und

$$X_6 f = x^2 p + xyq + (\tfrac{1}{2} Ey^2 + \tfrac{1}{2} Cx^2 + C_1 x) r\ .$$

Digitized by Google

Da die infinitesimalen Transformationen q und $xq + Eyr$ keine lineare Relation erfüllen dürfen, so muss die Constante E von Null verschieden sein. Indem wir $\frac{z}{E}$ als neues z einführen, erhält E den Werth 1 und unsere infinitesimalen Transformationen haben nunmehr die Form

$$r,\ q,\ p,\ xq + yr,\ 2xp + yq + Cxr,$$
$$x^2p + xyq + (\tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{2}Cx^2 + C_1x)r\ .$$

Die drei ersten zeigen, dass der Coordinatenanfang ein Punkt von allgemeiner Lage ist. Derselbe bleibt in Ruhe bei der dreigliedrigen Gruppe

$$xq + yr,\ 2xp + yq + Cxr,$$
$$x^2p + xyq + (\tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{2}Cx^2 + C_1x)r\ .$$

Die zugehörige Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 2x & y & Cx \\ x^2 & xy & \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}Cx^2 + C_1x \end{vmatrix} = -2C_1x^3$$

verschwindet bei der Substitution $C_1 = 0$, während ihre zweireihigen Unterdeterminanten nicht alle gleich Null werden.

Die Gruppe

$$r,\ q,\ p,\ xq + yr,\ 2xp + yq + Cxr,$$
$$x^2p + xyq + \tfrac{1}{2}(y^2 + Cx^2)r$$

besitzt somit jedenfalls im weiteren Sinne des Wortes freie Beweglichkeit. Wird ein Punkt von allgemeiner Lage festgehalten, so kann jeder andere Punkt von *allgemeiner* Lage ∞^2 verschiedene Lagen annehmen, u. s. w.

Unsere Gruppe ist aber *systatisch*, da alle Transformationen derselben mit r vertauschbar sind. In der That, der Punkt von allgemeiner Lage x_0, y_0, z_0 bleibt in Ruhe bei der dreigliedrigen Gruppe

$$(x - x_0)q + (y - y_0)r\ ,$$
$$2(x - x_0)p + (y - y_0)q + C(x - x_0)r,$$
$$(x^2 - x_0^2)p + (xy - x_0y_0)q + \tfrac{1}{2}(y^2 - y_0^2 + Cx^2 - Cx_0^2)r\ ,$$

welche zu gleicher Zeit alle Punkte x_0, y_0, z invariant lässt.

Digitized by Google

Es ist daher unmöglich im Raume einen solchen Bereich abzugrenzen, dass, wenn ein Punkt des Bereiches festgehalten wird, dann jeder andere Punkt desselben ∞^2 Lagen annehmen kann.

Im engeren Sinne des Wortes findet somit bei unserer Gruppe keine freie Beweglichkeit statt.

Die hier betrachtete Gruppe

$$p,\ q,\ r,\ xq+yr,\ 2xp+yq+Cxr,$$
$$x^2p+xyq+\tfrac{1}{2}(y^2+Cx^2)r$$

ist dadurch *merkwürdig, dass sie in der Umgebung des Punktes allgemeiner Lage* $x=y=z=0$ *eine infinitesimale Transformation enthält, die von zweiter Ordnung in* x, y, z *ist.*

Dieser Fall, den Herr v. HELMHOLTZ so viel ich sehe unberechtigter Weise von vornherein bei Seite lässt, kommt also wirklich vor.

§ 6.

Die Gruppe der Bewegungen ist durch die freie Beweglichkeit vollständig charakterisirt.

Die vorangehenden Rechnungen liefern uns ein bemerkenswerthes Resultat.

Die Gruppe der Euclidischen Bewegungen und die Gruppe der Nichteuclidischen Bewegungen sind die einzigen Gruppen, bei denen im engeren Sinne des Wortes freie Beweglichkeit stattfindet.

Verlangt man, dass es bei einer Gruppe des Raumes x, y, z *möglich sein soll, einen Bereich des Raumes derart abzugrenzen,*

dass wenn ein Punkt des Bereiches festgehalten wird, dann jeder andere Punkt desselben ∞^2 *Lagen annehmen kann;*

dass ferner, wenn zwei Punkte des Bereiches festgehalten werden, dann jeder Punkt von allgemeiner Lage des Bereiches ∞^1 *verschiedene Lagen annehmen kann;*

dass endlich, wenn drei Punkte von allgemeiner Lage festgehalten werden, dann alle Punkte des Bereiches in Ruhe bleiben;

so besteht die Gruppe entweder aus allen Bewegungen des Euclidischen Raumes oder aus allen Bewegungen des Nichteuclidischen Raumes.

Diese beiden Gruppen sind somit im dreifachen Raume die einzigen, bei denen im engeren Sinne des Wortes freie Beweglichkeit stattfindet.

In der Ebene steht die Sache anders; da giebt es (so kann eine Bemerkung des Herrn v. Helmholtz ausgesprochen werden) noch weitere dreigliedrige Gruppen, bei denen freie Beweglichkeit im engeren Sinne stattfindet, es sind das alle Gruppen von der Form:

$$p,\ q,\ xq - yp + c(xp + yq)\ .$$

Wir haben gefunden, dass freie Beweglichkeit im *weiteren* Sinne des Wortes noch bei den folgenden Gruppen stattfindet

$$p,\ q,\ xp + r,\ yq + Kr,\ x^2p + 2xr,\ y^2q + 2Kyr$$

$$p,\ q,\ xq + r,\ x^2q + 2xr,\ xp + yq + Ar,\ x^2p + 2xyq + (2Ax + 2y)\,r$$

$$r,\ q,\ p + yr,\ xq + \tfrac{1}{2}x^2r,\ xp - yq,\ yp + \tfrac{1}{2}y^2r$$

$$p,\ q,\ r,\ xq + yr,\ 2xp + yq + Cxr,\ x^2p + xyq + (\tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{2}Cx^2)\,r$$

Wir müssen aber das erhaltene Resultat noch genauer präcisiren.

Wir haben bis jetzt nur bewiesen, dass, wenn bei einer reellen Transformationsgruppe des Raumes freie Beweglichkeit blos im weiteren Sinne des Wortes stattfindet, dann die Gruppe mit einer der vier soeben angeführten ähnlich ist. Hierbei ist aber wohl zu beachten, dass zwei reelle Gruppen durch eine *imaginäre Transformation* ähnlich sein können.

Es erübrigt also noch, alle reellen Gruppen des Raumes R_3 zu finden, welche mit einer der vier gefundenen reellen Gruppen durch imaginäre Transformation ähnlich sind.

Digitized by Google

Wir stellen uns zunächst die Aufgabe, alle *reellen Gruppen*:

$$Y_k f = \alpha_k \frac{\partial f}{\partial x_1} + \beta_k \frac{\partial f}{\partial y_1} + \gamma_k \frac{\partial f}{\partial z_1}$$

zu finden, welche mit der reellen Gruppe:

$$p,\ q,\ xp + r,\ yq + Kr,\ x^2 p + 2xr,\ y^2 q + 2Kyr$$

durch imaginäre Transformation ähnlich sind.

Bei der vorgelegten Gruppe sind $x =$ Const. und $y =$ Const. invariante Flächenschaaren. Gäbe es nun eine weitere invariante Flächenschaar: $\varphi(x, y, z) = a$, so müsste jede infinitesimale Transformation Xf der ursprünglichen Gruppe eine Relation von der Form

$$X\varphi = \Omega(\varphi)$$

erfüllen. Es müssten also insbesondere Gleichungen von der Form

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \Omega_1(\varphi),\quad x\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \Omega_2(\varphi),\quad x^2\frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2x\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \Omega_3(\varphi)$$

bestehen; aus diesen folgt aber die Relation

$$-x^2\Omega_1 + 2x\Omega_2 - \Omega_3 = 0\ ,$$

welche zeigt, dass Ω_1, Ω_2 und Ω_3 sämmtlich gleich Null sein müssen, sobald φ keine Function von x allein ist. Wären aber die drei Ω_k gleich Null, so käme

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0\ ,\quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

und es wäre φ eine Function von y allein.

Hiermit ist nachgewiesen, dass $x =$ Const. und $y =$ Const. die einzigen bei der vorgelegten Gruppe invarianten Flächenschaaren $\varphi(x, y, z) = a$ sind.

Bestimmen daher die reellen infinitesimalen Transformationen $Y_k f$ eine mit der vorgelegten Gruppe (durch imaginäre Transformation) ähnliche reelle Gruppe, so müssen auch bei der Gruppe $Y_k f$ gerade zwei Flächenschaaren invariant bleiben. Dieselben können aber reell oder imaginär conjugirt sein.

Digitized by Google

Sind die bei der Gruppe $Y_k f$ invarianten Flächenschaaren reell, so können wir annehmen, dass $x_1 = \text{Const.}$ und $y_1 = \text{Const.}$ die Gleichungen dieser invarianten Flächenschaaren sind. Alsdann hat die imaginäre Transformation, welche die vorgelegte Gruppe auf die Form $Y_k f$ bringt, die Gestalt:

$$x_1 = X(x), \quad y_1 = Y(y), \quad z_1 = Z(xyz) .$$

Die Gruppe $Y_k f$ besitzt somit die Form

$$\alpha_k(x_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \beta_k(y_1)\frac{\partial f}{\partial y_1} + \gamma_k \frac{\partial f}{\partial z_1} ,$$

und es ist klar, dass die verkürzte Gruppe $\alpha_k(x_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}$ bei der Transformation $x_1 = X(x)$ die Form p, xp, $x^2 p$ annimmt.

Nun aber geht aus meinen Untersuchungen über die Gruppen einer einfachen Mannigfaltigkeit ohne weiteres hervor, dass jede dreigliedrige Gruppe $\alpha_k(x_1)p_1$ einer einfachen Mannigfaltigkeit x_1 durch eine *reelle* Transformation

$$x_2 = R(x_1)$$

die Form p_2, $x_2 p_2$, $x_2^2 p_2$ erhalten kann. Entsprechendes gilt für die dreigliedrige Gruppe $\beta_k(y_1)q_1$.

Es ist daher möglich, in der reellen Gruppe

$$\alpha_k(x_1)p_1 + \beta_k(y_1)q_1 + \gamma_k r_1 = Y_k f$$

durch *reelle* Substitution solche neue Veränderliche x_2, y_2 einzuführen, dass die Gruppe $Y_k f$ die Form

$$(a_k + b_k x_2 + c_k x_2^2)p_2 + (a_k' + b_k' y_2 + c_k' y_2^2)q_2 + \omega_k' r_2$$

annimmt. Diese neue Gruppe enthält daher sechs Transformationen von der Form

$$p_2 + f_2 r_2, \; x_2 p_2 + f_2 r_2, \; x_2^2 p_2 + f_3 r_2 ,$$
$$q_2 + f_4 r_2, \; y_2 q_2 + f_5 r_2, \; y_2^2 q_2 + f_4 r_2 .$$

Dabei kann nach den früheren Entwickelungen (Seite 383 ff.) die Veränderliche z_2 immer durch reelle Substitution derart gewählt werden, dass die sechs soeben geschriebenen Transformationen die Form

$$q, \; p, \; yq + Cr, \; xp + r, \; x^2 p + 2xr, \; y^2 q + 2Cyr$$

annehmen.

Digitized by Google

Ist daher die reelle Gruppe

$$q,\ p,\ xp+r,\ x^2p+2xr,\ yq+Kr,\ y^2q+2Kyr$$

durch imaginäre Transformation ähnlich mit einer reellen Gruppe Y_kf, welche zwei reelle Flächenschaaren invariant lässt, so kann die Gruppe Y_kf durch reelle Substitution die Form

$$q_2,\ p_2,\ x_2p_2+r,\quad x_2^2p_2+2x_2r_2,$$
$$y_2q_2+Cr_2,\quad y_2^2q_2+2Cy_2r_2,$$

erhalten.

Wir wenden uns jetzt zu dem Falle, dass die beiden bei der Gruppe Y_kf invarianten Flächenschaaren imaginär und natürlich conjugirt-imaginär sind. Wir können annehmen, dass die Flächenschaaren durch die Gleichungen

$$x_1+iy_1=a$$
$$x_1-iy_1=b$$

dargestellt sind. Die Transformation, welche die vorgelegte Gruppe auf die Form Y_kf bringt, hat dann die Form

$$x=A(x_1+iy_1),\ y=B(x_1-yi_1),\ z=Z(x_1,\ y_1,\ z_1)$$

oder, wie wir ohne Beschränkung annehmen können, die Form

$$x=x_1+iy_1,\ y=B(x_1-iy_1),\ z=Z(x_1,y_1,z_1),$$

dabei ist

$$x_1-iy_1=R(y),$$

wo R eine gewisse reelle oder imaginäre Function von y bezeichnet. Durch Auflösung kommt also

$$x_1=\frac{x+R(y)}{2},\quad y_1=\frac{x-R(y)}{2i}.$$

Ist

$$\xi_k(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}+\eta_k(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}+\zeta_k(x,y)\frac{\partial f}{\partial z}$$

irgend eine Transformation der ursprünglichen Gruppe und

Digitized by Google

$$\alpha_k(x_1, y_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \beta_k(x_1, y_1)\frac{\partial f}{\partial y_1} + \gamma_k(x_1, y_1 z_1)\frac{\partial f}{\partial z_1}$$

die Form derselben in den Veränderlichen x_1, y_1, z_1, so ist

$$\xi_k(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k(x, y)\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha_k(x_1, y_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \beta_k(x_1, y_1)\frac{\partial f}{\partial y_1}.$$

Insbesondere ist

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2i}\left(i\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial y_1}\right)$$

oder, wenn wir die gewöhnliche Schreibweise anwenden:

$$p = \frac{1}{2i}(ip_1 + q_1)$$

$$xp = \frac{x_1 + iy_1}{2i}(ip_1 + q_1)$$

$$x^2 p = \frac{(x_1 + iy_1)^2}{2i}(ip_1 + q_1).$$

Die verkürzte Gruppe $\alpha_k(x_1, y_1)\,p_1 + \beta_k(x_1, y_1)\,q_1$ enthält somit die Transformationen:

$$p_1 - iq_1,\ x_1p_1 + y_1q_1 + i(y_1p_1 - x_1q_1),$$
$$(x_1^2 - y_1^2)p_1 + 2x_1y_1q_1 + i\{2x_1y_1p_1 - (x_1^2 - y_1^2)q\}$$

und als reelle Gruppe auch die conjugirt-imaginären Transformationen; kurz die verkürzte Gruppe hat in den Veränderlichen x_1, y_1 die Form

$$p_1,\ q_1,\ x_1p_1 + y_1q_1,\ y_1p_1 - x_1q_1,$$
$$(x_1^2 - y_1^2)p_1 + 2x_1y_1q_1,\ 2x_1y_1p_1 - (x_1^2 - y_1^2)q.$$

Um jetzt die allgemeinste Gruppe Y_kf zu finden, brauchen wir nur sechs Grössen f_k derart zu bestimmen, dass die infinitesimalen Transformationen

$$p + f_1r,\ q + f_2r,\ xp + yq + f_3r,\ yp - xq + f_4r,$$
$$(x^2 - y^2)p + 2xyq + f_5r,\ 2xyp + (y^2 - x^2)q + f_6r$$

eine Gruppe erzeugen.

Digitized by Google

Die Grössen f_1 und f_2 können wie gewöhnlich ohne Beschränkung gleich Null gesetzt werden. Nun ist

$$(p,\ xp+yq+f_3 r) = p+\frac{\partial f_3}{\partial x} r$$

$$(q,\ xp+yq+f_3 r) = q+\frac{\partial f_3}{\partial y} r\ ;$$

also ist f_3 eine Function von z allein, die wir ohne Beschränkung gleich kz setzen können:

$$Y_3 f = xp+yq+kzr\ .$$

Eine ganz ähnliche Rechnung zeigt, dass auch f_4 nur von z abhängt.

Wir combiniren die beiden Transformationen:

$$yp-xq+Z(z)\,r\ ,$$
$$xp+yq+kzr\ ,$$

und finden so die Transformation

$$k(Z-zZ')\,r\ ,$$

welche identisch verschwinden muss.

Es ist andererseits

$$(p,\ (x^2-y^2)\,p+2xyq+f_5 r) = 2xp+2yq+\frac{\partial f_5}{\partial x} r$$

$$(q,\ (x^2-y^2)\,p+2xyq+f_5 r) = -2(yp-xq)+\frac{\partial f_5}{\partial y} r$$

und also

$$\frac{\partial f_5}{\partial x} = 2kz\,,\quad \frac{\partial f_5}{\partial y} = -2Z\ ,$$

woraus

$$f_5 = 2kxz-2Zy+Z_1\ .$$

Ferner ist

$$(xp+yq+kzr,\ (x^2-y^2)\,p+2xyq+f_5 r) =$$
$$= (x^2-y^2)\,p+2xyq+\left(x\frac{\partial f_5}{\partial x}+y\frac{\partial f_5}{\partial y}+kz\frac{\partial f_5}{\partial z}-kf_5\right) r\ ,$$

woraus

$$x\frac{\partial f_5}{\partial x}+y\frac{\partial f_5}{\partial y}+kz\frac{\partial f_5}{\partial z}-(k+1)f_5=0\,,$$

also:

$$x\cdot 2kz-2Zy+kz(2kx-2yZ'+Z_1')-(k+1)\{2kxz-2Zy+Z_1\}=0$$

und schliesslich:

$$2k(zZ'-Z)=0$$
$$kzZ_1'-(k+1)Z_1=0\,.$$

Wir bilden ferner die Gleichungen:

$$(p,\ 2xyp+(y^2-x^2)q+f_6r)=2(yp-xq)+\frac{\partial f_6}{\partial x}r$$

$$(q,\ 2xyp+(y^2-x^2)q+f_6r)=2(xp+yq)+\frac{\partial f_6}{\partial y}r\,,$$

welche

$$\frac{\partial f_6}{\partial x}=2Z\,,\quad \frac{\partial f_6}{\partial y}=2kz$$

und

$$f_6=2xZ+2kzy+Z_2$$

geben. Nun ist

$$(xp+yq+kzr,\ 2xyp+(y^2-x^2)q+f_6r)=$$
$$=2xyp+(y^2-x^2)q+\left(x\frac{\partial f_6}{\partial x}+y\frac{\partial f_6}{\partial y}+kz\frac{\partial f_6}{\partial z}-kf_6\right)r\,;$$

also folgt

$$x\frac{\partial f_6}{\partial x}+y\frac{\partial f_6}{\partial y}+kz\frac{\partial f_6}{\partial z}-(k+1)f_6=0$$

und

$$x(2Z)+y2kz+kz(2xZ'+2ky+Z_2')-(k+1)\{2xZ+2kzy+Z_2\}\,,$$

woraus

$$kzZ_2'-(k+1)Z_2=0\,.$$

Digitized by Google

Endlich bilden wir die Gleichung:

$$(yp - xq + Zr,\ (x^2 - y^2)p + 2xyq + f_5 r) =$$

$$= 2xyp + (y^2 - x^2)q + \left(y\frac{\partial f_5}{\partial x} - x\frac{\partial f_5}{\partial y} + Z\frac{\partial f_5}{\partial z} - Z' f_5\right) r .$$

Durch Einsetzung des Werthes von f_5 erhalten wir hier die infinitesimale Transformation:

$$2xyp + (y^2 - x^2)q + (2kyz + 2xZ + ZZ_1' - Z_1 Z')\, r ,$$

welche zeigt, dass

$$ZZ_1' - Z_1 Z' = Z_2$$

ist. Ebenso wird: $ZZ_2' - Z_2 Z' = -Z_1$.

Ist nun $k = 0$, so wird $Z_1 = Z_2 = 0$ und die Gruppe hat, da Z gleich 1 gesetzt werden kann, die Form

$$q,\ p,\ xp + yq,\ yp - xq + r ,$$
$$(x^2 - y^2)p + 2xyq - 2yr ,$$
$$2xyp + (y^2 - x^2)q + 2xr .$$

Der Coordinatenanfang ist ein Punkt von allgemeiner Lage. Die zugehörige Determinante verschwindet, während ihre zweireihigen Unterdeterminanten nicht alle gleich Null sind. Diese Gruppe ist nur ein specieller Fall der Gruppe, die wir nachher finden.

Ist dagegen k von Null verschieden, so ist $Z = mz$ und

$$Z_1 = a_1 z^{\frac{k+1}{k}} , \quad Z_2 = a_2 z^{\frac{k+1}{k}} .$$

Dabei sind die auftretenden Constanten durch die Gleichungen

$$ma_1 - ka_2 = 0 , \quad ma_2 + ka_1 = 0$$

verknüpft.

Wären nun a_1 und a_2 nicht beide Null, so käme die Gleichung

$$m^2 + k^2 = 0 ,$$

die sich nicht in reeller Weise befriedigen lässt.

Unsere infinitesimalen Transformationen haben daher, wenn noch z passend gewählt wird, die Form:

Digitized by Google

$$\begin{array}{l} q,\ p,\ xp+yq+kr,\ yp-xq+mr\ , \\ (x^2-y^2)\,p+2xyq+(2kx-2my)\,r\ , \\ 2xyp+(y^2-x^2)\,q+(2ky+2xm)\,r\ . \end{array}$$

Der Coordinatenanfang ist ein Punkt von allgemeiner Lage. Dieser Punkt bleibt in Ruhe bei den infinitesimalen Transformationen:

$$\begin{array}{c} m(xp+yq)-k(yp-xq)\ , \\ (x^2-y^2)\,p+2xyq+(2kx-2my)\,r\ , \\ 2xyp+(y^2-x^2)\,q+(2ky+2mx)\,r\ . \end{array}$$

Die zugehörige Determinante

$$\begin{vmatrix} mx-ky & my+kx & 0 \\ x^2-y^2 & 2xy & 2kx-2my \\ 2xy & y^2-x^2 & 2ky+2mx \end{vmatrix}$$

verschwindet identisch, während die zweireihigen Unterdeterminanten nicht alle gleich Null sind.

Man beachte, dass die Annahme $k=0$, $m=1$ wieder die früher gefundene Gruppe liefert. Die Constanten k und m dürfen nicht beide verschwinden, weil sonst die Gruppe nicht transitiv wäre; die eine von ihnen kann aber immer ohne Beschränkung gleich 1 gesetzt werden.

Es ist von vornherein klar, dass die gefundene Gruppe systatisch sein muss, und in der That übersieht man ohne weiteres, dass ihre Transformationen sämmtlich mit r vertauschbar sind.

Wir suchen jetzt alle reellen Gruppen, welche durch eine imaginäre Transformation mit der Gruppe

$$\begin{array}{c} q,\ p,\ xq+r,\ x^2q+2xr\ , \\ xp+yq+Ar\ ,\quad x^2p+2xyq+(2Ax+2y)\,r \end{array}$$

ähnlich sind.

Bei dieser Gruppe bleibt die Flächenschaar $x=$ Const. invariant. Zur Bestimmung der allgemeinsten invarianten Flächenschaar $\varphi(x,y,z)=a$ bilden wir die Gleichungen:

Digitized by Google

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \Omega_1(\varphi) \ ,$$

$$x \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \Omega_2(\varphi) \ ,$$

$$x^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + 2x \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \Omega_3(\varphi) \ ,$$

aus denen

$$-x^2 \Omega_1 + 2x \Omega_2 - \Omega_3 = 0$$

hervorgeht; wäre nun φ keine Function von x, so käme

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = 0 \ ,$$

und demzufolge:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \ ,$$

so dass φ doch nur von x abhängt. Es ist somit $x =$ Const. die einzige invariante Flächenschaar.

Bei einer ähnlichen reellen Gruppe

$$Y_k f = \xi_k p_1 + \eta_k q_1 + \zeta_k r_1$$

tritt ebenfalls eine einzige offenbar reelle Flächenschaar auf: nehmen wir, wie wir können, an, dass dieselbe durch $x_1 =$ Const. dargestellt wird, so besteht eine Gleichung $x_1 = W(x)$.

Es giebt eine und nur eine infinitesimale Transformation, nämlich r, welche mit allen Transformationen der vorgelegten Gruppe vertauschbar ist. Dementsprechend giebt es eine und nur eine offenbar reelle infinitesimale Transformation, welche mit allen $Y_k f$ vertauschbar ist. Wir können annehmen, dass diese infinitesimale Transformation auf die Form r_1 gebracht ist, sodass eine Gleichung

$$r = \text{Const. } r_1 = C r_1$$

besteht.

Hieraus geht nun hervor, dass der Zusammenhang zwischen den beiden Gruppen durch Gleichungen von der Form:

$$x_1 = W(x) \ , \quad y_1 = \Psi(x, y) \ , \quad z_1 = C z + \Phi(x y)$$

vermittelt wird.

Digitized by Google

Ist

$$\xi_k(x_1)\,p_1 + \eta_k(x_1 y_1)\,q_1 + \zeta_k r_1$$

die Form der Transformationen $Y_k f$, so ist es klar einerseits, dass die verkürzte Transformation

$$x_1 = W(x), \quad y_1 = \Psi(x y)$$

die Gruppe $\xi_k(x_1)\,p_1 + \eta_k(x_1 y_1)\,q_1$ auf die Form

$$q,\ xq,\ x^2 q,\ p,\ xp + yq,\ x^2 p + 2xyq$$

bringt, andererseits dass die Transformation $x_1 = W(x)$ die Gruppe $\xi_k(x_1)\,p_1$ auf die Form $p,\ xp,\ x^2 p$ bringt.

Hieraus folgt nun, dass es möglich ist, eine solche *reelle* Function x_2 von x_1 einzuführen, dass die Gruppe $\xi_k(x_1)\,p_1$ die Form: $p_2,\ x_2 p_2,\ x_2^2 p$ annimmt.

Die verkürzte Gruppe $\xi_k(x_1)\,p_1 + \eta_k(x_1 y_1)\,q_2$ erhält hierdurch die Form

$$\omega_1 q_1,\ \omega_2 q_1,\ \omega_3 q_1,\ p_1 + \eta_1 q_1,$$
$$x_1 p_1 + \eta_2 q_1,\quad x_1^2 p_1 + \eta_3 q_1 .$$

Dabei leuchtet ein, dass das Verhältniss je zweier Grössen ω_k nur von x_1 abhängt.

Wir können nun durch reelle Substitution uns die Veränderliche y_1 derart gewählt denken, dass die drei ω_k nur von x_1 abhängen. Alsdann werden die η_k linear in y_1 und es ist überdies möglich η_1 gleich Null zu setzen, während η_2 die Form

$$\eta_2 = c_2 y_1 + \alpha_2(x_1) \quad (c_2 = \text{Const.})$$

annimmt. Nun ergiebt es sich durch eine von mir öfter angewandte Methode, dass die Gruppe $\omega_k(x_1)\,q_1$ die Form

$$q_1,\ x_1 q_1,\ x_1^2 q_1$$

besitzt. Schliesslich geht in bekannter Weise hervor, dass die verkürzte Gruppe $\xi_k(x_1)\,p_1 + \eta_k q_1$ durch reelle Variabelnänderung die alte Form

$$q,\ xq,\ x^2 q,\ p,\ xp + yq,\ x^2 p + 2xyq$$

annehmen kann.

Digitized by Google

Nunmehr erkennen wir, indem wir wie früher verfahren, dass es möglich ist, eine solche reelle Function von x_1, y_1, z_1 als neues z_1 einzuführen, dass auch unsere Gruppe in x, y, z die alte Form

$$q_1,\ p_1,\ x_1 q_1 + r_1,\ x_1^2 q_1 + 2 x_1 r_1\ ,$$
$$x_1 p_1 + y_1 q_1 + A_1 r_1,\ x_1^2 p_1 + 2 x_1 y_1 q + (2 A_1 x_1 + 2 y_1) r_1$$

annimmt. Auf die Frage, ob immer $A_1 = A$ wird, brauchen wir nicht einzugehen.

Wir fragen jetzt nach allen reellen Gruppen des Raumes, welche mit der Gruppe

$$r,\ q,\ p + yr,\ xq + \tfrac{1}{2} x^2 r,\ xp - yq,\ yp + \tfrac{1}{2} y^2 r$$

durch imaginäre Transformation ähnlich sind.

Es giebt eine und nur eine infinitesimale Transformation, nämlich r, welche mit allen Transformationen der vorgelegten Gruppe vertauschbar ist.

Zu jeder ähnlichen reellen Gruppe:

$$Y_k f = \xi_k \frac{\partial f}{\partial x_1} + \eta_k \frac{\partial f}{\partial y_1} + \zeta_k \frac{\partial f}{\partial z_1}$$

gehört daher ebenfalls eine und nur eine mit allen $Y_k f$ vertauschbare infinitesimale Transformation. Da dieselbe reell ist, können wir annehmen, dass sie die Form r_1 besitzt. Hieraus folgt, dass die Transformation, welche die Aehnlichkeit vermittelt, die Form

$$x_1 = X(x, y),\quad y_1 = Y(x, y),\quad z_1 = Cz + \Phi(x, y)$$

und dass die Gruppe $Y_k f$ die Form

$$\xi_k(x_1 y_1)\, p_1 + \eta_k(x_1 y_1)\, q_1 + \zeta_k r_1$$

besitzt. Dabei bringt die verkürzte Transformation

$$x_1 = X,\quad y_1 = Y$$

die verkürzte Gruppe

$$\xi_k(x_1 y_1)\, p_1 + \eta_k(x_1 y_1)\, q_1$$

Digitized by Google

auf die Form

$$q,\ p,\ xq,\ xp - yq,\ yp\ .$$

Ich habe nun gefunden, dass jede reelle Gruppe, welche überhaupt mit der Gruppe $q, p, xq, xp - yq, yp$ ähnlich ist, mit ihr durch eine *reelle* Transformation ähnlich ist. Es folgt dies ohne grosse Schwierigkeit aus der Bemerkung, dass $y'' = 0$ die einzige bei der vorgelegten Gruppe invariante Differentialgleichung zweiter Ordnung darstellt.

In diesen Berichten habe ich ein Resumé meiner Reduction aller *reellen* Gruppen einer Ebene auf kanonische Formen gegeben. Mein Schüler Herr Sulzberger, dem ich meine Resultate mittheilte, hat neuerdings in seiner Dissertation eine im Allgemeinen befriedigende Ableitung derselben entwickelt.

Die Gruppe $Y_k f$ kann daher durch reelle Substitution die Form annehmen

$$r_1,\ p_1 + f_1 r,\ q_1 + f_2 r_1,\ x_1 q_1 + f_3 r_1\ ,$$
$$x_1 p_1 - y_1 q_1 + f_4 r_1,\ y_1 p_1 + f_5 r_1\ .$$

Hieraus ergiebt sich nun unmittelbar, *dass jede reelle Gruppe des Raumes, welche mit der Gruppe*

$$r,\ q,\ p + yr,\ xq + \tfrac{1}{2}x^2 r,\ xp - yq,\ yp + \tfrac{1}{2}y^2 r$$

ähnlich ist, mit ihr durch reelle Substitution ähnlich ist.

Durch ganz analoge Betrachtungen erkennt man, *dass jede mit der Gruppe*

$$p,\ q,\ r,\ xq + r,\ 2xp + yq + Cxr\ ,$$
$$x^2 p + xyq + (\tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{2}Cx^2)\, r$$

ähnliche reelle Gruppe mit ihr durch reelle Transformation ähnlich ist.

Hiermit sind alle reellen Gruppen des Raumes bestimmt, welche im weiteren oder engeren Sinne des Wortes freie Beweglichkeit besitzen.

Während die Gruppe der Euclidischen Bewegungen und die Gruppe der Nichteuclidischen Bewegungen des Raumes die einzigen sind, welche im engeren Sinne des Wortes freie Beweglichkeit besitzen, giebt es fünf reelle Gruppen, welche im weiteren Sinne des Wortes freie Beweglichkeit besitzen. Das sind die folgenden:

Digitized by Google

$$p,\ q,\ xp+r,\ yq+kr,\ x^2p+2xr,\ y^2q+2Kyr$$

$$q,\ p,\ xp+yq+kr,\ yp-xq+mr,$$
$$(x^2-y^2)p+2xyq+(2kx-2my)r,$$
$$2xyp+(y^2-x^2)q+(2ky+2mx)r$$

$$p,\ q,\ xq+r,\ x^2q+2xr,\ xp+yq+Ar,$$
$$x^2p+2xyq+(2Ax+2y)r$$

$$r,\ q,\ p+yr,\ xq+\tfrac{1}{2}x^2r,\ xp-yq,\ yp+\tfrac{1}{2}y^2r$$

$$p,\ q,\ r,\ xq+yr,\ 2xp+yq+Cxr,$$
$$x^2p+xyq+(\tfrac{1}{2}y^2+\tfrac{1}{2}Cx^2)r\ .$$

Es ist mir nicht gelungen, die Untersuchungen dieser Abhandlung auf n Dimensionen zu übertragen. Ich glaube jedoch, dass diese Uebertragung keine grössere Schwierigkeit machen wird, wohlbemerkt wenn man sich auf Gruppen beschränkt, bei denen im *engeren* Sinne des Wortes freie Beweglichkeit stattfindet.

Es muss möglich sein, für einen n-fach ausgedehnten Raum nachzuweisen, dass wenn im engeren Sinne des Wortes (also ausnahmslos innerhalb eines Bereiches) freie Beweglichkeit stattfindet, dass dann auch im Infinitesimalen freie Beweglichkeit in dem Sinne meiner vorigen Abhandlung stattfindet. Daraus würde sich dann die Erledigung der gestellten Frage ohne weiteres ergeben.

Dagegen dürfte die Frage nach allen Gruppen des n-fachen Raumes, bei denen freie Beweglichkeit im weiteren Sinne des Wortes stattfindet, ziemlich schwierig zu erledigen sein. Diese Frage deckt sich mit der Frage nach allen Gruppen, bei denen q Punkte nur solche Invarianten haben, die sich aus den Invarianten zweier Punkte ableiten lassen.

Ich bin im Uebrigen, ich wiederhole das, der Ansicht, dass *die freie Beweglichkeit im Infinitesimalen* die Gruppe der Bewegungen in der einfachsten Weise charakterisirt.

Digitized by Google

§ 7.

Schlussbemerkungen.

Wir haben im Vorangehenden darauf Gewicht gelegt, *alle* Gruppen des Raumes x, y, z zu bestimmen, bei denen q Punkte nur solche Invarianten besitzen, die sich aus Invarianten zweier Punkte zusammensetzen lassen. Auf der anderen Seite wünschten wir möglichst wenig Sätze aus meiner allgemeinen Theorie der Transformationsgruppen als bekannt vorauszusetzen. Die natürliche Folge war, dass die vorangehende Untersuchung ziemlich weitläufig wurde.

Begnügen wir uns mit dem Hauptresultat, dass nur bei der Gruppe der Bewegungen freie Beweglichkeit *ausnahmslos* innerhalb eines Bereiches stattfindet und benutzen wir überdies meine früheren Untersuchungen in grösserer Ausdehnung, so können wir schneller zum Ziele kommen.

Wir wissen, dass wenn eine von der Gruppe aller Bewegungen verschiedene Gruppe die verlangten Eigenschaften besitzt, dass dann mit jedem Punkte mindestens eine invariante Richtung verknüpft ist. Ist nun jedem reellen Punkte eine reelle Richtung zugeordnet, so existirt eine invariante Schaar von ∞^2 reellen Curven $u = a$, $v = b$. Wird dann ein Punkt festgehalten, so kann jeder Punkt der hindurchgehenden Curve aus dieser Schaar jedenfalls nur ∞^1 Lagen annehmen. In diesem Falle wäre es also unmöglich, einen Bereich des Raumes derart abzugrenzen, dass innerhalb desselben ausnahmslos freie Beweglichkeit stattfindet.

Wir können daher annehmen, dass mit jedem reellen Punkte eine imaginäre Richtung invariant verknüpft ist; dann bleibt auch die imaginär-conjugirte Richtung und gleichzeitig das durch beide gehende reelle Flächenelement in Ruhe; kurz unsere Gruppe lässt eine reelle Gleichung von der Form:

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$$

invariant.

Ist die soeben geschriebene Gleichung nicht integrabel, so lässt sich unsere Gruppe als eine Gruppe von Berührungstransformationen einer Ebene deuten und zwar bleiben bei der betreffenden Gruppe von Berührungstransformationen zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung invariant. Oder noch

Digitized by Google

einfacher, man kann unsere Gruppe des Raumes als eine sechsgliedrige *erweiterte* Gruppe von Punkttransformationen einer Ebene auffassen, bei welcher *eine* Differentialgleichung *zweiter* Ordnung invariant bleibt.

Nun aber giebt es nach meinen Untersuchungen über Differentialinvarianten nur eine sechsgliedrige Gruppe von Punkttransformationen der xy-Ebene, nämlich die Gruppe

$$p,\ q,\ xp,\ xq,\ yp,\ yq$$

(und die mit ihr dualistische Gruppe), welche eine Differentialgleichung zweiter Ordnung invariant lässt. Die zugehörige erweiterte Gruppe hat, wenn

$$\frac{dy}{dx} = z, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = r$$

gesetzt wird, die Gestalt:

$$p,\ q,\ xq + r,\ xp - yq - 2zr\ ,$$
$$yp - z^2 r,\ xp + yq\ .$$

Zu dieser Gruppe gelangten wir auf S. 382; bei ihr findet aber nicht einmal im weiteren Sinne des Wortes freie Beweglichkeit statt.

Die reelle invariante Gleichung

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$$

ist somit sicher integrabel. Ist $\varphi(x, y, z)$ eine reelle Integralfunction derselben, so kann φ als neues x eingeführt werden. Wird jetzt irgend ein reeller Punkt p festgehalten, so bleibt die hindurchgehende Ebene: $x = C$ in Ruhe; diese Ebene wäre also eine der Pseudokugeln mit dem Mittelpunkt p. Nun aber liegt der Punkt p auf der betreffenden Kugel, er müsste also in jeden andern Punkt der Pseudokugel übergehen können, was nicht der Fall ist.

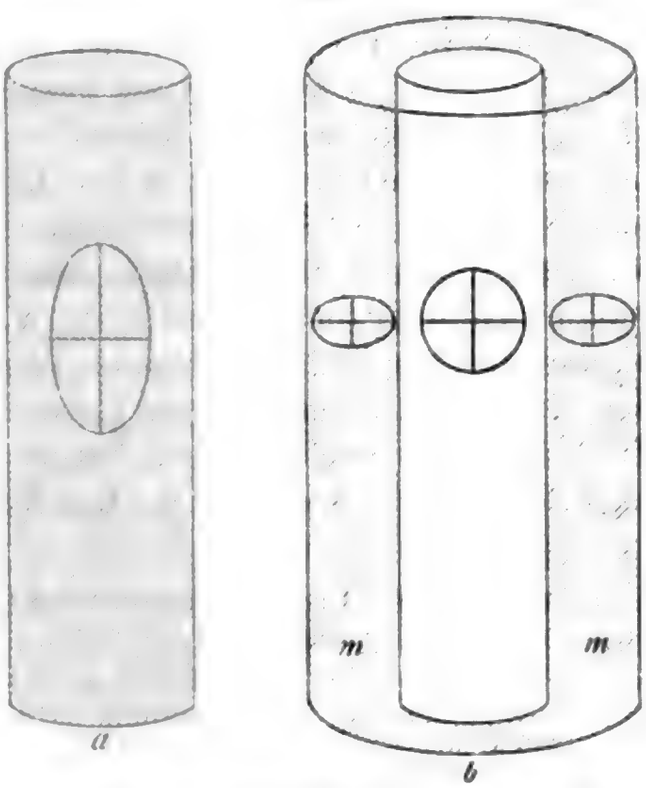
Digitized by Google

SITZUNG VOM 1. DECEMBER 1890.

H. Ambronn, *Das optische Verhalten markhaltiger und markloser Nervenfasern.*

Die markhaltigen Nerven zeigen, wie aus zahlreichen früheren Beobachtungen bekannt ist, in ihren Markscheiden eine starke Doppelbrechung. Die Orientierung des optischen Elasticitäts-ellipsoids ist jedoch eine andere, wie in den gleichfalls stark anisotropen Muskeln, Sehnen, Pflanzenfasern u. dergl. In beistehender Skizze ist die Lage der im optischen Längsschnitte wirksamen Elasticitätsellipsen (im Sinne von NÄGELI und SCHWENDENER) bei Nerven und Sehnen angegeben.

Fig. 1.



a) Lage der Elasticitätsellipse in einer Sehne.
b) Lage der Elasticitätsellipse in einer markhaltigen Nervenfaser. *m*: Markscheide.

Zugleich zeigt sich die eigenthümliche Erscheinung, dass die mittleren Partien der markhaltigen Nervenfasern bei senkrechter Lage der Längsachse zur Richtung der durchgehenden Lichtstrahlen in jedem Azimuth optisch neutral bleiben. Dieses Verhalten der

Digitized by Google

Nervenfasern hat man auf verschiedene Weise zu erklären versucht. Valentin [1]) hat es als wahrscheinlich hingestellt, dass das Nervenmark sich wie ein einachsiger optisch negativer Krystall verhalte; er giebt an, dass dünne Querschnitte aus getrockneten Menschennerven in Canadabalsam eingeschmolzen die Farbe eines Gypsplättchens nicht ändern. Diese Beobachtung ist jedoch nicht beweiskräftig; durch die Einschmelzung in Canadabalsam wird jedenfalls eine wesentliche Veränderung herbeigeführt, denn frische Querschnitte, in Wasser oder Glycerin untersucht, ergeben bei Beobachtung im parallelen Lichte ein positives Interferenzkreuz. Auf Grund dieser letzteren Thatsache macht v. Ebner [2]) mit Recht geltend, dass ein Vergleich des Nervenmarks oder der Faser mit einem einachsigen optisch negativen Krystall nicht zutreffend ist. Nach Valentin haben Kleebs [3]) und später Kühne [4]) die Ansicht ausgesprochen, dass die optischen Eigenthümlichkeiten der Nervenfasern auf die Einlagerung kleinster krystallinischer Theilchen zurückzuführen seien; diese Theilchen sollen an und für sich einachsig optisch positiv und mit ihren optischen Achsen sämmtlich radiär gerichtet sein. Kühne [5]) hat sich auch über die chemische Natur dieser Theilchen ausgesprochen, er meint, dass es *Protagon*-Krystalle seien. Dieser von Liebreich [6]) zuerst dargestellte Körper ist nun aber, wie v. Ebner ganz richtig bemerkt, in kaltem Aether fast ganz unlöslich, während doch die Nerven bei Behandlung mit diesem Lösungsmittel ihre charakteristische Doppelbrechung gänzlich verlieren. v. Ebner selbst führt die optische Anisotropie des Nervenmarks auf die infolge des Intussusceptionswachsthums eintretenden Spannungen zurück. In Betreff der optisch einachsigen Natur des Nervenmarks spricht er sich folgendermassen aus: [7]) »Das Nervenmark ist positiv ein-

---

1) Valentin, G. Die Untersuchung der Pflanzen und Thiergewebe in polarisirtem Lichte. Leipzig 1861. S. 297 ff.

2) v. Ebner, V. Untersuchungen über die Ursachen der Anisotropie organisirter Substanzen. Leipzig 1882. S. 181 ff.

3) Klebs, G. Die Nerven der organischen Muskeln. Virchow's Archiv Bd. XXXII. 1865. S. 168.

4) Kühne, W. Lehrbuch der physiologischen Chemie. Leipzig 1868. S. 339.

5) l. c. S. 345.

6) Liebreich, O. Ueber die chemische Beschaffenheit der Gehirnsubstanzen. Ann. der Chemie und Pharmacie 1865, Bd. CXXXIV, S. 27—44.

7) v. Ebner, l. c. S. 232.

Digitized by Google

achsig doppeltbrechend mit radiär gerichteter optischer Achse, zeigt also im Querschnitte dieselben Erscheinungen wie ein Stärkekorn. Die Spannungshypothese müsste zwar voraussetzen, dass durch Intussusceptionswachsthum das Nervenmark optisch zweiachsig wird, da ja die Widerstände für die Einlagerung der Theilchen in der tangentialen Quer- und Längsrichtung nicht dieselben sein können. Indessen ist es gewiss nicht widersinnig, sich vorzustellen, dass die Zahl der nach den beiden Richtungen sich einlagernden Theilchen selbst wieder von den Widerständen, welche sich der Einlagerung entgegenstellen, beeinflusst wird, wodurch eine grössere Gleichmässigkeit der Wachsthumsspannung nach beiden Richtungen herbeigeführt werden kann.« Ich gebe zu, dass man auf diese Weise, wenn man überhaupt die Spannungshypothese v. Ebner's sowie seine Annahme, das Nervenmark wachse durch Intussusception, als berechtigt ansieht, die optisch einachsige Natur zu erklären vermag.

Obwohl v. Ebner, wie schon erwähnt wurde, die Thatsache anführt, dass die Nerven durch Behandlung mit Alkohol und Aether ihre charakteristische Doppelbrechung verlieren, so giebt er doch nirgends eine Erklärung für diese überraschende Eigenschaft. Uebrigens ist diese Beobachtung insofern nicht ganz richtig, als die Doppelbrechung nach jener Behandlung nicht etwa gänzlich verloren geht, sondern nur etwas schwächer wird, dabei aber, was das Wichtigste ist, den *entgegengesetzten Charakter* erhält. Mit Aether extrahirte Nervenfasern zeigen nämlich eine deutliche in Bezug auf die Längsrichtung positive Doppelbrechung, verhalten sich also ganz ebenso wie die Sehnen, Muskeln, Pflanzenfasern u. dergl. Dasselbe Resultat erhält man übrigens auch auf einem anderen Wege. Erhitzt man die Nervenfasern in verdünntem Glycerin etwa bis zur Siedehitze des Wassers, so verschwindet die negative Doppelbrechung und es tritt dafür eine sehr schwache positive ein; lässt man sodann erkalten, so kehrt die frühere negative Doppelbrechung in ihrer vollen Stärke wieder zurück.

Diese beiden leicht zu beobachtenden Erscheinungen können auf Grund der v. Ebner'schen Spannungshypothese, wie ich glaube, keine genügende Erklärung finden; sie haben aber die grösste Aehnlichkeit mit dem Verhalten einer gewissen Gruppe pflanzlicher Gewebe, der Cuticula und der verkorkten Zellmembranen.

Digitized by Google

Ich konnte früher nachweisen[1]), dass die optischen Eigenthümlichkeiten jener Gewebe, welche sich von den meisten übrigen pflanzlichen Geweben in derselben Weise unterscheiden wie die markhaltigen Nervenfasern von den Muskeln, Sehnen u. dergl., auf die Einlagerung krystallinischer Theilchen eines wachsartigen Körpers zurückzuführen seien, dessen chemische Natur durch andere Untersuchungen[2]) bereits ziemlich genau studirt war.

Als ich im Frühjahre 1889 an der zoologischen Station in Neapel zum ersten Male das optische Verhalten nervenähnlicher Röhren, der sog. Neurochorde, von Mastobranchus und anderen Würmern kennen lernte, glaubte ich die Vermuthung aussprechen zu dürfen, dass hier etwas Aehnliches wie bei der Cuticula und den verkorkten Membranen vorliege, dass also die obenerwähnte Ansicht von Klebs und Kühne, nach welcher die Doppelbrechung des Nervenmarks auf die Einlagerung krystallinischer Theilchen zurückzuführen ist, die grössere Wahrscheinlichkeit für sich habe. Herr Dr. B. Friedländer, durch dessen Freundlichkeit ich die genannten Objecte kennen lernte, konnte denn auch sowohl bei Erwärmung wie bei Extraction mit Alkohol und Aether an den Neurochorden ein Verschwinden der Doppelbrechung bezw. eine Umkehrung ihres Charakters constatiren. Der genannte Herr beobachtete auch an den Neurochorden anderer Anneliden, sowie mancher Crustaceen ein ähnliches Verhalten; ferner giebt er an, dass auch an den Nervenfasern aus dem Ischiadicus des Frosches »Erhitzung die Doppelbrechung wenigstens sehr erheblich schwächt und dass sie hier wie dort [bei Mastobranchus] nach dem Erkalten wieder zurückkehrt«[3]). Diese Angaben Friedländer's sind insofern richtig, als bei genügender Erhitzung eine Schwächung der Doppelbrechung eintritt; er hat jedoch, wie es scheint, nicht beobachtet, dass auch eine Umkehrung des Charakters der Doppelbrechung dabei

1) Ueber das optische Verhalten der Cuticula und der verkorkten Membranen. Ber. d. Deutschen Botan. Ges. 1888. Bd. VI, S. 226 ff.

2) Kügler, K. Ueber d. Kork v. Quercus Suber. Archiv für Pharmacie. 3. Reihe. Bd. XXII, S. 247 ff. Vergl. auch A. Meyer, Ber. d. Bot. Ges. Bd. I. 1883. S. XXIX.

3) B. Friedländer, Ueber die markhaltigen Nervenfasern und Neurochorde der Crustaceen und Anneliden. Mitth. d. Zoolog. Station in Neapel. IX. Bd. 2. Heft. S. 254 ff.

Digitized by Google

stattfindet. Ich konnte mich hiervon sowohl an den Fasern des Ischiadicus, wie auch an verschiedenen anderen markhaltigen Nerven des Frosches überzeugen. Durch Extraction mit Alkohol oder Aether zeigte sich, wie schon angedeutet wurde, dieselbe Erscheinung; nur kehrte hierbei die frühere optische Reaction niemals wieder zurück, da eben der wirksame Körper durch Lösung entfernt worden war.

Nach diesen Resultaten drängte sich vor Allem die Frage auf, welcher Art der die optischen Eigenschaften des Nervenmarks bedingende Körper sei. Es liegen bekanntlich eine ganze Reihe von Untersuchungen über die chemische Zusammensetzung des Nervenmarks vor. Als die hauptsächlichsten Bestandtheile, die durch Alkohol ausgezogen werden, betrachtet man gewöhnlich Cholesterin, Lecithin und Protagon. Das letztere ist, wie schon von v. Ebner hervorgehoben wurde, wegen seiner geringen Löslichkeit in kaltem Aether von vorneherein ausgeschlossen. Bei der Untersuchung des optischen Verhaltens von Cholesterin und Lecithin konnte ich mich auf Grund verschiedener Beobachtungen zunächst dahin entscheiden, dass Cholesterin ebenfalls wohl nicht in Frage komme.

Aus den Resultaten, welche man bei Erhitzung der Nervenfasern erhält, geht wie ich glaube mit ziemlicher Sicherheit hervor, dass der betreffende Körper in dem Marke in Form sehr kleiner gleichsinnig orientirter Krystalle vorhanden ist, die bei der Erwärmung schmelzen und somit optisch neutral werden, beim Abkühlen dagegen wieder in der früheren Form auskrystallisiren.

Nach Brewster[1] kann man auf künstlichem Wege eine gleichmässige Orientierung fein vertheilter Kryställchen herbeiführen, wenn man gewisse Körper auf Glasplatten in einer Richtung aufstreicht. Man erhält auf diese Weise doppeltbrechende Objecte, deren optischer Charakter, auf die Strichrichtung bezogen, ein verschiedener ist; die einen werden positiv, die anderen negativ doppeltbrechend. Den von Brewster gemachten Angaben wurden später von Haidinger[2], Frhr. v. Seherr Thoss[3]

1) Brewster, On the production of crystalline structure in crystallised powders by compression and traction; Transactions of the Royal Society of Edinburgh 1853. Bd. XX. S. 535 f.

2) Haidinger, Ber. d. Wiener Akad. 1859, S. 183.

3) v. Seherr Thoss, Ueber künstlichen Dichroismus, Wiedemann's Ann. der Phys. und Chem. Bd. VII. S. 270 ff.

und dem Verfasser [1]) weitere zugefügt, die ebenfalls auf eine gleichsinnige Orientirung kleinster Theilchen hinweisen. Macht man nun ähnliche Versuche mit Cholesterin und Lecithin, so erkennt man sofort, dass Cholesterin beim Aufstreichen in einer bestimmten Richtung optisch positiv, Lecithin dagegen optisch negativ wird. Da Lecithin in feuchter Luft eine dem gequollenen Gummi ähnliche Consistenz besitzt, so kann man leicht Fäden aus demselben ziehen und auch diese zeigen eine in Bezug auf die Zugrichtung starke negative Doppelbrechung, verhalten sich demnach ähnlich wie die Fäden aus Kirschgummi und umgekehrt wie diejenigen aus arabischem Gummi [2]).

Auch die Myelinscheide der markhaltigen Nerven zeigt, wie schon mehrfach erwähnt wurde, eine in Bezug auf die Längsachse negative Doppelbrechung. Schon aus dieser Uebereinstimmung könnte man wohl vermuthen, dass der optische Charakter des Nervenmarks nicht durch das Cholesterin hervorgerufen wird. Diese Vermuthung findet ihre Bestätigung auf Grund anderer Beobachtungen, die eine grössere Beweiskraft besitzen.

Es ist seit langer Zeit bekannt, dass an den Schnittflächen markhaltiger Nervenfasern im Wasser eigenthümliche Gebilde, die sog. Myelinformationen, herauswachsen. Dieselben sind zuerst von Virchow [3]) und später von zahlreichen anderen Forschern eingehend beschrieben worden. Man hat ausserdem verschiedentlich beobachtet, dass ähnliche Figuren auch auf andere Weise hervorgerufen werden können. Es würde jedoch hier zu weit führen, wenn ich die umfangreiche Literatur über diesen Gegenstand ausführlich berücksichtigen wollte. Es mag hier nur hervorgehoben werden, dass man auch aus Lecithin durch Zusatz von Wasser die charakteristischen Myelinfiguren erhält, während dies beim Cholesterin unter ähnlichen Verhältnissen nicht der Fall ist.

Breitet man etwas Lecithin [4]) auf einem Objectträger aus und

1) l. c. S. 228 f.

2) Vergl. v. Ebner l. c. S. 28.

3) Virchow, R., Ueber das ausgebreitete Vorkommen einer dem Nervenmark analogen Substanz in den thierischen Geweben. Virchow's Archiv 1854. Bd. VI. S. 562 ff.

4) Das von mir benutzte Lecithin erhielt ich zum Theil durch die Freundlichkeit des Herrn Prof. Drechsel, zum Theil aus dem Laboratorium des Herrn Dr. Grübler, hier. Beide Präparate waren aus Eidotter hergestellt.

Digitized by Google

setzt Wasser hinzu, so wachsen nach kurzer Zeit jene Gebilde hervor, die sehr bald eine deutliche doppelte Contourirung zeigen und zu den mannigfaltigsten Figuren sich entwickeln; die Spitzen der fortwachsenden Schläuche führen dabei fast fortwährend nutirende Bewegungen aus. Man kann das Wachsthum sowie die Structur dieser Schläuche, Kugeln u. dergl. Tage lang unter dem Mikroskope verfolgen, wenn man statt Wasser verdünntes Glycerin zusetzt; das Wachsthum erfolgt dann, wie es scheint, bedeutend langsamer. Sie besitzen sämmtlich eine doppelte Contourirung und sind wohl zweifellos als Niederschlagsmembranen anzusehen, wenn auch über das Zustandekommen derselben in chemischer Hinsicht so gut wie nichts bekannt ist. Von besonderem Interesse für unsere Frage ist nun das optische Verhalten der Wandungen jener Gebilde. Sie zeigen stets eine deutliche Doppelbrechung und eine Orientirung des Elasticitätsellipsoids, welche mit derjenigen im Nervenmark und in den aus Nerven hervorwachsenden Myelinformationen vollkommen übereinstimmt.

Eine markhaltige Nervenfaser zeigt über einem Gypsplättchen Roth I, wenn ihre Längsachse mit der grösseren Elasticitätsachse des Gypsplättchens parallel steht, ein lebhaftes Gelb I; bei Drehung um 90° dagegen ein lebhaftes Blau II. Dieselbe Reaction ergeben die Myelinformationen. Dass diese letzteren doppeltbrechend sind, ist schon von Apathy[1]) bemerkt worden, doch hat er den Charakter der Doppelbrechung nicht festgestellt. Wenn die Myelinformationen längere Zeit im Wasser verweilen, so platzen sie häufig und das Myelin fliesst wie Apathy sich ausdrückt »zu öligen Tropfen« zusammen, welche zwischen gekreuzten Nicols ein deutliches Interferenzkreuz zeigen: bei Untersuchung über einem Gypsplättchen ergiebt sich, dass dieses Kreuz ein sog. positives ist, wie es z. B. die Stärkekörner zeigen. Bekannt ist, dass man durch mechanischen Druck aus markhaltigen Nerven das Myelin in Form von Tropfen herauspressen kann; diese Tropfen zeigen ebenfalls im polarisirten Lichte ein positives Kreuz. Es erinnert das optische Verhalten des Myelins, mit welchem dasjenige des Lecithins vollkommen übereinstimmt, an die von Lehmann[2]) beschriebenen Körper,

1) Apathy, St., Nach welcher Richtung hin soll die Nervenlehre reformirt werden. Biolog. Centralblatt. Bd. IX. 1889/90. S. 638.

2) Lehmann, Wiedemann's Ann. d. Phys. und Chem. Bd. XL. S. 401 f. und Bd. XLI. S. 525 f.

Digitized by Google

welche im flüssigen Aggregatszustand nach seiner Anschauung krystallinische Structur haben sollen. Auf diese merkwürdige Eigenschaft des Lecithins näher einzugehen ist hier nicht der Platz, doch hoffe ich an anderer Stelle über diesen Punkt ausführlicher berichten zu können.

Aus der frappanten Uebereinstimmung zwischen dem Myelin der Nerven und dem aus Eidotter hergestellten Lecithin, welche sich sowohl in der Bildung jener eigenthümlichen Niederschlagsmembranen wie auch im optischen Verhalten kund giebt, glaubte ich schliessen zu dürfen, dass der im Nervenmark vorhandene optisch wirksame Körper das Lecithin sei. Diese Ansicht sprach ich auch bereits im December vorigen Jahres in einem öffentlichen, aber nicht im Druck erschienenen Vortrage aus. Weitere Belege hierfür auf Grund chemischer Untersuchungen konnte ich allerdings nicht beibringen. Um so erfreulicher war es mir, als ich aus einer vor Kurzem erschienenen Arbeit von J. Gad und J. F. Heymans [1]) ersehen konnte, dass diese beiden Forscher auf ganz anderem Wege zu demselben Resultate gelangt sind.

Gad und Heymans extrahirten die Nerven mit Alkohol und den hieraus gewonnenen Rückstand erschöpften sie mit Aether; es blieb dabei ein in Aether unlöslicher Körper zurück, der ihrer Ansicht nach mit dem Liebreich'schen Protagon identisch ist. In der nach Verdampfen des Aethers zurückbleibenden Substanz konnten sie zwei Körper sicher nachweisen, der eine erwies sich als Cholesterin, welches keine Myelinformationen zeigt und mit Osmiumsäure sich nicht schwärzt. Bei Abtrennung des Cholesterins blieb ein zweiter Körper übrig, welcher seinen Eigenschaften nach dem aus Eigelb dargestellten Lecithin sehr nahe steht. In Betreff der Einzelheiten in der Darstellung der genannten Körper muss auf die Arbeit selbst verwiesen werden.

Ferner war es mir sehr interessant, aus der Arbeit von Gad und Heymans zu ersehen, dass nach der von ihnen angewandten Methode auch in manchen sog. marklosen Nervenfasern das Vorhandensein des Lecithins constatirt werden konnte, so z. B. in den Fasern aus dem Tractus olfactorius des Hechtes.

Bereits Valentin und v. Ebner [2]) hatten angegeben, dass bei

---

1) Gad und Heymans, Ueber das Myelin, die myelinhaltigen und myelinlosen Nervenfasern. Archiv für Anat. u. Physiol.; physiol. Abth. 1890. S. 531 ff.

2) v. Ebner l. c. S. 190.

Digitized by Google

manchen marklosen Nerven eine »verhältnissmässig negative Färbung in Bezug auf die Längsachse« zu beobachten sei. Andere marklose Fasern zeigten hingegen die umgekehrte Reaction. Anderseits konnte Apathy [1]) an manchen marklosen Nerven wirbelloser Thiere sowohl deutliche Doppelbrechung, wie auch an Schnittflächen das Hervorwachsen von Myelinformationen constatiren. Den Charakter der Doppelbrechung hat er auch hierbei nicht untersucht. Bei einem zweiten Aufenthalte an der zoologischen Station zu Neapel in den ersten Monaten dieses Jahres hatte ich ebenfalls Gelegenheit, marklose Nerven verschiedener wirbelloser Thiere betreffs ihres optischen Verhaltens zu prüfen; ich konnte dabei in mehreren Fällen eine deutliche negative Doppelbrechung in Bezug auf die Längsachse erkennen, welche also nach dem im Vorstehenden Mitgetheilten auf das Vorhandensein von Lecithin schliessen liess.

Als ich die Resultate von Gad und Heymans kennen lernte, untersuchte ich sofort den Tractus olfactorius des Hechtes und konnte auch an diesem Objecte die Anwesenheit des Lecithins bestätigen.

Ich will zunächst über die in Neapel gemachten Beobachtungen berichten. Durch freundliche Unterstützung des Herrn Dr. P. Schiemenz war ich in der Lage, verschiedene Mollusken zu untersuchen. Die ohne jede Präparation deutlichen Nerven in den Fühlern von Phyllirhoë bucephala zeigten auf ihrer ganzen Ausdehnung deutlich negative Doppelbrechung in Bezug auf die Längsrichtung. Der optisch wirksame Körper ist demnach hier nicht, wie bei den markhaltigen Fasern, auf eine Markscheide beschränkt, sondern gleichmässig im ganzen Nerven vertheilt. Zu einem ähnlichen Resultate gelangte auch bereits Apathy [2]) bei den von ihm untersuchten marklosen Nerven. Dasselbe optische Verhalten zeigte sich bei den Siphonalnerven [3]) einer Venus-Art sowie an den Cerebro-Visceral-Commissuren [3]) einer Cardium-Art. In den beiden letzteren Fällen konnte ich, da die Nerven frei herauspräparirt waren, mich auch davon überzeugen, dass nach Extraction mit Alkohol und Aether der Charakter der Doppelbrechung sich umkehrte. Anders verhielten sich die in den Flügeln befindlichen Nerven verschiedener Pteropoden-Arten, die sich häufig

1) Apathy l. c. S. 637.
2) Apathy l. c. S. 641.
3) Nach Angaben des Herrn Dr. P. Schiemenz.

Digitized by Google

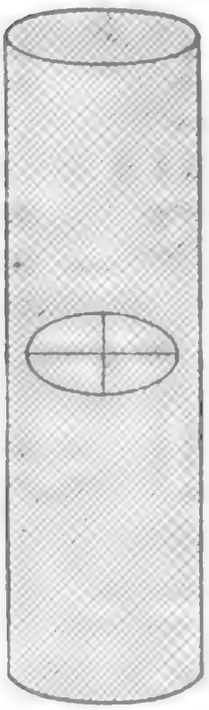
im Auftrieb vorfanden. Man kann diese Nerven ohne Präparation am lebenden Thiere, wie bei der genannten Phyllirhoë-Art, leicht beobachten. Es ergab sich, dass dieselben in Bezug auf die Längsrichtung eine schwache, aber immerhin deutliche positive Doppelbrechung besitzen.

Bei Crustaceen aus der Gruppe der Caprelliden konnte ich in den Nerven der Extremitäten gleichfalls nur den positiven Charakter beobachten.

Ferner untersuchte ich mit gütiger Unterstützung des Herrn Prof. Dr. Eisig die Nerven in den Cirrhen und blattartigen Anhängseln von Hermadion fragile; in beiden Organen zeigten die Nerven wieder wie in den zuerst erwähnten Fällen eine deutliche negative Doppelbrechung und eine gleichmässige Vertheilung des optisch wirksamen Körpers in ihrer ganzen Ausdehnung.

Nach den von Gad und Heymans gewonnenen Resultaten war es zu erwarten, dass die Fasern des Olfactorius vom Hechte gleichfalls eine negative Doppelbrechung ergeben würden. Die Untersuchung bestätigte dies sofort. Die Fasern des Olfactorius zeigen über der Gypsplatte Roth I, wenn sie parallel der grösseren Elasticitätsachse liegen, eine *gleichmässige* gelbe Färbung in ihrer ganzen Ausdehnung. (Vergl. Fig. 2.) Extrahirt man dieselben jedoch vorher mit Alkohol oder Aether, so zeigen sie in derselben Lage eine ebenso gleichmässige schwach blaue Färbung.

Fig. 2.



Lage der Elasticitätsellipse im Olfactorius des Hechtes.

Ohne mich in eine Discussion der sehr umfangreichen Literatur über die Structur der Nerven einzulassen, möchte ich auf Grund meiner Beobachtungen hier nur folgende Ansicht aussprechen. Sowohl in den markhaltigen wie in den marklosen Nerven ist abgesehen von der sog. Schwann'schen Scheide [1]) eine Grundsubstanz vorhanden, welche bei Abwesenheit von Myelin bezw. Lecithin die normale positive Doppelbrechung besitzt. Ist nun in dieser Partie jener optisch wirksame Körper in Form sehr kleiner mit ihren optischen Achsen radiär, sonst aber untereinander gleichsinnig gelagerter Krystalle vorhanden, so wird dadurch die positive Doppelbrech-

1) Diese zeigt immer die normale positive Doppelbrechung.

Digitized by Google

ung der Grundsubstanz verdeckt und es tritt der umgekehrte Charakter ein. Je nach der Menge des vorhandenen Lecithins wird die Stärke der Doppelbrechung schwanken und es kann auch der Fall eintreten, dass sich beide das Gleichgewicht halten oder gar die positive Doppelbrechung noch etwas überwiegt. Höchst wahrscheinlich sind alle Uebergänge in dieser Beziehung vorhanden. Nach Behandlung mit Aether wird aber immer der positive Charakter der Grundsubstanz rein hervortreten und man kann demnach aus der Veränderung, die nach der Extraction mit Aether in der Stärke und dem Charakter der Doppelbrechung erfolgt, auf die Menge des vorhanden gewesenen Lecithins schliessen.

Gad und Heymans [1]) geben an, dass nach ihren Erfahrungen immer noch die Osmiumsäure das zuverlässigste Reagens auf Myelin sei. Vielleicht dürfte auf Grund der vorstehenden Mittheilungen auch das Verhalten der Nervenfasern im Polarisationsmikroskope in zweifelhaften Fällen geeignet sein, eine Entscheidung herbeizuführen. An Empfindlichkeit steht wohl diese Probe der Reaction mit Osmiumsäure kaum nach.

Es wäre mir nicht möglich gewesen, derartige Untersuchungen auszuführen, hätte ich nicht von Seiten der Herrn Prof. Dr. Drechsel und Dr. v. Frey sowie von den obengenannten Herren an der zoologischen Station zu Neapel die bereitwilligste Unterstützung erhalten. Ihnen allen auch an dieser Stelle meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen, ist mir eine sehr angenehme Pflicht.

Leipzig, November 1890.

---

1) Gad und Heymans l. c. S. 542.

Digitized by Google

M. Krause, *Ueber die Differentialgleichungen, denen die doppelt periodischen Functionen zweiter Art Genüge leisten.* III.[1])

Im Folgenden soll dazu übergegangen werden, auf Grund der früher angegebenen Methoden Kategorien von Differentialgleichungen 2ter Ordnung anzugeben, denen die doppelt periodischen Functionen 2ter Art Genüge leisten und die, soweit dem Verfasser bekannt, bisher noch *nicht* betrachtet worden sind. Wir nehmen zunächst den Fall, dass die Integrale beide denselben Unendlichkeitspunkt, und zwar als einen doppelten besitzen, dass ferner die Coefficienten ausserdem noch einen weiteren einfachen Unendlichkeitspunkt besitzen.

§ 1.

Allgemeine Betrachtungen und Entwickelungen.

Nach den Bemerkungen der Einleitung werden alle diejenigen Differentialgleichungen gesucht, deren Integrale beide die Form haben:

$$(1)\quad \varphi(v) = \frac{\vartheta_1(v+\nu_1)\cdot\vartheta_1(v+\nu_2)}{\vartheta_0(v)^2}\cdot e^{-\sum_1^2 \frac{\vartheta_0'(\nu_\varepsilon)}{\vartheta_0(\nu_\varepsilon)}\cdot w + \lambda\cdot w},$$

wobei zwischen v und w die bekannten Beziehungen bestehen, die überdies noch in den Coefficienten den einfachen Unendlichkeitspunkt $v = -a + \frac{\tau}{2}$ besitzen.

1) Siehe diese Berichte, Sitzung vom 3. März 1890, 7. Juli 1890.

Digitized by Google

Analog dem Verfahren, welches in den früheren Arbeiten angewendet worden ist, legen wir den Betrachtungen den Ausdruck zu Grunde:

$$\vartheta_0(v+a)\cdot\vartheta_0(v)^4\cdot\frac{d^2\varphi(v)}{dv^2}\ .$$

Derselbe ist eine Thetafunction fünfter Ordnung und besitzt dieselbe Chrakteristik wie $\vartheta_0(v)$. Es müssen also zu seiner Darstellung fünf weitere linear unabhängige Thetafunctionen 5ter Ordnung gesucht werden, die denselben Bedingungsgleichungen Genüge leisten. Es sind dieses z. B. die Ausdrücke:

$$\vartheta_0(v+a)\cdot\vartheta_0(v)^4\cdot\frac{d\varphi(v)}{dv}\ ,\quad \vartheta_1(v+a)\cdot\vartheta_1(v)\cdot\vartheta_0(v)^3\cdot\frac{d\varphi(v)}{dv}\ ,$$

$$\vartheta_0(v+a)\cdot\vartheta_0(v)^4\cdot\varphi(v)\ ,\quad \vartheta_1(v+a)\cdot\vartheta_1(v)\cdot\vartheta_0(v)^3\cdot\varphi(v)\ ,$$

$$\vartheta_0(v+a)\cdot\vartheta_1(v)^2\cdot\vartheta_0(v)^2\cdot\varphi(v)\ .$$

Unter solchen Umständen erhalten wir als allgemeinen Typus der gesuchten Differentialgleichungen die Gleichung:

$$(2)\qquad \frac{d^2\varphi(v)}{dw^2}+(c_1+c_2\cdot k^2\cdot\operatorname{sn}w\cdot\operatorname{sn}(w+\alpha))\frac{d\varphi(v)}{dw}$$
$$=\varphi(v)(c_3+c_4\cdot k^2\cdot\operatorname{sn}w\cdot\operatorname{sn}(w+\alpha)+c_5\cdot k^2\cdot\operatorname{sn}^2w)\ .$$

Setzen wir

$$(3)\qquad \varphi(v)=\varphi_1(v)\cdot e^{\lambda w}\ ,$$

so leistet $\varphi_1(v)$ der Gleichung Genüge:

$$(4)\qquad \frac{d^2\varphi_1(v)}{dw^2}+(c_1'+c_2'\cdot k^2\cdot\operatorname{sn}w\cdot\operatorname{sn}(w+\alpha))\frac{d\varphi_1(v)}{dw}$$
$$=\varphi_1(v)(c_3'+c_4'\cdot k^2\cdot\operatorname{sn}w\cdot\operatorname{sn}(w+\alpha)+c_5'\cdot k^2\cdot\operatorname{sn}^2w)\ ,$$

wobei gesetzt ist:

$$(5)\qquad \begin{cases} c_1'=c_1+2\lambda\ , \\ c_2'=c_2\ , \\ c_3'=c_3-\lambda^2-\lambda\cdot c_1\ , \\ c_4'=c_4-\lambda\cdot c_2\ , \\ c_5'=c_5\ . \end{cases}$$

Digitized by Google

Die Coefficienten sind durch Reihenentwicklung zu bestimmen und zwar zunächst um den Punkt

$$v = -\frac{\tau}{2} \quad \text{oder} \quad w = -iK'$$

herum. Der Uebersichtlichkeit halber wollen wir die nothwendigen Entwickelungen der einzelnen Glieder der linken Seite unserer Gleichung um diesen Punkt herum wirklich aufstellen.

Setzt man allgemein:

$$\psi(v) = \frac{\vartheta_1(v+\nu)}{\vartheta_0(v)} \cdot e^{-\frac{\vartheta_0'(\nu)}{\vartheta_0(\nu)} \cdot w},$$

so ist bekanntlich von einem gemeinsamen Factor abgesehen die Entwicklung von $\psi\left(\frac{\tau}{2}+v\right)$ um den Punkt $v=0$ herum die folgende:

$$\frac{1}{w} - \tfrac{1}{2} \cdot \Omega \cdot w - \tfrac{1}{3} \cdot \Omega_1 \cdot w^2 - \tfrac{1}{8} \cdot \Omega_2 \cdot w^3 \cdots,$$

wobei die Relationen bestehen:

$$\Omega = k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\omega - \frac{1+k^2}{3},$$

$$\Omega_1 = k^2 \cdot \mathrm{sn}\,\omega \cdot \mathrm{cn}\,\omega \cdot \mathrm{dn}\,\omega,$$

$$\Omega_2 = k^4 \cdot \mathrm{sn}^4\omega - \frac{2(k^2+k^4)}{3}\mathrm{sn}^2\omega - \frac{7-22k^2+7k^4}{45},$$

. . . . . .

Hierbei besteht zwischen ν und ω die Beziehung, die zwischen dem Argumente der Thetafunctionen und dem der elliptischen Functionen besteht.

Hieraus folgt für unsere Function:

$$(3)\quad \varphi_1\left(\frac{\tau}{2}+v\right) = c\left(\frac{1}{w^2} - \tfrac{1}{2}\cdot a_0 - \tfrac{1}{3}\cdot a_1 \cdot w - \tfrac{1}{8}\cdot a_2 \cdot w^2 \cdots\right),$$

$$a_0 = k^2(\mathrm{sn}^2\omega_1 + \mathrm{sn}^2\omega_2) - \frac{2(1+k^2)}{2},$$

$$a_1 = k^2(u_1+u_2),$$

$$a_2 = k^4(\mathrm{sn}^2\omega_1 - \mathrm{sn}^2\omega_2)^2 - \tfrac{8}{15}(1-k^2+k^4).$$

. . . .

Digitized by Google

Dabei bestehen zwischen ν_1, ν_2 und ω_1, ω_2 die Beziehungen wie zwischen dem Argumente der Thetafunctionen und dem der elliptischen Functionen und es ist endlich der Einfachheit halber gesetzt:

$$u_\varepsilon = \operatorname{sn}\omega_\varepsilon \cdot \operatorname{cn}\omega_\varepsilon \cdot \operatorname{dn}\omega_\varepsilon \quad (\varepsilon = 1, 2) \; . \tag{6}$$

Ferner ist:

$$\frac{1}{\operatorname{sn} w} = \frac{1}{w} + \frac{1+k^2}{6} \cdot w + \frac{1}{3 \cdot 5!}(7 - 22k^2 + 7k^4) w^3 \cdots ,$$

$$\frac{1}{\operatorname{sn}(w+\alpha)} = \frac{1}{\operatorname{sn}\alpha} - b_1 \cdot w + b_2 \cdot \frac{w^2}{2} - b_3 \cdot \frac{w^3}{6} \cdots ,$$

$$b_1 = \frac{\operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}^2\alpha} ,$$

$$b_2 = \frac{2 - (1+k^2)\operatorname{sn}^2\alpha}{\operatorname{sn}^3\alpha} ,$$

$$b_3 = (6 - (1+k^2)\operatorname{sn}^2\alpha) \frac{\operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}^4\alpha} \; .$$

. . . .

Also folgt:

$$\frac{\varphi_1\left(\frac{\tau}{2}+v\right)}{\operatorname{sn} w \cdot \operatorname{sn}(w+\alpha)} = c\left(\frac{1}{\operatorname{sn}\alpha} \cdot \frac{1}{w^3} - \frac{\operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}^2\alpha} \frac{1}{w^2}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{\operatorname{sn}\alpha}\left(\frac{1}{\operatorname{sn}^2\alpha} - \frac{k^2}{2}(\operatorname{sn}^2\omega_1 + \operatorname{sn}^2\omega_2)\right)\frac{1}{w} + \cdots\right) . \tag{7}$$

Ganz analog wird:

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2 w} = \frac{1}{w^2} + \frac{1+k^2}{3} + \frac{1-k^2+k^4}{15} w^2 + \cdots ,$$

$$\frac{\varphi_1\left(\frac{\tau}{2}+v\right)}{\operatorname{sn}^2 w} = c\left(\frac{1}{w^4} + \left(\frac{2(1+k^2)}{3}\right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{k^2}{2}(\operatorname{sn}^2\omega_1 + \operatorname{sn}^2\omega_2)\right)\frac{1}{w^2} - \frac{k^2}{3}(u_1+u_2)\frac{1}{w} + \cdots\right) . \tag{8}$$

Endlich folgt die Entwickelung:

Digitized by Google

$$(9)\qquad \frac{d\varphi_1\left(\frac{\tau}{2}+v\right)}{dw}\cdot\frac{1}{\operatorname{sn} w\cdot\operatorname{sn}(w+\alpha)}$$

$$=c\left(-\frac{2}{\operatorname{sn}\alpha}\cdot\frac{1}{w^4}+c_{-3}\cdot\frac{1}{w^3}+c_{-2}\cdot\frac{1}{w^2}+c_{-1}\cdot\frac{1}{w}\cdots\right),$$

$$c_{-3}=\frac{2\cdot\operatorname{cn}\alpha\cdot\operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}^2\alpha},$$

$$c_{-2}=-2\left(\frac{1}{\operatorname{sn}^3\alpha}-\frac{1+k^2}{3\operatorname{sn}\alpha}\right),$$

$$c_{-1}=\frac{2\cdot\operatorname{cn}\alpha\cdot\operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}^4\alpha}-\frac{k^2}{3}\cdot\frac{u_1+u_2}{\operatorname{sn}\alpha},$$

. . . . . .

Die Grösse c bedeutet in den letzten Formeln eine leicht bestimmbare gemeinsame Constante, deren Werth für die nachfolgenden Zwecke ohne Bedeutung ist.

Die Vergleichung der Coefficienten der vier negativen Potenzen von w ergiebt dann die Gleichungen:

$$(10)\qquad 6-\frac{2c_2'}{\operatorname{sn}\alpha}=c_5',$$

$$(11)\qquad -2c_1'+2c_2'\cdot\frac{\operatorname{cn}\alpha\cdot\operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}^2\alpha}=\frac{c_4'}{\operatorname{sn}\alpha},$$

$$(12)\qquad -2c_2'\left(\frac{1}{\operatorname{sn}^3\alpha}-\frac{(1+k^2)}{3\operatorname{sn}\alpha}\right)=c_3'-c_4'\cdot\frac{\operatorname{cn}\alpha\cdot\operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}^2\alpha}$$
$$+c_5'\left(\frac{2(1+k^2)}{3}-\frac{k^2}{2}(\operatorname{sn}^2\omega_1+\operatorname{sn}^2\omega_2)\right),$$

$$(13)\qquad c_2'\left(\frac{2\cdot\operatorname{cn}\alpha\cdot\operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}^4\alpha}-\frac{k^2}{3}\frac{u_1+u_2}{\operatorname{sn}\alpha}\right)$$
$$=\frac{c_4'}{\operatorname{sn}\alpha}\left(\frac{1}{\operatorname{sn}^2\alpha}-\frac{k^2}{2}(\operatorname{sn}^2\omega_1+\operatorname{sn}^2\omega_2)\right)-\frac{c_5'\cdot k^2}{3}(u_1+u_2).$$

Die beiden letzten Gleichungen können wir auch schreiben:

$$(14)\qquad c_5'\cdot\frac{k^2}{2}(\operatorname{sn}^2\omega_1+\operatorname{sn}^2\omega_2)$$
$$=2c_1'\cdot\frac{\operatorname{cn}\alpha\cdot\operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha}-2c_2'\cdot k^2\cdot\operatorname{sn}\alpha+c_3'+4(1+k^2),$$

Digitized by Google

$$(15) \qquad k^2 \cdot \operatorname{sn}\alpha(u_1+u_2)(c_2' - 2\operatorname{sn}\alpha)$$
$$= 2c_1' + \frac{c_4' \cdot k^2 \cdot \operatorname{sn}\alpha}{2}(\operatorname{sn}^2\omega_1 + \operatorname{sn}^2\omega_2) \ .$$

Die noch fehlende Gleichung würden wir erhalten, wenn wir beide Seiten unserer Differentialgleichung um den Unendlichkeitspunkt von $\operatorname{sn}(w+\alpha)$ herum entwickeln würden. Statt dessen wollen wir aber zwei andere einfacher geformte Gleichungen aufstellen, indem wir links und rechts $w = -\omega_1$ und $w = -\omega_2$ setzen. Dann ergeben sich die Relationen:

$$(16) \quad c_1' + c_2' \cdot k^2 \cdot \operatorname{sn}\omega_1 \cdot \operatorname{sn}(\omega_1 - \alpha) = 2 \cdot \frac{u_1+u_2}{\operatorname{sn}^2\omega_1 - \operatorname{sn}^2\omega_2} \ ,$$

$$(17) \quad c_1' + c_2' \cdot k^2 \cdot \operatorname{sn}\omega_2 \cdot \operatorname{sn}(\omega_2 - \alpha) = 2 \cdot \frac{u_1+u_2}{\operatorname{sn}^2\omega_2 - \operatorname{sn}^2\omega_1} \ .$$

Die beiden letzten Gleichungen sind dann nicht unabhängig von einander, vielmehr ist eine von ihnen eine Folge der andern, wenn man die schon aufgestellte Gleichung (15) in Berücksichtigung zieht.

Um die Discussionen dieses Gleichungssystemes handelt es sich. Es sind nun zwei wesentlich von einander verschiedene Fälle zu unterscheiden, je nachdem wir annehmen, dass die beiden Werthe von λ, die zu den beiden Integralen gehören, einander gleich sind, oder nicht.

§ 2.

Untersuchung des Falles, in welchem die beiden Werthe von λ einander gleich sind. Allgemeine Betrachtungen.

In diesem Falle können wir, ohne der Allgemeinheit Abbruch zu thun, annehmen, dass $\lambda = 0$ ist. In der That, haben wir für diesen Fall das Problem gelöst, so haben wir es im Allgemeinen auch, da dieser durch eine einfache Substitution auf auf den speciellen reducirt werden kann. Wir können also in dem letzten Gleichungssystem des vorigen Paragraphen an Stelle der gestrichenen Buchstaben ohne weiteres die ungestrichenen setzen.

Digitized by Google

Aus den beiden ersten Gleichungen desselben können wir dann c_4 und c_5 durch die Coefficienten c_1 und c_2 ausdrücken, während die dritte die Grösse

$$s_1 = \mathrm{sn}^2\omega_1 + \mathrm{sn}^2\omega_2 \tag{1}$$

als eindeutige Function der Coefficienten darstellt. Freilich ist hierzu die Annahme nöthig, dass c_5 *nicht gleich* 0 *ist, eine Annahme, die zunächst beibehalten werden soll.*

Die beiden letzten Gleichungen können wir schreiben:

$$\delta_1 \cdot c_1 + c_2 \cdot k^2 [\mathrm{sn}^2\omega_1 \cdot \mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha - \mathrm{sn}\,\alpha \cdot u_1] = \quad 2u \cdot \frac{\delta_1}{d} ,$$

$$\delta_2 \cdot c_1 + c_2 \cdot k^2 [\mathrm{sn}^2\omega_2 \cdot \mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha - \mathrm{sn}\,\alpha \cdot u_2] = -2u \cdot \frac{\delta_2}{d} ,$$

oder auch:

$$c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}\,\alpha \cdot u_1 = \delta_1 \cdot c_1 + c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\omega_1 \cdot \mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha - 2u \cdot \frac{\delta_1}{d} , \tag{2}$$

$$c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}\,\alpha \cdot u_2 = \delta_2 \cdot c_1 + c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\omega_2 \cdot \mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha + 2u \cdot \frac{\delta_2}{d} . \tag{3}$$

Hierbei ist zur Abkürzung gesetzt:

$$\begin{cases} \delta_\varepsilon = 1 - k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\alpha \cdot \mathrm{sn}^2\omega_\varepsilon , \ \varepsilon = 1, 2 , \\ d = \mathrm{sn}^2\omega_1 - \mathrm{sn}^2\omega_2 , \\ u = u_1 + u_2 . \end{cases} \tag{4}$$

Quadriren wir die linke und rechte Seite der Gleichung (2), so ergiebt sich unter Fortlassung des Theilers δ_1 die Gleichung:

$$d^2 \cdot A_1 + 4u \cdot d \cdot B_1 - 4u^2 \cdot \delta_1 = 0 , \tag{5}$$

$$A_1 = -c_1^2 + \mathrm{sn}^2\omega_1 (c_2^2 \cdot k^4 \cdot \mathrm{sn}^2\alpha + c_1^2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\alpha - 2c_1 \cdot c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha) - c_2^2 \cdot k^4 \cdot \mathrm{sn}^4\omega_1 ,$$

$$B_1 = c_1 - k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\omega_1 (c_1 \cdot \mathrm{sn}^2\alpha - c_2 \cdot \mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha) .$$

Eine ganz analoge Gleichung würde sich durch Quadriren aus der Gleichung (3) ergeben. Wir erhalten dieselbe, indem wir an Stelle von $\mathrm{sn}\,\omega_1$ uns $\mathrm{sn}\,\omega_2$ in der letzten Gleichung gesetzt denken und umgekehrt. Wir wollen dieselbe schreiben:

$$d^2 \cdot A_2 - 4u \cdot d \cdot B_2 - 4u^2 \cdot \delta_2 = 0 . \tag{6}$$

Digitized by Google

Durch Subtraction und Fortlassung des Factors d ergiebt sich dann die Relation:

$$(7) \qquad d^2 \cdot a_1 + 4u \cdot a_2 + 4u^2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\alpha = 0 \ ,$$

$$a_1 = c_2^2 \cdot k^4 \cdot \mathrm{sn}^2\alpha + c_1^2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\alpha - 2c_1 \cdot c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{cn}\alpha \cdot \mathrm{dn}\alpha - c_2^2 \cdot k^4 \cdot s_1 \ ,$$

$$a_2 = 2c_1 - s_1 \cdot k^2(c_1 \cdot \mathrm{sn}^2\alpha - c_2 \cdot \mathrm{cn}\alpha \cdot \mathrm{dn}\alpha) \ .$$

Hierbei ist u im Allgemeinen als eindeutige Function der Coefficienten aus Gleichung (15) des vorigen Paragraphen bestimmt. Eine Ausnahme macht lediglich der Fall:

$$c_2 = 2\,\mathrm{sn}\alpha \ .$$

Denselben wollen wir einstweilen von der Betrachtung ausschliessen.

Nun ist:

$$d^2 = s_1^2 - 4s_2 \ ,$$

wenn gesetzt ist:

$$(8) \qquad s_2 = \mathrm{sn}^2\omega_1 \cdot \mathrm{sn}^2\omega_2 \ .$$

Mithin kann die letzte Gleichung als lineare Gleichung mit der Unbekannten s_2 angesehen werden.

Es würden sich also für s_1 sowohl als auch für s_2 je ein Werth ergeben, für $\mathrm{sn}^2\omega_1$ und $\mathrm{sn}^2\omega_2$ also auch. Nun werden sich aber im Allgemeinen zwei von einander verschiedene Werthesysteme $\mathrm{sn}^2\omega_1$ und $\mathrm{sn}^2\omega_2$ ergeben müssen. *Wir werden die Ausnahmefälle später zu untersuchen haben.* Das lässt sich nur so vereinigen, dass in der linearen Gleichung mit der Unbekannten s_2 der Factor von s_2 sowohl als auch das constante Glied für sich verschwinden, d. h. dass die Gleichungen bestehen:

$$c_2^2 \cdot k^4 \cdot \mathrm{sn}^2\alpha + c_1^2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\alpha - 2c_1 \cdot c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{cn}\alpha \cdot \mathrm{dn}\alpha - c_2^2 \cdot k^4 \cdot s_1 = 0 \ ,$$

$$u^2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\alpha = [-2c_1 + s_1 \cdot k^2(c_1 \cdot \mathrm{sn}^2\alpha - c_2 \cdot \mathrm{cn}\alpha \cdot \mathrm{dn}\alpha)]u \ .$$

Andererseits besteht aber die Gleichung:

$$u(c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}\alpha - 2k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\alpha) = 2c_1 - s_1 \cdot k^2(c_1 \cdot \mathrm{sn}^2\alpha - c_2 \cdot \mathrm{cn}\alpha \cdot \mathrm{dn}\alpha) \ ,$$

also folgt:

$$u^2(c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}\alpha - k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha) = 0 \ .$$

Den Fall $u = 0$ wollen wir einstweilen ausser Auge lassen, so folgt hieraus:

$$c_2 = \operatorname{sn}\alpha \ .$$

Dann folgt leicht, dass nur ein Coefficient willkürlich bleibt und zwar können wir c_1 als denselben ansehen. Die übrigen Coefficienten und die unbekannten Grössen ergeben sich aus den Gleichungen:

$$(9) \qquad c_2 = \operatorname{sn}\alpha \ ,$$

$$(10) \qquad c_5 = 4 \ ,$$

$$(11) \qquad c_4 = -2c_1 \cdot \operatorname{sn}\alpha + 2\operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha \ ,$$

$$(12) \qquad c_3 = 2c_1^2 - 6c_1 \cdot \frac{\operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha} + 4k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha - 4(1+k^2) \ ,$$

$$(13) \quad k^2 \cdot s_1 = c_1^2 - 2c_1 \cdot \frac{\operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha} + k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha$$

Gleichung (5) nimmt die Form an:

$$(14) \quad b_0 \cdot \operatorname{sn}^8\omega_1 + b_1 \cdot \operatorname{sn}^6\omega_1 + b_2 \cdot \operatorname{sn}^4\omega_1 + b_3 \cdot \operatorname{sn}^2\omega_1 + b_4 = 0 \ ,$$

$$b_0 = -4k^4 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha \ ,$$

$$b_1 = \ 8k^4 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha \cdot s_1 \ ,$$

$$b_2 = -13 \cdot s_1^2 \cdot k^4 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha + 8 \cdot s_1 \cdot k^2(1+k^2 \operatorname{sn}^2\alpha + 4 \cdot c_1^2 - 8 \cdot k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha \ .$$

$$b_3 = \ 9 \cdot k^4 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha \cdot s_1^3 - 8s_1^2 \cdot k^2(1+k^2)\operatorname{sn}^2\alpha - 4 \cdot c_1^2 \cdot s_1 + 8 \cdot k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha \cdot s_1 \ .$$

Derselben Gleichung muss dann auch $\operatorname{sn}^2\omega_2$ Genüge leisten, wobei die Relation besteht:

$$\operatorname{sn}^2\omega_1 + \operatorname{sn}^2\omega_2 = s_1 \ .$$

Man kann sich leicht von der Richtigkeit der Behauptung überzeugen, indem man die Coefficientenbeziehungen hinzunimmt:

$$b_1 = -2b_0 s_1 \ ,$$

$$b_3 = -b_0 \cdot s_1^3 - b_1 \cdot s_1^2 - b_2 \cdot s_1 \ .$$

Dieselben lehren, dass wenn $\operatorname{sn}^2\omega_1$ eine Wurzel der vorgelegten Gleichung ist, dass dann $s_1 - \operatorname{sn}^2\omega_1$ auch eine Wurzel der vorgelegten Gleichung ist.

Digitized by Google

Nehmen wir dann schliesslich noch die beiden Gleichungen hinzu:

$$u_1 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\alpha = \delta_1 \cdot c_1 + k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\omega_1 \cdot \mathrm{sn}\alpha \cdot \mathrm{cn}\alpha \cdot \mathrm{dn}\alpha - 2u \cdot \frac{\delta_1}{d} ,$$

$$u_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\alpha = \delta_2 \cdot c_1 + k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\omega_2 \cdot \mathrm{sn}\alpha \cdot \mathrm{cn}\alpha \cdot \mathrm{dn}\alpha + 2u \cdot \frac{\delta_2}{d} ,$$

so ist Alles eindeutig bestimmt und wir erhalten die beiden Integrale der vorgelegten Differentialgleichung in der vorgeschriebenen Form.

An Stelle der biquadratischen Gleichung können wir auch mehrere quadratische aufstellen, indem wir die quadratische Gleichung suchen, welcher die Grösse s_2 Genüge leistet.

Dieselbe erhalten wir, indem wir die linken und rechten Seiten der Gleichungen (5) und (6) addiren. Nach einigen Rechnungen erhalten wir die folgende Gleichung:

$$p_0 \cdot s_2^2 + p_1 \cdot s_2 + p_2 = 0 , \tag{15}$$

wenn wir setzen:

$$p_0 = 4k^4 \cdot \mathrm{sn}^4\alpha ,$$

$$p_1 = p_1' - \frac{p_0 \cdot s_1^2}{4} ,$$

$$p_2 = -\frac{p_1' \cdot s_1^2}{4} + 2u^2 \cdot \mathrm{sn}^2\alpha\,(2 - k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\alpha \cdot s_1) ,$$

$$p_1' = -4k^2 \cdot \mathrm{sn}^4\alpha\,(1 - (1 + k^2)\,s_1 + k^2 \cdot s_1^2)$$
$$- 4k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\alpha\,(c_1 \cdot \mathrm{sn}^2\alpha - c_2 \cdot \mathrm{cn}\alpha \cdot \mathrm{dn}\alpha)\,u .$$

Somit erhalten wir zwei Werthepaare s_1 und s_2. Das zu einem jeden derselben gehörende Werthepaar $\mathrm{sn}^2\omega_1$ und $\mathrm{sn}^2\omega_2$ können wir aus der quadratischen Gleichung berechnen:

$$x^2 - s_1 \cdot x + s_2 = 0 ,$$

so dass wir unser Problem auf die Auflösung einiger einfachen quadratischen Gleichungen reducirt haben.

Wir erhalten somit als Resultat der letzten Untersuchungen den

Lehrsatz. *Als erster Typus der in Frage stehenden Differentialgleichungen ergiebt sich die Gleichung:*

$$\frac{d^2\varphi(v)}{dw^2} + (c_1 + k^2 \cdot \mathrm{sn}\,\alpha \cdot \mathrm{sn}\,w \cdot \mathrm{sn}\,(w+\alpha)) \frac{d\varphi(v)}{dw}$$
$$= \varphi(v)\,(c_3 + c_4 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}\,w \cdot \mathrm{sn}(w+\alpha) + 4 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^2 w)\ ,$$

wobei gesetzt ist:

$$c_3 = 2c_1^2 - 6c_1 \cdot \frac{\mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha}{\mathrm{sn}\,\alpha} + 4 \cdot k^2 \mathrm{sn}^2\alpha - 4(1+k^2)\ ,$$

$$c_4 = -2c_1 \cdot \mathrm{sn}\,\alpha + 2 \cdot \mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha\ .$$

Die beiden Integrale derselben lassen sich durch Auflösung einiger einfachen vorhin entwickelten quadratischen Gleichungen wirklich berechnen.

Wir nehmen jetzt den ersten der ausgeschlossenen Fälle. In demselben war $c_5 = 0$.

Es folgt dann aus den Gleichungen, denen die Coefficienten der Differentialgleichung Genüge leisten müssen, dass die Relationen bestehen müssen:

(16) $$c_2 = 3\,\mathrm{sn}\,\alpha\ ,$$

(17) $$c_3 = -2c_1 \cdot \frac{\mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha}{\mathrm{sn}\,\alpha} + 6k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\alpha - 4(1+k^2)\ ,$$

(18) $$c_4 = -2c_1 \cdot \mathrm{sn}\,\alpha + 6 \cdot \mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha\ ,$$

so dass auch in diesem Falle nur der Coefficient c_1 willkührlich bleibt. Die Gleichungen, denen die Grössen $\mathrm{sn}^2\omega_1$ und $\mathrm{sn}^2\omega_2$ Genüge leisten, wären nun unmittelbar hinzuschreiben, wenn es uns gelänge, die zu ihnen gehörenden Werthepaare s_1 und s_2 zu bestimmen. Es ist das aber mit Hülfe der vorhin aufgestellten Gleichungen:

$$d^2 \cdot A_1 + 4u \cdot d \cdot B_1 - 4u^2 \cdot \delta_1 = 0\ ,$$
$$d^2 \cdot A_2 + 4u \cdot d \cdot B_2 - 4u^2 \cdot \delta_2 = 0\ ,$$

unmittelbar zu bewerkstelligen, wenn wir noch die Beziehung hinzunehmen:

$$u \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\alpha = 2c_1 + \frac{k^2 \cdot c_4}{2}\,\mathrm{sn}\,\alpha \cdot s_1\ .$$

In der That, subtrahiren wir die beiden Gleichungen von einander, so ergiebt sich nach Fortlassung des Factors d die Gleichung:

(19) $$d^2(r - 9\,\mathrm{sn}^2\alpha \cdot k^4 \cdot s_1) + 8u^2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\alpha = 0\ ,$$

Digitized by Google

wenn wir der Einfachheit halber setzen:

$$r = 9k^4 \cdot \mathrm{sn}^4\alpha - 6c_1 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}\,\alpha \cdot \mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha + c_1^2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\alpha \ .$$

Durch Addition erhalten wir zweitens die Gleichung:

$$(20)\quad d^2 - 2 \cdot c_1^2 + r \cdot s_1 - 9 \cdot \mathrm{sn}^2\alpha \cdot k^4 \cdot s_1^2 + 18 \cdot \mathrm{sn}^2\alpha \cdot k^4 \cdot s_2 + 2 \cdot u \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}\,\alpha \cdot c_4] - 4u^2(2 - k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\alpha \cdot s_1) = 0 \ .$$

Eliminiren wir aus diesen beiden Gleichungen die Grösse u^2 und sehen von dem Factor d^2 ab, so erhalten wir die Relationen:

$$(21)\qquad -k^4 \cdot \mathrm{sn}^2\alpha(s_1^2 - 4s_2) = r_0 \cdot s_1 + r_1 \ ,$$

$$r_0 = c_1^2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\alpha - 6c_1 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}\,\alpha \cdot \mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha + k^2(6 - 8(1+k^2)\mathrm{sn}^2\alpha + 9k^2 \cdot \mathrm{sn}^4\alpha) \ ,$$

$$r_1 = -2c_1^2 + 4c_1 \cdot \frac{\mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha}{\mathrm{sn}\,\alpha} + 2k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\alpha \ .$$

Es wird durch diese Gleichung s_2 in eindeutiger Weise bestimmt, sobald s_1 gegeben ist. Da aber die Gleichung besteht:

$$d^2 = s_1^2 - 4s_2 \ ,$$

so folgt zu gleicher Zeit, dass d^2 eine lineare ganze Function von s_1 ist. Setzen wir diesen Werth von d^2 in Gleichung 19 ein und erwägen, dass die Relation besteht

$$u^2 \cdot k^4 \cdot \mathrm{sn}^4\alpha = 4c_1^2 + 2c_1 \cdot c_4 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}\,\alpha \cdot s_1 + \frac{k^4 \cdot c_4^2}{4} \cdot \mathrm{sn}^2\alpha \cdot s_1^2 \ ,$$

so geht unsere Gleichung in eine quadratische Gleichung mit der Unbekannten s_1 über. Damit ist wieder Alles gemacht und wir finden, dass die gestellte Aufgabe wieder auf die Auflösung einiger einfacher quadratischer Gleichungen reducirt werden kann.

Wir erhalten also den:

Lehrsatz. *Als zweiter Typus der in Frage stehenden Differentialgleichungen ergiebt sich die Gleichung:*

$$\frac{d^2\varphi(v)}{dw^2} + (c_1 + 3k^2 \cdot \mathrm{sn}\,\alpha \cdot \mathrm{sn}\,w \cdot \mathrm{sn}(w+\alpha))\frac{d\varphi(v)}{dw} = \varphi(v)\,(c_3 + c_4 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}\,w \cdot \mathrm{sn}(w+\alpha)) \ ,$$

Digitized by Google

wobei gesetzt ist:

$$c_3 = -2 \cdot c_1 \cdot \frac{\operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha} + 6 \cdot k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha - 4(1+k^2) \ ,$$

$$c_4 = -2 \cdot c_1 \cdot \operatorname{sn}\alpha + 6 \cdot \operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha \ .$$

Die beiden Integrale derselben lassen sich durch Auflösung einiger einfachen vorhin entwickelten quadratischen Gleichungen wirklich bestimmen.

Zweitens war der Fall ausgeschlossen, dass u unbestimmt, d. h. $c_2 = 2\operatorname{sn}\alpha$ ist. In diesem Falle bleibt dann wiederum der Coefficient c_1 willkürlich, während die andern die folgende Form annehmen:

(22) $$c_2 = 2 \cdot \operatorname{sn}\alpha \ ,$$

(23) $$c_3 = 2 \ ,$$

(24) $$c_4 = -2 \cdot c_1 \cdot \operatorname{sn}\alpha + 4 \cdot \operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha \ ,$$

(25) $$c_3 = -\frac{2c_1}{\operatorname{sn}\alpha}\left(\operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha + \frac{2}{c_4}\right) + 4k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha - 4(1+k^2) \ ,$$

und s_1 aus der Gleichung bestimmt ist:

(26) $$k^2 \cdot \operatorname{sn}\alpha \cdot c_4 \cdot s_1 = -4 \cdot c_1 \ .$$

Das ganze Problem wäre somit gelöst, wenn es uns gelänge, für s_2 eine quadratische Gleichung zu finden. Dazu gehen wir zu den Gleichungen zurück:

$$d^2 \cdot A_1 + 4u \cdot d \cdot B_1 - 4u^2 \cdot \delta_1 = 0 \ ,$$

$$d^2 \cdot A_2 + 4u \cdot d \cdot B_2 - 4u^2 \cdot \delta_2 = 0 \ .$$

Durch Subtraction erhalten wir die Gleichung:

(27) $$d^2[r - 4\operatorname{sn}^2\alpha \cdot k^4 \cdot s_1] + 4u^2 \cdot k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha = 0 \ ,$$

wenn wir jetzt unter r die Grösse verstehen:

$$r = 4 \cdot k^4 \cdot \operatorname{sn}^4\alpha - 4 \cdot c_1 \cdot k^2 \cdot \operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha + c_1^2 \cdot k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha \ .$$

Ganz analog erhalten wir durch Addition:

(28) $$d^2[-2c_1^2 + r \cdot s_1 - 4 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha \cdot k^4(s_1^2 - 2s_2) + 2k^2 \cdot u \cdot c_4 \cdot \operatorname{sn}\alpha] - 4u^2(2 - k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha \cdot s_1) = 0 \ .$$

Eliminiren wir aus diesen beiden Gleichungen die Grösse u^2, so erhalten wir für u die Darstellung:

$$(29) \qquad 2 \cdot k^4 \cdot u \cdot c_4 \cdot \mathrm{sn}^3 \alpha$$
$$= 2 \cdot c_1^2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^2 \alpha + 2 (4 \cdot \mathrm{sn}^2 \alpha \cdot k^4 \cdot s_1 - r) - 8 \cdot \mathrm{sn}^4 \alpha \cdot k^6 \cdot s_2 \ .$$

Setzen wir diesen Werth in Gleichung (27) ein, so erhalten wir die gesuchte quadratische Gleichung mit der Unbekannten s_2. Somit finden wir den

Lehrsatz. *Als dritter Typus der in Frage stehenden Differentialgleichungen ergiebt sich die Gleichung:*

$$\frac{d^2 \varphi(v)}{dw^2} + (c_1 + 2k^2 \cdot \mathrm{sn}\,\alpha \cdot \mathrm{sn}\,w \cdot \mathrm{sn}(w+\alpha)) \frac{d\varphi(v)}{dw}$$
$$= \varphi(v) (c_3 + c_4 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}\,w \cdot \mathrm{sn}(w+\alpha) + 2k^2 \cdot \mathrm{sn}^2 w) \ ,$$

wobei gesetzt ist:

$$c_3 = -\frac{2c_4}{\mathrm{sn}\,\alpha} \left(\mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha + \frac{2}{c_4}\right) + 4k^2 \cdot \mathrm{sn}^2 \alpha - 4(1+k^2) \ .$$
$$c_4 = -2c_1 \cdot \mathrm{sn}\,\alpha + 4\,\mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha \ ,$$

Die beiden Integrale derselben lassen sich durch Auflösung einiger einfachen vorhin entwickelten quadratischen Gleichungen wirklich berechnen.

§ 3.

Fortsetzung der Untersuchungen des vorigen Paragraphen. Specielle Betrachtungen.

Die Betrachtungen, die zu den Resultaten des vorigen Paragraphen führten, beruhten auf einigen Annahmen, die wir jetzt fallen lassen wollen. Wir wollen zusehen, ob wir dann noch zu weiteren Gleichungen gelangen können. Hierbei wollen wir aber α allgemein lassen und *Gleichungen, die nur für specielle Werthe von α Gültigkeit besitzen*, von der Betrachtung ausschliessen. Es kann das um so eher geschehen, als diese Gleichungen schon durch frühere Arbeiten im Wesentlichen als erledigt angesehen werden können.

Wir hatten nun bei der Herleitung des ersten Falles angenommen, dass sich zwei Werthe $\mathrm{sn}^2 \omega_1$ und $\mathrm{sn}^2 \omega_2$ ergeben

Digitized by Google

müssen, die dann die beiden Integrale liefern. Wir lassen diese Annahme jetzt fallen und fragen ganz allgemein, zu welchen Differentialgleichungen gelangen wir, wenn wir annehmen, dass sich nur *ein* Werth für $\mathrm{sn}^2\omega_1$ und *ein* Werth für $\mathrm{sn}^2\omega_2$ ergiebt, wobei aber die Annahme bestehen bleibt, dass die *beiden* Integrale die früher angegebene Form besitzen. Diese beiden Werthe können wir als von einander verschieden annehmen, denn wären sie einander gleich, so würde $d = 0$ sein; also wie aus den Gleichungen:

$$\delta_1 \cdot c_1 + c_2 \cdot k^2[\mathrm{sn}^2\omega_1 \cdot \mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha - \mathrm{sn}\,\alpha \cdot u_1] = \quad 2u\frac{\delta_1}{d},$$

$$\delta_2 \cdot c_1 + c_2 \cdot k^2[\mathrm{sn}^2\omega_2 \cdot \mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha - \mathrm{sn}\,\alpha \cdot u_2] = -2u\frac{\delta_2}{d}$$

folgt, müssten die Grössen $u \cdot \delta_1$ und $u \cdot \delta_2$ der Null gleich sein. Den Fall, dass $\delta_1 = \delta_2 = 0$, wollen wir einstweilen ausser Betracht lassen; es würde also folgen

$$u = 0 .$$

Diese Gleichung sagt aber aus, dass $\omega_1 = -\omega_2$ sein müsste, dass wir also thatsächlich nur *ein* Integral der verlangten Form erhielten. Den Grenzfall, dass $u_1 = u_2 = 0$ ist, können wir füglich fortlassen.

Wenn aber $\mathrm{sn}^2\omega_1$ und $\mathrm{sn}^2\omega_2$ von einander verschieden sind, so sind vier Fälle möglich. Die zu ihnen gehörenden Werthe der Argumente können die Form haben:

$$\begin{array}{rr} \omega_1, & \omega_2 \\ -\omega_1, & -\omega_2, \\ \omega_1, & -\omega_2 \\ -\omega_1, & \omega_2 . \end{array}$$

Wir wollen nun erstens untersuchen, ob es möglich ist, dass die Argumente die beiden Formen haben

$$\begin{array}{rr} \omega_1, & \omega_2 \\ -\omega_1, & -\omega_2 . \end{array}$$

Das ist nun offenbar im Allgemeinen nicht möglich. Es müssten nämlich die Gleichungen bestehen:

Digitized by Google

$$c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}\,\alpha \cdot u_1 = \delta_1 \cdot c_1 + c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\omega_1 \cdot \mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha - 2u \cdot \frac{\delta_1}{d},$$

$$-c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}\,\alpha \cdot u_1 = \delta_1 \cdot c_1 + c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\omega_1 \cdot \mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha + 2u \cdot \frac{\delta_1}{d}.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$(1) \qquad \delta_1 \cdot c_1 + c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\omega_1 \cdot \mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha = 0 .$$

Genau so würde folgen:

$$(2) \qquad \delta_2 \cdot c_1 + c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\omega_2 \cdot \mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha = 0 .$$

Diese beiden Gleichungen können aber im Allgemeinen, d. h. für allgemeine Werthe von α nicht zusammen bestehen, da $\mathrm{sn}^2\omega_1$ und $\mathrm{sn}^2\omega_2$ n. A. von einander verschieden sein sollen, ausser es wäre $c_1 = c_2 = c_4 = 0$, was nichts Neues ergiebt. Es ist dieser Fall also auszuschliessen.

Jetzt fragen wir zweitens, können die Werthepaare ω_1, ω_2, die zu den beiden Integralen gehören, die Form haben:

$$\begin{matrix} \omega_1 , & \omega_2 \\ -\omega_1 , & \omega_2 . \end{matrix}$$

In diesem Falle müssen die vier Gleichungen zusammen bestehen:

$$(3) \quad \begin{cases} c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}\,\alpha \cdot u_1 = \delta_1 \cdot c_1 + c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\omega_1 \cdot \mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha - 2u_1 \cdot \frac{\delta_1}{d} - 2u_2 \cdot \frac{\delta_1}{d}, \\ -c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}\,\alpha \cdot u_1 = \delta_1 \cdot c_1 + c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\omega_1 \cdot \mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha + 2u_1 \cdot \frac{\delta_1}{d} - 2u_2 \cdot \frac{\delta_1}{d}, \\ c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}\,\alpha \cdot u_2 = \delta_2 \cdot c_1 + c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\omega_2 \cdot \mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha + 2u_1 \cdot \frac{\delta_2}{d} + 2u_2 \cdot \frac{\delta_2}{d}, \\ c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}\,\alpha \cdot u_2 = \delta_2 \cdot c_1 + c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\omega_2 \cdot \mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha - 2u_1 \cdot \frac{\delta_2}{d} + 2u_2 \cdot \frac{\delta_2}{d}. \end{cases}$$

Aus diesen vier Gleichungen ergeben sich durch Addition resp. Subtraction die vier weiteren:

$$(4) \qquad \delta_1 \cdot c_1 + c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\omega_1 \cdot \mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha - 2u_2 \cdot \frac{\delta_1}{d} = 0 ,$$

$$(5) \qquad c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}\,\alpha \cdot u_1 + 2u_1 \cdot \frac{\delta_1}{d} = 0 ,$$

Digitized by Google

$$(6)\quad c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}\,\alpha \cdot u_2 - \delta_2 \cdot c_1 - c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\omega_2 \cdot \mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha - 2u_2 \cdot \frac{\delta_2}{d} = 0\,,$$

$$(7)\quad 2u_1 \cdot \frac{\delta_2}{d} = 0\,.$$

Nun können wir den Fall $u_1 = 0$ sofort ausschliessen, da sich in ihm nur *ein* Integral der Differentialgleichung in der verlangten Form ergeben würde, es folgt also:

$$\delta_2 = 0\,.$$

Schliessen wir wieder den Fall aus, dass auch $\delta_1 = 0$ ist, so folgt aus Gleichung (5):

$$c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}\,\alpha + \frac{\delta_1}{d} = 0\,,$$

dass c_2 von Null verschieden sein muss. Dann aber folgt aus Gleichung (6):

$$c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}\,\alpha \cdot u_2 - c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\omega_2 \cdot \mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha = 0\,,$$

dass die Relation bestehen müsste:

$$(8)\quad \mathrm{sn}\,\alpha \cdot u_2 = \mathrm{sn}^2\omega_2 \cdot \mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha\,,$$

und das ist für den gefundenen Werth von $\mathrm{sn}^2\omega_2$ im Allgemeinen nicht möglich.

Bei den letzten Betrachtungen ist die Annahme ausgeschlossen worden, dass $\delta_1 = \delta_2 = 0$ ist. Es braucht wohl kaum hervorgehoben zu werden, dass sich auch in diesem Falle keine befriedigenden Resultate ergeben hätten.

Somit kommen wir zu dem Resultat, *dass wir berechtigt waren, den Fall auszuschliessen, dass sich nur je ein Werth für* $\mathrm{sn}^2\omega_1$ *und* $\mathrm{sn}^2\omega_2$ *ergiebt*, da sich in demselben bei beliebigem Werthe von α keine entsprechenden Differentialgleichungen der verlangten Art ergeben.

Zweitens hatten wir aber bei der Betrachtung des ersten Falles die Annahme ausgeschlossen, dass

$$u = 0$$

ist. Wir wollen jetzt diesen ausgeschlossenen Fall in Betracht ziehen und untersuchen, wie die dazu gehörenden Differentialgleichungen beschaffen sein müssen, wenn ganz allgemein $u = 0$ angenommen wird.

u ist im Allgemeinen, wenn nicht gerade $c_2 = 2\,\mathrm{sn}\,\alpha$ ist, und hiervon können wir absehen, eine eindeutige Function der Coefficienten. Ist u also für ein Werthesystem ω_1, ω_2 der Null gleich, so muss dasselbe auch für das Werthesystem des zweiten Integrales der Null gleich sein. Wir wollen die beiden Werthesysteme, die zu den Integralen gehören, durch ω_1, ω_2 und ω_1', ω_2' bezeichnen, dann liegen drei Möglichkeiten vor. Erstens können die Gleichungen bestehen:

$$(9) \qquad \begin{cases} \mathrm{sn}^2\omega_1 = \mathrm{sn}^2\omega_2 \ , \\ \mathrm{sn}^2\omega_1' = \mathrm{sn}^2\omega_2' \ . \end{cases}$$

Zweitens können $\mathrm{sn}^2\omega_1$ und $\mathrm{sn}^2\omega_1'$ verschieden sein von den Werthen $\mathrm{sn}^2\omega_2$ und $\mathrm{sn}^2\omega_2'$; drittens endlich ist es möglich, dass $\mathrm{sn}^2\omega_1 = \mathrm{sn}^2\omega_2$, während $\mathrm{sn}^2\omega_1'$ verschieden von $\mathrm{sn}^2\omega_2'$ ist.

Die beiden ersten Fälle lassen sich sofort erledigen. In der That, im ersten Falle würde folgen:

$$(10) \qquad \begin{cases} \omega_1 = -\omega_2 \ , \\ \omega_1' = -\omega_2' \ . \end{cases}$$

Dann aber ergiebt sich aus den so oft gebrauchten Fundamentalgleichungen, dass die Relationen bestehen müssten:

$$\delta_1 c_1 + c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\omega_1 \cdot \mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha = 0 \ ,$$
$$\delta_1 c_1 + c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\omega_1' \cdot \mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha = 0 \ .$$

Nun sind wir aber vermöge der früheren Betrachtungen berechtigt anzunehmen, dass $\mathrm{sn}^2\omega_1$ und $\mathrm{sn}^2\omega_1'$ von einander verschieden sind. Dann aber lehren die beiden soeben entwickelten Gleichungen, dass sich keine neuen allgemeinen Differentialgleichungen unter der gemachten Annahme ergeben.

Sind aber die Grössen $\mathrm{sn}^2\omega_1$ und $\mathrm{sn}^2\omega_1'$ verschieden von den resp. Grössen $\mathrm{sn}^2\omega_2$ und $\mathrm{sn}^2\omega_2'$, so lehren die früher aufgestellten Beziehungen, dass

$$A_1 = 0 \ , \quad A_2 = 0$$

sein müsste, d. h. wir würden nur *ein* Werthesystem $\mathrm{sn}^2\omega_1$, $\mathrm{sn}^2\omega_2$ erhalten. Damit aber sind wir zu den ersten Betrachtungen dieses Paragraphen zurückgekehrt und können von der gemachten Annahme absehen.

Drittens möge nun sein:

$$\mathrm{sn}^2 \alpha_1 = \mathrm{sn}^2 \omega_2 \ ,$$

während $\mathrm{sn}^2 \omega_1'$ verschieden ist von $\mathrm{sn}^2 \omega_2'$. In diesem Falle wird:

$$(11) \quad \frac{u_1 + u_2}{\mathrm{sn}^2 \omega_1 - \mathrm{sn}^2 \omega_2} = \frac{1 - 2(1+k^2)\,\mathrm{sn}^2 \omega_1 + 3k^2 \cdot \mathrm{sn}^4 \omega_1}{\mathrm{sn}\,\omega_1 \cdot \mathrm{cn}\,\omega_1 \cdot \mathrm{dn}\,\omega_1} \ .$$

In Folge dessen ergeben sich die Gleichungen:

$$c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}\,\alpha \cdot u_1 = \delta_1 \cdot c_1 + c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^2 \omega_1 \cdot \mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha - \delta_1 \cdot \frac{1 - 2(1+k^2)\,\mathrm{sn}^2 \omega_1 + 3k^2 \cdot \mathrm{sn}^4 \omega_1}{u_1} \ ,$$

$$-c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}\,\alpha \cdot u_1 = \delta_1 \cdot c_1 + c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^2 \omega_1 \cdot \mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha + \delta_1 \cdot \frac{1 - 2(1+k^2\ \mathrm{sn}^2 \omega_1 + 3k^2 \cdot \mathrm{sn}^4 \omega_1}{u_1} \ ,$$

oder also:

$$(12) \qquad \delta_1 \cdot c_1 + c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^2 \omega_1 \cdot \mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha = 0 \ ,$$

$$(13) \quad c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}\,\alpha \cdot u_1^2 + \delta_1 \cdot (1 - 2(1+k^2)\,\mathrm{sn}^2 \omega_1 + 3k^2 \cdot \mathrm{sn}^4 \omega_1) = 0 \ .$$

Diese beiden Gleichungen können wir auch in die Form bringen:

$$(14) \qquad 2c_1 - (c_1 \cdot \mathrm{sn}^2 \alpha - c_2 \cdot \mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha)\, k^2 \cdot s_1 = 0 \ ,$$

$$(15) \quad 4\left(c_1 - \frac{\mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha}{\mathrm{sn}\,\alpha}\right) - 2s_1(1+k^2)\left(c_1 - 2 \cdot \frac{\mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha}{\mathrm{sn}\,\alpha}\right) + k^2 \cdot s_1^2 \left(c_1 - 3 \cdot \frac{\mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha}{\mathrm{sn}\,\alpha}\right) = 0 \ .$$

Mit $\mathrm{sn}^2 \omega_1'$ und $\mathrm{sn}^2 \omega_2'$ können wir nach den bekannten Regeln verfahren. Dann ergeben sich ohne weitere Schwierigkeiten die Relationen:

$$(16) \quad s_1 \cdot c_2^2 \cdot k^4 = c_2^2 \cdot k^4 \cdot \mathrm{sn}^2 \alpha + c_1^2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^2 \alpha - 2c_1 \cdot c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha \ ,$$

$$(17) \quad c_2^2 \cdot k^4 \cdot s_2 = c_1^2 \ .$$

Aus den beiden linearen Gleichungen mit der Unbekannten s_1 ergiebt sich durch Elimination von s_1 die Gleichung:

$$(18)\qquad \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^3 \mathrm{sn}^2\alpha - 3\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 \cdot \mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha$$

$$+\left(\frac{c_1}{c_2}\right)(3k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\alpha - 2(1+k^2)) - k^2 \cdot \mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha = 0 \ .$$

Setzen wir ferner den Werth von s_1 in die quadratische Gleichung mit der Unbekannten s_1 ein, so ergiebt sich die Relation:

$$(19)\qquad c_1^3 \cdot \mathrm{sn}\,\alpha \cdot \mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha + c_1^2 \cdot b_1$$

$$+ c_1 \cdot c_2 \cdot \mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha \cdot b_2 - k^2 \cdot c_2^2 \cdot \mathrm{cn}^2\alpha \cdot \mathrm{dn}^2\alpha = 0 \ ,$$

$$b_1 = -k^2 \cdot \mathrm{sn}^3\alpha(2c_2 + \mathrm{sn}\,\alpha) + (1+k^2)(c_2 + 2\,\mathrm{sn}\,\alpha)\,\mathrm{sn}\,\alpha - 3 \ ,$$

$$b_2 = k^2 \cdot \mathrm{sn}\,\alpha(c_2 + 2\,\mathrm{sn}\,\alpha) - 2(1+k^2) \ .$$

Die beiden letzten Gleichungen lehren, dass es *drei* Werthepaare c_1, c_2 giebt, die den gestellten Anforderungen Genüge leisten. In diesen drei Werthepaaren ist aber $c_2 = \mathrm{sn}\,\alpha$ zu setzen, denn für diesen speciellen Fall fallen die beiden Gleichungen zusammen. Dann haben wir einen der früher behandelten Fälle vor uns, nur nicht in seiner Allgemeinheit, da c_1 specielle Werthe annimmt. Jedenfalls hat sich keine neue Kategorie brauchbarer Differentialgleichungen ergeben, *so dass wir berechtigt waren, den Fall* $u = 0$ *auszuschliessen.*

Völlig erledigt sind auch hiermit die speciellen Untersuchungen noch nicht, insbesondere müssten die speciellen Fälle, in denen entweder $\delta_1 = 0$ oder $\delta_2 = 0$, oder $d = 0$ ist, einer besonderen Discussion unterzogen werden, indessen glaubt der Verfasser hiervon absehen zu können, das die Untersuchung ähnlich wie in den zuletzt behandelten Fällen angestellt werden kann.

§ 4.

Untersuchung des Falles, in welchem die beiden Werthe von λ von einander verschieden sind.

In diesem zweiten jetzt zu betrachtenden Falle sind wir berechtigt, ohne der Allgemeinheit der Untersuchungen Abbruch zu thun, anzunehmen, dass $c_1 = 0$ sei.

Dann werden die Fundamentalgleichungen, aus denen alle Schlüsse zu ziehen sind, die folgende Form annehmen:

Digitized by Google

$$(1) \qquad 6 - \frac{2c_2}{\operatorname{sn}\alpha} = c_5 \ ,$$

$$(2) \qquad 2c_2 \cdot \frac{\operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}^2\alpha} = \frac{c_4}{\operatorname{sn}\alpha} + \lambda\left(4 - \frac{c_2}{\operatorname{sn}\alpha}\right) \ ,$$

$$(3) \quad c_5 \cdot \frac{k^2}{2} \cdot s_1 = -2c_2 \cdot k^2 \cdot \operatorname{sn}\alpha + c_3 + 4(1+k^2) - \lambda^2 + 4\lambda \cdot \frac{\operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha} \ ,$$

$$(4) \qquad 2\lambda + c_2 \cdot k^2 \cdot \operatorname{sn}\omega_1 \cdot \operatorname{sn}(\omega_1 - \alpha) = \frac{2 \cdot u}{d} \ ,$$

$$(5) \qquad 2\lambda + c_2 \cdot k^2 \cdot \operatorname{sn}\omega_2 \cdot \operatorname{sn}(\omega_2 - \alpha) = -\frac{2 \cdot u}{d} \ .$$

Aus der zweiten dieser Gleichungen folgt aber, dass $c_2 = 4 \cdot \operatorname{sn}\alpha$ sein muss, denn wäre dasselbe nicht der Fall, so erhielten wir nur einen Werth von λ und das ist gegen die Annahme. Dann aber zeigen Betrachtungen einfachster Art die Richtigkeit der Gleichungen:

$$(6) \qquad c_2 = 4 \cdot \operatorname{sn}\alpha \ ,$$

$$(7) \qquad c_4 = 8 \cdot \operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha \ ,$$

$$(8) \qquad c_5 = -2 \ ,$$

$$(9) \quad k^2 \cdot s_1 = \left(\lambda - \frac{2\operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha}\right)^2 - c_3 - \frac{4}{\operatorname{sn}^2\alpha} + 4 \cdot k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha \ ,$$

$$(10) \quad 2k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha \cdot u_1 = \lambda \cdot \delta_1 + 2k^2 \cdot \operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha \cdot \operatorname{sn}^2\omega_1 - u \cdot \frac{\delta_1}{d} \ ,$$

$$(11) \quad 2k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha \cdot u_2 = \lambda \cdot \delta_2 + 2k^2 \cdot \operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha \cdot \operatorname{sn}^2\omega_2 + u \cdot \frac{\delta_2}{d} \ ,$$

$$(12) \quad u \cdot k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha = 2\lambda - k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\alpha \cdot s_1 \left(\lambda - \frac{2\operatorname{cn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha}\right) .$$

Die vierte Gleichung drückt s_1 rational durch λ aus, wobei zu erwägen ist, dass c_3 willkürlich bleibt. Wir wollen versuchen, zunächst s_2 rational durch λ auszudrücken.

Dazu quadriren wir die rechten und linken Seiten der Gleichungen, die wir soeben gefunden und mit den Nr. 10 und 11 bezeichnet haben.

Wir erhalten:

$$(13) \qquad d^2 \cdot A_\varepsilon \pm 2u \cdot d \cdot B_\varepsilon - u^2 \delta_\varepsilon = 0 \ ,$$

Digitized by Google

$$A_\varepsilon = -\lambda^2 + \mathrm{sn}^2\omega_\varepsilon(4k^4\cdot\mathrm{sn}^4\alpha + \lambda^2\cdot k^2\cdot\mathrm{sn}^2\alpha - 4\lambda\cdot k^2\cdot\mathrm{sn}\alpha\cdot\mathrm{cn}\alpha\cdot\mathrm{dn}\alpha)$$
$$- 4k^4\cdot\mathrm{sn}^2\alpha\cdot\mathrm{sn}^4\omega_\varepsilon \ ,$$

$$B_\varepsilon = \lambda - \mathrm{sn}^2\omega_\varepsilon\cdot k^2(\lambda\cdot\mathrm{sn}^2\alpha - 2\cdot\mathrm{sn}\alpha\cdot\mathrm{cn}\alpha\cdot\mathrm{dn}\alpha) \ , \quad \varepsilon = 1, 2 \ .$$

Durch Subtraction ergiebt sich die Gleichung:

$$(14) \qquad d^2\cdot r + 3u^2\cdot k^2\cdot\mathrm{sn}^2\alpha = 0 \ ,$$

wobei gesetzt ist:

$$r = 4k^4\cdot\mathrm{sn}^4\alpha + \lambda^2\cdot k^2\cdot\mathrm{sn}^2\alpha - 4\lambda\cdot k^2\cdot\mathrm{sn}\alpha\cdot\mathrm{cn}\alpha\cdot\mathrm{dn}\alpha - 4k^4\cdot\mathrm{sn}^2\alpha\cdot s_1 \ .$$

Durch Addition ergiebt sich:

$$(15) \qquad d^2[-2\lambda^2 + rs_1 + 8\cdot k^4\,\mathrm{sn}^2\alpha\cdot s_2]$$
$$-2u\cdot d^2\cdot k^2(\lambda^2\cdot\mathrm{sn}^2\alpha - 2\,\mathrm{sn}\alpha\cdot\mathrm{cn}\alpha\cdot\mathrm{dn}\alpha) - u^2(2 - k^2\cdot\mathrm{sn}^2\alpha\cdot s_1) = 0.$$

Die Elimination von u^2 aus diesen beiden Gleichungen ergiebt zunächst die Relation:

$$12\cdot k^6\cdot\mathrm{sn}^4\alpha\cdot s_2 = 3u\cdot k^4\cdot\mathrm{sn}^2\alpha(\lambda\,\mathrm{sn}^2\alpha - 2\,\mathrm{sn}\alpha\cdot\mathrm{cn}\alpha\cdot\mathrm{dn}\alpha)$$
$$+ 3\lambda^2\cdot k^2\cdot\mathrm{sn}^2\alpha - r(1 + k^2\cdot\mathrm{sn}^2\alpha\cdot s_1)$$

oder nach einigen Rechnungen:

$$(16) \qquad 3\cdot k^4\cdot\mathrm{sn}^2\alpha\cdot s_2 = p_1 + p_2\cdot s_1 \ ,$$

$$p_1 = 2c_3 + 6\lambda\cdot\frac{\mathrm{cn}\alpha\cdot\mathrm{dn}\alpha}{\mathrm{sn}\alpha} + 8(1 + k^2) - 17k^2\cdot\mathrm{sn}^2\alpha \ ,$$

$$p_2 = k^2\cdot\mathrm{sn}^2\alpha(-c_3 - (1 + k^2) + 4k^2\cdot\mathrm{sn}^2\alpha) \ .$$

Damit ist auch dieses Problem gelöst. Setzen wir den gefundenen Werth von s_1 ein, so erhalten wir auch s_2 als ganze rationale Function von λ. Somit bleibt jetzt nur noch das Problem, für λ eine quadratische Gleichung aufzustellen.

Durch Quadrirung der rechten und linken Seite der Gleichung (12):

$$u\,.\,k^2\cdot\mathrm{sn}^2\alpha = 2\lambda - k^2\cdot\mathrm{sn}^2\alpha\cdot s_1\left(\lambda - \frac{2\,\mathrm{cn}\alpha\cdot\mathrm{dn}\alpha}{\mathrm{sn}\alpha}\right)$$

erhalten wir nach einigen Rechnungen:

Digitized by Google

$$(17)\quad u^2\cdot k^2\cdot \mathrm{sn}^2\alpha = \frac{4\lambda^2}{k^2\cdot \mathrm{sn}^2\alpha} - 4s_1\cdot c + s_1^2\cdot k^2\cdot \mathrm{sn}^2\alpha\cdot c' + s_1^3\cdot k^4\cdot \mathrm{sn}^2\alpha,$$

$$c = c_3 + 2\lambda\cdot\frac{\mathrm{cn}\,\alpha\cdot\mathrm{dn}\,\alpha}{\mathrm{sn}\,\alpha} + 4(1+k^2) - 8k^2\cdot\mathrm{sn}^2\alpha,$$

$$c' = c_3 - 4k^2\cdot\mathrm{sn}^2\alpha\ .$$

Ferner können wir r in die Form bringen:

$$r = k^2\cdot\mathrm{sn}^2\alpha(c_3 + 4(1+k^2) - 4k^2\cdot\mathrm{sn}^2\alpha - 3k^2\cdot s_1)\ .$$

Diese Werthe setzen wir in die Gleichung (14):

$$d^2\cdot r + 3u^2\cdot k^2\cdot\mathrm{sn}^2\alpha = 0$$

ein, indem wir erwägen, dass:

$$d^2 = s_1^2 - 4s_2$$

ist. Dann ergiebt sich die Gleichung:

$$(18)\quad s_2\cdot k^4\cdot\mathrm{sn}^4\alpha(c_3 + 4(1+k^2) - 4\cdot k^2\cdot\mathrm{sn}^2\alpha)$$
$$+ s_1\cdot k^2\cdot\mathrm{sn}^2\alpha(c_3 + 4(1+k^2) - 7k^2\cdot\mathrm{sn}^2\alpha) - 3\lambda^2 = 0\ .$$

Das ist aber die gesuchte quadratische Gleichung mit der Unbekannten λ, da s_1 und s_2 ganze rationale Funtionen 2ter Ordnung von λ sind, die wir soeben bestimmt haben.

Somit erhalten wir den

Lehrsatz. *Als vierter Typus der in Frage stehenden Differentialgleichungen ergiebt sich die Gleichung:*

$$\frac{d^2\varphi(v)}{dw^2} + 4k^2\cdot\mathrm{sn}\,\alpha\cdot\mathrm{sn}\,w\cdot\mathrm{sn}\,(w+\alpha)\frac{d\varphi(v)}{dw}$$
$$= \varphi(v)(c_3 + 8k^2\cdot\mathrm{cn}\,\alpha\cdot\mathrm{dn}\,\alpha\cdot\mathrm{sn}\,w\cdot\mathrm{sn}(w+\alpha) - 2k^2\cdot\mathrm{sn}^2 w)\ ,$$

wobei c_3 eine willkürliche Constante bedeutet. Die beiden Integrale können mit Hülfe einiger einfachen, vorhin entwickelten quadratischen Gleichungen bestimmt werden.

Hiermit haben wir das in der Einleitung fixirte Problem vollkommen gelöst.

Digitized by Google

SITZUNG VOM 4. DECEMBER 1890.

Sophus Lie, *Neuer Beweis des zweiten Fundamentalsatzes in der Theorie der Transformationsgruppen.*

Der Satz, dass r von einander unabhängige, infinitesimale Transformationen $X_1 f \ldots X_r f$ dann und nur dann eine r-gliedrige Gruppe erzeugen, wenn alle Xf paarweis Relationen von der Form

$$(X_i X_k) = \sum c_{iks} X_s f$$

erfüllen, in denen die c_{iks} Constanten sind, ist bekanntlich der wichtigste Satz in meiner Theorie der Transformationsgruppen. Leider ist es jedoch schwierig, einen auf einmal kurzen, einfachen und *durchsichtigen* Beweis für diesen grundlegenden Satz zu finden. Da es nun aber für die Verbreitung der Theorie der Transformationsgruppen sehr förderlich sein wird, wenn für diesen Satz eine klare, ich möchte sagen, völlig einleuchtende Begründung gegeben werden kann, so habe ich wiederholt versucht, möglichst einfache Beweise des Satzes zu construiren. Soweit ich es beurtheilen kann, sind meine Bestrebungen nicht ohne Erfolg geblieben.

Ausdrücklich hebe ich hervor, dass ich nicht danach gestrebt habe, diese Theorie in so knapper Form wie möglich darzustellen. Während in den Paragraphen 1 und 2 zusammen eine wesentlich analytische Begründung meines Theorems entwickelt wird, giebt § 3 eine bemerkenswerthe synthetische Beweisführung für dasselbe, die von den Betrachtungen der §§ 1, 2 unabhängig ist. Auch will ich bemerken, dass § 2 nicht die Kenntniss des § 1 voraussetzt. Leser, die nicht daran gewöhnt

Digitized by Google

sind, mit dem Begriff eines n-fach ausgedehnten Raumes zu operiren, wie dies in §§ 1 und 3 geschieht, beschränken sich vielleicht am besten auf § 2 oder fangen jedenfalls am besten mit diesem Paragraphen an. Dagegen dürfte der § 3 solche Leser am meisten befriedigen, welche an synthetische Betrachtungen gewöhnt sind.

Wie bekannt erzeugt eine Schaar von r von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen $X_1 f \dots X_r f$, wo

$$X_k f = \sum_1^n{}_i \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1, 2 \dots r)$$

ist, ∞^r endliche Transformationen. Jede infinitesimale Transformation

$$Af = e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + \cdots + e_r X_r f$$

nämlich, in der $e_1 \dots e_r$ Constanten sind, erzeugt eine *eingliedrige* Gruppe, deren endliche Gleichungen die Form haben:

$$y_i = x_i + Ax_i + \frac{1}{1 \cdot 2} AAx_i + \cdots$$
$$(i = 1, 2 \dots r)$$

oder ausführlich geschrieben:

$$y_i = x_i + \sum_1^r{}_k e_k X_k x_i + \frac{1}{1 \cdot 2} \sum_{k,j}^{1 \dots r} e_k e_j X_k X_j x_i + \cdots$$
$$(i = 1, 2 \cdots n) .$$

Da $e_1, \dots e_r$ willkürlich sind, so stellen diese Gleichungen gerade ∞^r Transformationen dar. Die Frage, welche nachstehend beantwortet werden soll, ist die nach einem nothwendigen und hinreichenden Kriterium dafür, dass sie eine r-gliedrige Gruppe bilden.

Noch eines sei vorausgeschickt: Bezeichnen wir unsere ∞^r Transformationen symbolisch mit T_a respective T_b oder $T_c \dots$ so können wir sagen, dass sie dann und nur dann eine Gruppe bilden, wenn jede Transformation $T_a T_b$ (Reihenfolge von T_a und T_b) selbst eine Transformation T_c ist. Beachten wir, dass sich

Digitized by Google

unter den T auch die identische Transformation befindet und dass demnach die Schar der $T_a T_b$ in jedem Fall die der $T_a \ldots$ umfasst, so können wir die Definition der Gruppe so fassen:

Eine Schar von ∞^r Transformationen $T_a \ldots$ bildet dann und nur dann eine Gruppe, wenn auch alle Transformationen $T_a T_b$ nur von r wesentlichen Parametern abhängen.

Denn alsdann müssen sie sich auf die T selbst, die schon eine Schar von ∞^r Transformationen bilden, reduciren.

Diese Definition zu Grunde zu legen, wird sich in § 3 als zweckmässig erweisen.

§ 1.

Zunächst werden wir einige particulare, aber doch bemermerkenswerthe Resultate ableiten.

Liegen r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen $X_1 f \ldots X_r f$ in n Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$ vor und deutet man die Veränderlichen als Punktcoordinaten in einem n-fach ausgedehnten Raume, so ertheilen die endlichen Transformationen

$$x_k' = x_k + \sum_1^r e_i X_i x_k + \cdots \qquad (k = 1, 2 \ldots n) \tag{1}$$

einem bestimmt gewählten Punkte $(x_1 \ldots x_n)$ unendlich viele Lagen, deren Inbegriff eine continuirliche, etwa ϱ-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit bildet. Wir wollen nun zunächst die Dimensionenzahl ϱ der so erzeugten Mannigfaltigkeit bestimmen.

Man bemerke, dass, wenn zwei infinitesimale Transformationen $X_k f$ und $X_j f$ den Punkt $(x_1 \ldots x_n)$ in Ruhe lassen, dann dasselbe für jede infinitesimale Transformation Const. $X_i f +$ Const. $X_j f$ gilt. Da es unter den vorgelegten infinitesimalen Transformationen $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ im Allgemeinen auch solche geben wird, welche den Punkt $(x_1 \ldots x_n)$ invariant lassen, so können wir also ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, die $X_i f$ seien so gewählt, dass etwa $X_{q+1} f \ldots X_r f$ den betrachteten Punkt $(x_1 \ldots x_n)$ in Ruhe lassen, während dies mit keiner infinitesimalen Transformation $e_1 X_1 f + \cdots + e_q X_q f$ der Fall ist. Alsdann sind alle

$$X_{q+1} x_k, \; X_{q+2} x_k, \; \cdots X_r x_k \qquad (k = 1, 2 \ldots n)$$

Digitized by Google

gleich Null, und daher (vgl. die Fussnote, S. 463) werden alle Lagen $(x_1' \ldots x_n')$, welche der bestimmt gewählte Punkt $(x_1 \ldots x_n)$ annehmen kann, durch die Gleichungen

$$(2) \qquad x_k' = x_k + \sum_1^q e_i X_i x_k + \cdots \quad (k = 1, 2 \ldots n)$$

gegeben, in denen die Summationen sich nur noch über die q ersten X_i erstrecken. Die Gleichungen enthalten nur noch q willkürlich zu wählende Constanten $e_1 \ldots e_q$ und demnach kann unser Punkt $(x_1 \ldots x_n)$, von dem wir voraussetzten, dass er gerade $r - q$ von einander unabhängige infinitesimale Transformationen aus der Schar der $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ gestatte, jedenfalls nicht mehr als ∞^q Lagen annehmen, wenn auf ihn alle endlichen Transformationen $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ ausgeübt werden.

Dass der Punkt $(x_1 \ldots x_n)$ aber auch nicht weniger als ∞^q Lagen erhält, folgt aus dem Nichtverschwinden einer Functionaldeterminante; denn wenn etwa

$$X_i f = \xi_{i1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_{in} \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

ist, so können nicht alle Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \cdots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \cdots & \xi_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \xi_{q1} & \xi_{q2} & \cdots & \xi_{qn} \end{vmatrix}$$

verschwinden, weil sonst gegen die Voraussetzung eine infinitesimale Transformation $e_1 X_1 f + \cdots + e_q X_q f$ existirte, welche den Punkt $(x_1 \ldots x_n)$ invariant liesse. Wir können daher annehmen, dass etwa die Determinante

$$(3) \qquad \sum \pm \xi_{11} \, \xi_{22} \cdots \xi_{qq}$$

für unseren Punkt $(x_1 \ldots x_n)$ nicht verschwindet. Nun aber geht die Functionaldeterminante

$$\sum \pm \frac{\partial x_1'}{\partial e_1} \frac{\partial x_2'}{\partial e_2} \cdots \frac{\partial x_q'}{\partial e_q}$$

Digitized by Google

der q ersten Gleichungen (2) bei der Substitution $e_1 = 0 \dots e_q = 0$ gerade in die Determinante (3) über, d. h. diese Functionaldeterminante ist für den Punkt $(x_1 \dots x_n)$ sicher nicht identisch Null für alle Werthe von $e_1 \dots e_q$. Die q ersten Gleichungen (2 sind folglich von einander unabhängig hinsichtlich $e_1 \dots e_q$, d. h. es ist die Dimensionenzahl $\varrho = q$ und unsere Gleichungen lassen sich nach $e_1 \dots e_q$ auflösen. Durch Substitution dieser Auflösungen in die $n - q$ letzten Gleichungen (2) ergeben sich alsdann gerade $n - q$ Relationen zwischen $x_1 \dots x_n$, $x_1' \dots x_n'$, welche bei gegebenen $x_1 \dots x_n$ die q-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit der transformirten Punkte $(x_1' \dots x_n')$ darstellen.

Unsere Voraussetzung, dass der betrachtete Punkt $(x_1 \dots x_n)$ von den infinitesimalen Transformationen $e_1 X_1 f + \dots + e_r X_r f$ gerade nur $r - q$ von einander unabhängige gestattet, lässt sich auch so aussprechen: Die infinitesimalen Transformationen $e_1 X_1 f + \dots + e_r X_r f$ ertheilen dem Punkte $(x_1 \dots x_n)$ gerade q von einander unabhängige Fortschreitungsrichtungen. Demnach hat sich ergeben:

Satz 1. *Ein bestimmter Punkt $(x_1 \dots x_n)$, welchem die infinitesimalen Transformationen $e_1 X_1 f + \dots + e_r X_r f$ gerade q von einander unabhängige Fortschreitungsrichtungen zuertheilen, erhält durch Ausführung aller von ihnen erzeugten endlichen Transformationen gerade ∞^q Lagen.*

Verstehen wir nunmehr unter $(x_1 \dots x_n)$ einen Punkt allgemeiner Lage, so werden wir den Satz so aussprechen können:

Satz 2. *Wenn unter den Gleichungen $X_1 f = 0, \dots X_r f = 0$ gerade q von einander unabhängige vorhanden sind, so ertheilen die von den infinitesimalen Transformationen $e_1 X_1 f + \dots + e_r X_r f$ erzeugten endlichen Transformationen jedem Punkte $(x_1 \dots x_n)$ allgemeiner Lage insgesammt gerade ∞^q Lagen.*

Jedem Punkte $(x_1 \dots x_n)$ von allgemeiner Lage ordnen also die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen $X_1 f \dots X_r f$ eine gewisse q-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit M_q zu. Nehmen wir in der Mannigfaltigkeit M_q, die einem Punkte p zugehört, einen Punkt p' von allgemeiner Lage an, so wird im Allgemeinen die dem Punkte p' zugeordnete Mannigfaltigkeit M_q' sich nicht mit der früheren M_q decken. Es ist aber doch der Fall denkbar, dass *allen* Punkten einer solchen Mannigfaltigkeit M_q eben diese M_q zugeordnet ist, mit anderen Worten, dass der Raum durch unsere

Zuordnung in nur ∞^{n-q} q-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten M_q derart zerlegt wird, dass ein beliebiger Punkt p einer derselben bei Ausführung aller ∞^r endlichen Transformationen $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ stets in ihr verbleibt.

Wir werden zeigen, dass dies insbesondere stets eintritt, wenn $X_1 f \ldots X_r f$ eine r-gliedrige *Gruppe* erzeugen und dabei unter den Gleichungen $X_1 f = 0, \cdots X_r f = 0$ gerade q von einander unabhängige vorhanden sind. Es ist dies sehr leicht einzusehen: Sind nämlich $T_a \ldots$ die endlichen Transformationen der von $X_1 f \ldots X_r f$ erzeugten Gruppe, so ist wegen der Gruppeneigenschaft jede Reihenfolge $T_a T_b$ eine Transformation T_c der Gruppe äquivalent, also:

$$T_a T_b = T_c .$$

Bezeichnet p einen Punkt allgemeiner Lage, so ist daher auch

$$(p) T_a T_b = (p) T_c .$$

Deuten wir dies geometrisch. Die Transformationen T führen den Punkt p in alle Lagen $(p) T$ über, welche in der dem Punkte p zugeordneten Mannigfaltigkeit M_q gelegen sind. Demnach ist $(p) T_a$ irgend ein Punkt p' dieser M_q, auch $(p) T_c$ gehört ihr an und wir schliessen aus der letzten Gleichung, dass

$$(p') T_b = (p) T_c$$

ist, d. h. die Punkte $(p') T_b$, in welche der Punkt p' der Mannigfaltigkeit M_q von allen Transformationen der Gruppe übergeführt wird, liegen sämmtlich ebenfalls in dieser Mannigfaltigkeit M_q, mit andern Worten: Jedem Punkte p' von M_q ist eben diese M_q zugeordnet.

Wir können dies Ergebniss noch etwas anders formuliren: Betrachten wir nämlich die einem Punkte p von allgemeiner Lage zugeordnete Mannigfaltigkeit M_q als Ganzes, so ergiebt sich, dass sie bei allen Transformationen der Gruppe in sich übergeführt wird, also invariant bleibt.

Die bei der Gruppe vorhandenen ∞^{n-q} q-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten stellen demnach eine bei der Gruppe invariante Zerlegung des Raumes dar. Analytisch wird dieselbe definirt durch $n - q$ von einander unabhängige Gleichungen:

Digitized by Google

$$\varphi_1(x_1 \cdots x_n) = a_1 \ ,$$
$$\varphi_2(x_1 \cdots x_n) = a_2 \ ,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\varphi_{n-q}(x_1 \cdots x_n) = a_{n-q} \ ,$$

in denen $a_1, a_2 \ldots a_{n-q}$ willkürliche Constanten bedeuten. Wählt man diese Constanten in bestimmter Weise, so stellen die Gleichungen eine jener M_q dar. Dass alle diese M_q bei allen Transformationen der Gruppe invariant bleiben sollen, kommt analytisch darauf hinaus, dass alle Ausdrücke

$$e_1 X_1 \varphi_j + e_2 X_2 \varphi_j + \cdots + e_r X_r \varphi_j = 0$$
$$(j = 1, 2 \ldots n - q)$$

für alle Werthe von $e_1 \ldots e_r$ identisch verschwinden müssen, oder, was dasselbe aussagt, dass jedes

$$X_k \varphi_j \equiv 0$$
$$(k = 1, 2 \ldots r; \quad j = 1, 2 \ldots n - q)$$

sein muss. Die r linearen partiellen Differentialgleichungen

$$X_1 f = 0 \ , \quad \cdots X_r f = 0 \ ,$$

von denen nach Voraussetzung nur q von einander unabhängig sind, und welche n unabhängige Veränderliche $x_1 \ldots x_n$ enthalten, besitzen demnach nothwendig die $n - q$ von einander unabhängigen Lösungen $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{n-q}$, d. h. sie bilden ein *q-gliedriges vollständiges System.*

Hiermit haben wir gefunden:

Satz 3. *Erzeugen r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen $X_1 f \ldots X_r f$ in n Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$ eine r-gliedrige Gruppe, so bilden die unter den Gleichungen $X_1 f = 0$, $\ldots X_r f = 0$ vorhandenen von einander unabhängigen Differentialgleichungen — deren Anzahl etwa q ist — ein q-gliedriges vollständiges System.*

Ein vollständiges System bilden die Gleichungen $X_k f = 0$ aber dann und nur dann, wenn die Gleichungen $(X_i X_k) = 0$ blosse Folgen derselben sind, d. h. wenn jedes $(X_i X_k)$ sich linear durch die Xf ausdrücken lässt:

$$(X_i X_k) \equiv \sum_1^r{}_s \, c_{iks}(x_1 \ldots x_n) \cdot X_s f \ .$$

Daher sagen wir:

Satz 4. *Erzeugen r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen $X_1 f \ldots X_r f$ in n Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$ eine r-gliedrige Gruppe, so erfüllen alle $X_k f$ paarweis Relationen von der Form:*

$$(X_i X_k) \equiv \sum_1^r{}_s \, c_{iks}(x_1 \ldots x_n) \cdot X_s f \ .$$

Im Folgenden benutzen wir die Sätze 3 und 4 nur für den einfachen Fall $q = r$. Indem wir sie für diesen Fall als erwiesen betrachten, gelingt es uns leicht nachzuweisen nicht allein, dass sie auch im Falle $q < r$ gelten, sondern zugleich, dass die Coefficienten c_{iks} als Constante gewählt werden können.

Um dies zu erreichen, fassen wir nicht allein *einen* Punkt $(x_1 \ldots x_n)$, sondern den Inbegriff von $r+1$ beliebigen Punkten $(x_i^1), (x_i^2) \ldots (x_i^{r+1})$, sagen wir kurz ein $(r+1)$-*Eck*, ins Auge. Eine beliebige Gruppe, deren endliche Gleichungen so lauten mögen:

$$(3) \qquad y_i = f_i(x_1 \cdots x_n, e_1 \cdots e_r) \ , \quad (i = 1, 2 \cdots n) \ ,$$

wo $x_1 \ldots x_n$ die ursprünglichen und $y_1 \ldots y_n$ die transformirten Veränderlichen bedeuten, führt jeden der Punkte $(x_i^1), \ldots (x_i^{r+1})$ in unendlich viele Lagen über und demnach auch das $(r+1)$-*Eck* $(x_i^1 \ldots x_i^{r+1})$ in unendlich viele neue Lagen. Diese Lagen $(y_i^1 \ldots y_i^{r+1})$ des $(r+1)$-Ecks bestimmen sich durch die $(r+1)n$ Gleichungen:

$$(4) \quad y_i^1 = f_i(x_1^1 \cdots x_n^1, e_1 \cdots e_r), \ \ldots\ldots \ y_i^{r+1} = f_i(x_1^{r+1} \cdots x_n^{r+1}, e_1 \cdots e_r)$$
$$(i = 1, 2 \cdots n) \ .$$

Sie enthalten $(r+1)n$ ursprüngliche Coordinaten $x_1^1 \ldots x_n^1 \ldots x_1^{r+1} \ldots x_n^{r+1}$ und $(r+1)n$ transformirte Coordinaten $y_1^1 \ldots y_n^1 \ldots, y_1^{r+1} \ldots y_n^{r+1}$. Die $x_1^1 \ldots x_n^1$ werden für sich in die $y_1^1 \ldots y_n^1$ übergeführt, die $x_1^2 \ldots x_n^2$ für sich in die $y_1^2 \ldots y_n^2$ u. s. w. und deshalb ist es offenbar, dass die Gleichungen (4) ebenso wie die Gleichungen (3) eine r-gliedrige Gruppe, allerdings in $(r+1)n$ Veränderlichen, darstellen.

Digitized by Google

Da die

$$X_k f \equiv \sum_1^n{}_i \xi_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1, 2 \cdots r)$$

r unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe (3) sind, so hat die Gruppe (4) entsprechend die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$U_k f \equiv \sum_1^n{}_i \xi_i(x_1^1 \cdots x_n^1) \frac{\partial f}{\partial x_i^1}$$

$$+ \sum_1^n{}_i \xi_i(x_1^2 \cdots x_n^2) \frac{\partial f}{\partial x_i^2} + \cdots + \sum_1^n{}_i \xi_i(x_1^{r+1} \cdots x_n^{r+1}) \frac{\partial f}{\partial x_n^{r+1}}$$

$$(k = 1, 2 \cdots r)$$

oder kurz geschrieben:

$$U_k f \equiv X_k^1 f + X_k^2 f + \cdots + X_k^{r+1} f$$
$$(k = 1, 2 \cdots r) \ .$$

Hierin sollen natürlich die Indices $1, 2 \ldots r+1$ andeuten, dass als Veränderliche statt der x_i die x_i^1, die $x_i^2 \ldots$, die x_i^{r+1} zu benutzen sind. Die Sätze 3 und 4 gelten nun für jede r-gliedrige Gruppe, deren infinitesimalen Transformationen keine lineare Relation erfüllen, also auch für unsere jetzige Gruppe (4) und demgemäss bilden die r Gleichungen

$$U_k f \equiv X_k^1 f + X_k^2 f + \cdots + X_k^{r+1} f = 0$$
$$(k = 1, 2 \cdots r)$$

ein vollständiges System in den $(r+1)n$ Veränderlichen x_i^1, x_i^2, $\cdots x_i^{(r+1)}$ oder auch es bestehen zwischen den $U_k f$ Relationen von der Form:

$$(U_i U_k) \equiv \sum_1^r{}_s \omega_{iks} U_s f \ , \tag{5}$$

in denen die ω_{iks} zunächst Functionen der $(r+1)n$ Veränderlichen sein werden. Nun aber ist offenbar:

$$(U_i U_k) \equiv (X_i^1 X_k^1) + (X_i^2 X_k^2) + \cdots + (X_i^{r+1} X_k^{r+1}) \ .$$

In 5) treten also $\frac{\partial f}{\partial x_1^1}, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n^1}$ links nur in $(X_i^1 X_k^1)$ auf und sonach muss insbesondere:

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{rr} & (X_i^1 X_k^1) \equiv \sum_1^r{}_s \omega_{iks} X_s^1 \ , \\ \text{analog:} & (X_i^2 X_k^2) \equiv \sum_1^r{}_s \omega_{iks} X_s^2 \ , \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & (X_i^{r+1} X_k^{r+1}) \equiv \sum_1^r{}_s \omega_{iks} X_s^{r+1} f \end{array}\right\} \quad (i,k = 1, 2 \ldots r)$$

sein.

Man kann nun diese $r+1$ Gleichungssysteme (6) als Bestimmungsgleichungen für die Functionen ω_{iks} auffassen. Nach einem bekannten Satze [1]) genügen schon die r ersten Systeme zur Bestimmung der ω_{iks}. Da diese r ersten Systeme frei von $x_1^{r+1} \ldots x_n^{r+1}$ sind, so enthalten infolge dessen die ω_{iks} ebenfalls die x_i^{r+1} nicht. In derselben Weise kann man einsehen, dass ω_{iks} auch x_i^r nicht enthalten, indem die $r-1$ ersten Gleichungssysteme und das letzte zur Bestimmung der ω_{iks} hinreichen u. s. w., kurz, man findet, dass die ω_{iks} frei von allen $x_i^1, x_i^2 \ldots x_i^{r+1}$, d. h. nur Constanten sind:

$$\omega_{iks} \equiv c_{iks} \ .$$

Folglich bestehen zwischen den $X_k f$ die Relationen:

$$(X_i X_k) \equiv \sum_1^r{}_s c_{iks} X_s f \ ,$$

in denen die c_{iks} Constanten sind.

Also hat sich ergeben:

Theorem 1. *Erzeugen r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen $X_1 f \ldots X_r f$ in n Veränderlichen eine r-gliedrige Gruppe, so erfüllen die Xf paarweis Relationen von der Form:*

---

1) Theorie der Transformationsgruppen, Leipzig 1888, Seite 65, Zeile 1—3 oben.

Digitized by Google

$$(X_i X_k) \equiv \sum_1^r{}_s \, c_{iks} X_s f \ ,$$

$$(i, k = 1, 3 \ldots r) \ ,$$

in denen die c_{iks} *Constanten sind*[1]).

§ 2.

In diesem Paragraphen geben wir einen Beweis für die Umkehrung des Theorems 1. Wir zeigen also, dass r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen $X_1 f \ldots X_r f$, welche paarweise Relationen von der Form

$$(X_i X_k) \equiv \sum_1^r{}_s \, c_{iks} X_s f$$

$$(c_{iks} = \text{Const.};\ i, k = 1, 2 \ldots r)$$

erfüllen, eine r-gliedrige Gruppe erzeugen.

Der Beweis, den wir hier entwickeln werden, ist von bedeutendem methodischen Interesse. Er ist absichtlich rein analytisch gehalten. Man kann ihn aber durch Verwerthung synthetischer Betrachtungen schneller ableiten (vgl. § 3).

Wir finden es zweckmässig, dem allgemeinen Beweis die Betrachtung zweier einfacher Fälle voranzuschicken.

Nehmen wir also zunächst an, dass uns r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen $X_k f$ vorgelegt seien und zwar in gerade r Veränderlichen $x_1 \ldots x_r$. Zwischen den Xf bestehen ferner, so setzen wir voraus, die Relationen:

(1) $$(X_i X_k) \equiv \sum_1^r{}_s \, c_{iks} X_s f \ ,$$

$$(i, k = 1, 2 \ldots r) \ ,$$

---

1) Während des Druckes bemerke ich, dass es zweckmässig ist die Entwickelungen der Seiten 455 (unten) — 460 (oben) auf den einfachen Fall $q = r$ zu beschränken. Hierdurch werden die Betrachtungen, welche zu den allerdings auch im Falle $q < r$ gültigen Sätzen 3 und 4 führen, nicht allein wesentlich einfacher, sondern sogar an einer Stelle (S. 456 oben) strenger. Die Sätze 3 und 4 werden in der vorliegenden Note nur für den Fall $q = r$ angewandt.

in denen die c_{iks} Constanten bedeuten, und überdies sollen im jetzigen Falle die r Gleichungen

$$X_1 f = 0 , \ldots X_r f = 0$$

von einander unabhängig sein, d. h. es soll zwischen den Xf keine Relation von der Form $\sum_1^r \varphi_k(x_1 \ldots x_r) X_k f = 0$ identisch bestehen.

Unter diesen Voraussetzungen denken wir uns die Xf ausser in den $x_1 \ldots x_r$ noch in den Veränderlichen $x_1' \ldots x_r'$ geschrieben, sodass, wenn

$$X_k f \equiv \sum_1^r \xi_{ki}(x_1 \ldots x_r) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

ist, auch die

$$X_k' f \equiv \sum_1^r \xi_{ki}(x_1' \ldots x_r') \frac{\partial f}{\partial x_i'}$$

gebildet werden. Die r Gleichungen:

$$X_k f + X_k' f = 0 \qquad (k = 1, 2 \ldots r) \tag{2}$$

sind alsdann von einander unabhängig und stellen, da nach (1) auch jeder Klammerausdruck

$$(X_i f + X_i' f,\ X_k f + X_k' f) \equiv (X_i X_k) + (X_i' X_k') \equiv \sum_1^r c_{iks}(X_s' + X_s' f)$$

ist, ein r-gliedriges vollständiges System in $2r$ Veränderlichen $x_1 \ldots x_r$, $x_1' \ldots x_r'$ dar, welches gerade r von einander unabhängige Lösungen

$$\Omega_j(x_1 \ldots x_r, x_1' \ldots x_r') \qquad (j = 1, 2 \ldots r)$$

besitzt. Die Lösungen Ω_j sind *Invarianten* gegenüber den infinitesimalen Transformationen $X_k f + X_k' f$ in $x_1 \ldots x_r, x_1' \ldots x_r'$, also auch Invarianten gegenüber jeder endlichen Transformation der von einer infinitesimalen Transformation

$$e_1(X_1 f + X_1' f) + e_2(X_2 f + X_2' f) + \cdots + e_r(X_r f + X_r' f$$

erzeugten eingliedrigen Gruppe.

Digitized by Google

Wenn nun

$$y_i = f_i(x_1 \dots x_r,\ e_1 \dots e_r) \qquad (i = 1, 2 \dots r) \tag{3}$$

die endlichen Gleichungen der von der infinitesimalen Transformation $\sum_1^r{}_s\, e_s X_s f$ erzeugten eingliedrigen Gruppe sind, so enthalten dieselben r Constanten $e_1 \dots e_r$ und sind nach $e_1 \dots e_r$ auflösbar. Hieraus folgt, dass es immer eine und nur eine Transformation $y_i = f_i(x\, e)$ giebt, welche einen beliebig gewählten Punkt x' in einen andern beliebig gewählten Punkt y' überführt. Lassen wir dabei die x' beliebig variiren und ertheilen den y' die Werthe $y' = f(x', e)$, so erhalten wir immer dieselben Werthe für die e, dementsprechend immer dieselbe Transformation:

$$y_i = f_i(x\,,\ e)\ .$$

Offenbar sind jetzt:

$$y_i = f_i(x_1 \dots x_r,\ e_1 \dots e_r)\,,\quad y_i' = f_i(x_1' \dots x_r',\ e_1 \dots e_r) \qquad (i = 1, 2 \dots r)$$

die endlichen Gleichungen der von der infinitesimalen Transformation $\sum_1^r{}_s\, e_s (X_s f + X_s' f)$ erzeugten eingliedrigen Gruppe. Da die Lösungen Ω_j Invarianten gegenüber dieser Gruppe sind so ist vermöge (4) identisch

$$\Omega_j(x_1 \dots x_r,\ x_1' \dots x_r') = \Omega_j(y_1 \dots y_r,\ y_1' \dots y_r') \qquad (j = 1, 2 \dots r) \tag{5}$$

oder also es ist

$$\Omega_j(x_1 \dots x_r, x_1' \dots x_r') \equiv \Omega_j(f_1(x,e) \dots f_r(x,e),\ f_1(x',e) \dots f_r(x',e))\,, \qquad (j = 1, 2 \dots r)\ ,$$

wo rechts die Argumente $x_1 \dots x_r$, $x_1' \dots x_r'$, $e_1 \dots e_r$ nur angedeutet sind.

Die Gleichungen (5) wollen wir jetzt anders auffassen: wir wollen unter $x_1' \dots x_r'$, $y_1' \dots y_r'$ willkürliche Constanten, Parameter, verstehen. Alsdann stellen die Gleichungen (5) unendlich

Digitized by Google

viele Transformationen der $x_1 \ldots x_r$ in die $y_1 \ldots y_r$ dar. Da unsere Gleichungen $2r$ Parameter enthalten: $x_1' \ldots x_1'$, $y_1' \ldots y_r'$, so liegt es nahe zu vermuthen, dass sie ∞^{2r} verschiedene Transformationen darstellen. Dies ist indess nicht der Fall. Wir werden sehen, dass sie nur ∞^r Transformationen und zwar gerade die Transformationen $y_i = f_i(x_1 \ldots x_r, e_1 \ldots e_r)$ liefern.

Man führe in der That, wie gestattet, statt der Parameter x', y' die neuen Parameter x', e_r ein. Unsere Transformationsgleichungen erhalten hierdurch die Form

$$(5') \quad \Omega_j(x_1 \ldots x_r, x_1' \ldots x_r') = \Omega_j(y_1 \ldots y_r, f_1(x', e) \ldots f_r(x', e))$$
$$(j = 1 \ldots r) \ .$$

Dieselben werden identisch erfüllt durch die Substitution $y_k = f_k(x, e)$ und also sind die Gleichungen (5') sowie die äquivalenten Gleichungen (5) mit den Gleichungen: $y_k = f_k(x, e)$ äquivalent. Hierin liegt, dass die Gleichungen (5') absolut ungeändert bleiben, wenn die Werthe der x' beliebig geändert werden.

Jetzt erkennen wir leicht, dass die Gleichungen (5) eine *Gruppe* bestimmen. Führen wir nämlich nach einander die Transformationen:

$$\Omega_j(x_1 \ldots x_r, x_1' \ldots x_r') = \Omega_j(y_1 \ldots y_r, y_1' \ldots y_r')$$

und

$$\Omega_j(y_1 \ldots y_r, x_1'' \ldots x_r'') = \Omega_j(z_1 \ldots z_r, y_1'' \ldots y_r''$$

aus, so können wir in den letzten Gleichungen ohne Beschränkung annehmen, dass die $x_k'' = y_k'$ sind. Daher kommt

$$\Omega_j(x_1 \ldots x_r, x_1' \ldots x_r') = \Omega_j(z_1 \ldots z_r, y_1'' \ldots y_r'')$$
$$(j = 1 \ldots r) \ .$$

womit unsere Behauptung erwiesen ist.

Satz 5. *Erfüllen r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen $X_1 f \ldots X_r f$ in r Veränderlichen $x_1 \ldots x_r$ paarweise Relationen von der Form*

$$(X_i X_k) = \sum_1^r{}_s c_{iks} X_s f$$

$$(i, k = 1, 2 \ldots r) \ ,$$

in denen die c_{iks} Constanten sind, und besteht überdies keine Relation $\sum_1^r{}_k \varphi_k(x_1 \ldots x_r) X_k f \equiv 0$, *so bestimmen die endlichen Transformationen aller eingliedrigen Gruppen* $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ *eine r-gliedrige Gruppe.*

Setzen wir jetzt, um einen zweiten etwas allgemeineren Fall ins Auge zu fassen, voraus, dass wieder r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen $X_1 f \ldots X_r f$ gegeben seien, welche paarweis Relationen von der Form

$$(X_i X_k) = \sum_1^r{}_s c_{iks} X_s f$$

$$(i, k = 1, 2 \ldots r; \quad c_{iks} = \text{Const.})$$

erfüllen, dass aber die Zahl n der Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$ grösser als r sei, und dass wie im obigen Falle auch jetzt keine Relation von der Form $\sum \varphi_k X_k f \equiv 0$ bestehe. Bedeuten wiederum $X_1' f \ldots X_r' f$ die infinitesimalen Transformationen $X_1 f \ldots X_r f$, aber geschrieben in n Veränderlichen $x_1' \ldots x_n'$, so bilden die Gleichungen

$$X_k f + X_k' f = 0$$
$$(k = 1, 2 \ldots r)$$

ein r-gliedriges vollständiges System genau so wie oben. Aber jetzt ist die Zahl der vorkommenden Veränderlichen $2n$ und demnach besitzt dies System $2n - r$ von einander unabhängige Lösungen. Man bemerke nun, dass die r Gleichungen $X_1 f = 0, \ldots X_r f = 0$ in $x_1 \ldots x_n$ für sich ein r-gliedriges System in n Veränderlichen bilden und daher $n - r$ von einander unabhängige Lösungen $J_1(x_1 \ldots x_n) \ldots J_{n-r}(x_1 \ldots x_n)$ besitzen. (Im obigen Falle war $n - r = 0$.) Diese $n - r$ Functionen sind natürlich auch Lösungen des vollständigen Systems

$$X_k f + X_k' f = 0$$
$$(k = 1, 2 \ldots r),$$

das ausserdem die $n - r$ Lösungen $J_1(x_1' \ldots x_n') \ldots J_{n-r}(x_1' \ldots x_n')$ besitzt. Endlich giebt es noch $2n - r - 2(n - r) = r$ Lösungen

Digitized by Google

$\Omega_1(x_1 \dots x_n, x_1' \dots x_n'), \dots \Omega_r(x_1 \dots x_n, x_1' \dots x_n')$, die beide Arten von Veränderlichen x und x' enthalten und zwar derart, dass die Vertauschung der x mit den x' die Ω nicht ändert. Alle diese Lösungen $J_1(x) \dots J_{n-r}(x)$, $J_1(x') \dots J_{n-r}(x')$, $\Omega_1(x, x' \dots \Omega_r(x, x')$ sind nun Invarianten gegenüber den infinitesimalen Transformationen $X_k f + X_k' f$, also auch gegenüber jeder endlichen Transformation der von einer infinitesimalen Transformation $\sum_1^r{}_k c_k(X_k f + X_k' f)$ erzeugten eingliedrigen Gruppe.

Wie oben, mögen auch hier die Gleichungen:

$$y_i = f_i(x_1 \dots x_n, e_1 \dots e_r) \qquad (i = 1, 2 \dots n) \tag{7}$$

die endlichen Gleichungen einer beliebigen eingliedrigen Gruppe $\sum e_k X_k f$ sein. Alsdann sind:

$$y_i = f_i(x_1 \dots x_n, e_1 \dots e_r), \quad y_i' = f_i(x_1' \dots x_n', e_1 \dots e_r) \qquad (i = 1, 2 \dots n) \tag{8}$$

die endlichen Gleichungen einer beliebigen eingliedrigen Gruppe $\sum_1^s{}_k e_k(X_k f + X_k' f)$, und da die Ω und J Invarianten jeder solchen Gruppe sind, so ist vermöge (8) identisch

$$\begin{cases} \Omega_j(x_1 \dots x_n, x_1' \dots x_n') = \Omega_j(y_1 \dots y_n, y_1' \dots y_n') \ , \\ \qquad (j = 1, 2 \dots r) \ , \\ J_k(x_1 \dots x_n) = J_k(y_1 \dots y_n) \ , \\ J_k(x_1 \dots x_n') = J_k(y_1' \dots y_n') \ . \\ \qquad (k = 1, 2 \dots n - r) \ . \end{cases} \tag{9}$$

Diese $2n - r$ Gleichungen fassen wir nunmehr anders auf. Sie bestimmen $y_1 \dots y_n$ als Functionen von $x_1 \dots x_n$ und von $2n$ Parametern $x_1' \dots x_n'$, $y_1' \dots y_n'$, welch letztere aber durch die $n - r$ Gleichungen $J_k(x') = J_k(y')$ gebunden sind. Durch Variation der x', y' unter Rücksicht auf die letzten $n - r$ Gleichungen gehen also unendlich viele Transformationen der x in die y hervor.

Digitized by Google

Anscheinend enthält diese Gruppe $2n - (n - r) = n + r$ Parameter, aber in Wirklichkeit sind n desselben überzählig. Um dies einzusehen, beachten wir, dass die Gleichungen (9) vermöge der Substitution der Werthe (8) der y und y' in Identitäten übergehen. Insbesondere sind die Constanten $y_1' \dots y_n'$ durch die Constanten $x_1' \dots x_n'$, $e_1 \dots e_r$ ausdrückbar, sodass sich die Gleichungen (9) unserer Gruppe auf diese reduciren:

$$(9') \quad \begin{cases} \Omega_j(x_1 \dots x_n, x_1' \dots x_n') = \Omega_j(y_1 \dots y_n, f_1(x', e), \dots f_n(x', e)) \\ \qquad\qquad (j = 1, 2 \dots r), \\ J_k(x_1 \dots x_n) = J_k(y_1 \dots y_n) \\ \qquad\qquad (k = 1, 2 \dots n - r). \end{cases}$$

In dieser Form enthält die Gruppe anscheinend die $n + r$ Parameter $x_1' \dots x_n'$, $e_1 \dots e_r$. Nun aber werden diese Gleichungen Identitäten, wenn auch für die y_i ihre Werthe (8) oder (7) in $x_1 \dots x_n$, $e_1 \dots e_r$ gesetzt werden, d. h. die Gleichungen (7) sind die Auflösungen der Gleichungen unserer Gruppe nach $y_1 \dots y_n$; die x' kommen somit in (9') nur formal vor. Mithin stellen die Gleichungen (7) ebenfalls unsere Gruppe dar. Sie ist r-gliedrig, denn diese Gleichungen enthalten gerade r wesentliche Parameter $e_1 \dots e_r$. Da wir nachher gerade wie im vorigen Falle erkennen, dass die Gleichungen (9) eine Gruppe bestimmen, so folgt der

Satz 6. *Erfüllen r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen $X_1 f \dots X_r f$ in $n \geqq r$ Veränderlichen $x_1 \dots x_n$ paarweis Relationen von der Form*

$$(X_i X_k) = \sum_1^r c_{iks} X_s f$$

$$(i, k = 1, 2 \dots r),$$

in denen die c_{iks} Constanten sind, dagegen keine Relation von der Form $\sum \varphi_k(x_1 \dots x_n) X_k f \equiv 0$, so bilden die endlichen Transformationen aller eingliedrigen Gruppen $e_1 X_1 f + \dots + e_r X_r f$ eine r-gliedrige Gruppe.

Schliesslich kommen wir jetzt zum allgemeinsten Fall: Es seien r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen

Digitized by Google

$X_1 f \dots X_r f$ in n Veränderlichen $x_1 \dots x_n$ vorgelegt, welche paarweise Relationen von der Form

$$(X_i X_k) = \sum_1^r{}_s c_{iks} X_s f$$

$$(i, k = 1, 2 \dots r, \; c_{iks} = \text{Const.})$$

erfüllen. Ob dieselben Relationen von der Form $\sum \varphi_k X_k f \equiv 0$ erfüllen oder nicht, ist uns jetzt gleichgültig.

Diese allgemeinste Annahme lässt sich nun auf den soeben betrachteten besonderen Fall reduciren. Zu diesem Zwecke schreiben wir die infinitesimalen Transformationen statt in $x_1 \dots x_n$ in $x_1^1 \dots x_n^1$, ferner in $x_1^2 \dots x_n^2$, ... endlich in $x_1^{r+1} \dots x_n^{r+1}$. Bezeichnen wir die so erhaltenen infinitesimalen Transformationen mit $X_k^1 f$, $X_k^2 f \dots X_k^{r+1} f$, so bestehen zwischen den

$$U_k f \equiv X_k^1 f + X_k^2 f + \dots + X_k^{r+1} f$$
$$(k = 1, 2 \dots r)$$

wieder paarweis Relationen von der Form:

$$(U_i U_k) \equiv \sum_1^r{}_s c_{iks} U_s f \; .$$

Ferner ist die Zahl der Veränderlichen $x_k^1, x_k^2 \dots x_k^{r+1}$ gleich $(r+1)n$, also $> r$, und ausserdem besteht zwischen den $U_k f$ keine Relation von der Form $\sum_1^r{}_k \varphi_k U_k f \equiv 0$, denn sie zerfiele in die $r+1$ einzelnen Forderungen

$$\sum_1^r{}_k \varphi_k X_k^j f = 0 \quad (j = 1, 2 \dots r+1) \; ,$$

von denen schon die r ersten zur Bestimmung der φ_k genügten, sodass die φ_k frei von den $x_1^{r+1} \dots x_n^{r+1}$ wären. Analog müssten die φ_k frei von den $x_1^r \dots x_n^r$ u. s. w., kurz nur Constanten sein, was ausgeschlossen ist, weil $X_1 f \dots X_r f$ und demnach auch $U_1 f \dots U_r f$ von einander unabhängig sind.

Die r infinitesimalen Transformationen $U_1 f \dots U_r f$ in $((r+1)n > r)$ Veränderlichen $x_1^1 \dots x_n^1$, $x_1^2 \dots x_n^2$, ..., $x_1^{r+1} \dots x_n^{r+1}$ erfüllen also alle Voraussetzungen, die in Satz 6

Digitized by Google

an die infinitesimalen Transformationen gestellt waren. Mithin bilden die endlichen Transformationen aller eingliedrigen Gruppen $e_1 U_1 f + \cdots + e_r U_r f$ eine r-gliedrige Gruppe. Diese hat, wenn $y_1^1 \ldots y_n^1, y_1^2 \ldots y_n^2, \ldots, y_1^{r+1} \ldots y_n^{r+1}$ die transformirten Veränderlichen und $e_1 \ldots e_r$ die Parameter der Gruppe bezeichnen, offenbar, da bei den $U_k f$ die $x_1^j \ldots x_n^j$ nur von den $x_1^j \ldots x_n^j$ abhängige Incremente erfahren, die Form:

$$(10)\quad y_i^1 = f_i(x_1^1 \ldots x_n^1, e_1 \ldots e_r), \ \ldots\ y_i^{r+1} = f_i(x_1^{r+1}, \ldots x_n^{r+1}, e_1 \ldots e_r)$$
$$(i = 1, 2 \ldots n)\ .$$

Dabei sind die n ersten Gleichungen

$$y_i^1 = f_i(x_1^1 \ldots x_n^1,\ e_1 \ldots e_r)$$
$$(i = 1, 2 \ldots n)$$

die endlichen Gleichungen aller eingliedrigen Gruppen $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ oder also, wenn wir die oberen Indices streichen, die n Gleichungen

$$y_i = f_i(x_1 \ldots x_n,\ e_1 \ldots e_r)$$
$$(i = 1, 2 \ldots n)$$

die endlichen Gleichungen aller eingliedrigen Gruppen $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$. Sie stellen aber eine r-gliedrige Gruppe dar, weil die Gleichungen (10) eine solche darstellen und die $x_1' \ldots x_n'$ in (10) für sich in die $y_1^1 \ldots y_n^1$ transformirt werden.

Also sind wir zu dem allgemeinen Theorem gelangt:

Theorem 2. *Erfüllen r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen $X_1 f \ldots X_r f$ in n Veränderlichen paarweis Relationen von der Form*

$$(X_i X_k) \equiv \sum_1^r{}_s\, c_{iks} X_s f$$
$$(i, k = 1, 2 \ldots r)\ ,$$

in denen die c_{iks} Constanten sind, so bilden die endlichen Transformationen aller eingliedrigen Gruppen $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ eine r-gliedrige Gruppe.

Digitized by Google

§ 3.

Es ist möglich, durch wesentlich synthetische Betrachtungen, welche sehr durchsichtig erscheinen, auf einmal die beiden Theoreme 1 und 2 zu beweisen. Dies soll jetzt geschehen.

Es seien vorgelegt alle ∞^r Transformationen $T_a \ldots$, welche von r von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen $X_1 f \ldots X_r f$ in n Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$ erzeugt werden. Wir suchen ein Kriterium dafür, dass sie eine Gruppe bilden.

Zu diesem Zwecke denken wir uns die Transformationen $T_a \ldots$ auf ein m-Eck, d. h. auf den Inbegriff von m Punkten $x_1^1 \ldots x_n^1$; $x_1^2 \ldots x_n^2$, $\ldots$ $x_1^m \ldots x_n^m$ ausgeführt. Da jeder Punkt bei T_a in einen neuen Punkt übergeht, so wird auch ein solches m-Eck von T_a in ganz bestimmter Weise transformirt, jedes m-Eck geht in ein m-Eck über. Natürlich ist hier, wie in allem Folgenden, immer nur von m-Ecken allgemeiner Lage die Rede.

Betrachten wir ein einzelnes m-Eck. Indem wir auf die m Punkte desselben alle ∞^r Transformationen der vorgelegten Schaar von Transformationen ausüben, nimmt dasselbe sicher nicht mehr als ∞^r Lagen an. Nimmt es gerade ∞^ϱ Lagen an, so ist also $\varrho \leqq r$. Wir werden erkennen, dass ein r-Eck immer gerade ∞^r Lagen annimmt.

Zunächst werfen wir die Frage auf, was im Besonderen geschlossen werden kann, wenn ein q-Eck und ein $(q+1)$-Eck allgemeiner Lage beide gleichviel, etwa ∞^ϱ Lagen bei Ausführung aller Transformationen T annehmen, wo, wie bewiesen, $\varrho \leqq r$ ist. Denken wir uns ein q-Eck, bestehend aus den q Punkten $p_1, p_2 \ldots p_q$, vermöge T_a in die Lage $\overline{p}_1, \overline{p}_2 \ldots \overline{p}_q$ übergeführt. Da das q-Eck insgesammt ∞^ϱ Lagen annehmen kann, so wird es jedesmal von $\infty^{r-\varrho}$ Transformationen T in dieselbe Lage gebracht. Es giebt demnach $\infty^{r-\varrho}$ Transformationen aus der Schaar, welche das q-Eck $p_1 \ldots p_q$ in die Lage $\overline{p}_1 \ldots \overline{p}_q$ überführen. Nun fügen wir zu den q Punkten $p_1 \ldots p_q$ einen Punkt p_{q+1} allgemeiner Lage hinzu. Der Inbegriff der $q+1$ Punkte $p_1, p_2 \ldots p_{q+1}$ ist ein $(q+1)$-Eck und dies wird — da es im Ganzen auch ∞^ϱ Lagen annehmen soll — ebenfalls durch $\infty^{r-\varrho}$ Transformationen T_a in dasselbe $(q+1)$-Eck verwandelt, dessen q erste Ecken $\overline{p}_1 \ldots \overline{p}_q$ sind, während die letzte $\overline{p}_{q+1}$ sei. Also

Digitized by Google

folgt: Die $\infty^{r-\varrho}$ Transformationen, die $p_1 \ldots p_q$ nach $\overline{p}_1 \ldots \overline{p}_q$ bringen, führen einen Punkt p_{q+1} allgemeiner Lage bei den gesuchten Voraussetzungen sämmtlich in nur einen ganz bestimmten Punkt $\overline{p}_{q+1}$ über. Diese $\infty^{r-\varrho}$ Transformationen müssen sich also auf nur eine reduciren, d. h. es ist $\varrho = r$, mit andern Worten:

Satz 7. *Ertheilt eine Schaar von ∞^r Transformationen einem q-Eck und einem $(q+1)$-Eck allgemeiner Lage gleichviele und zwar ∞^ϱ verschiedene Lagen, so ist $\varrho = r$.*

Dies Ergebniss wenden wir in dieser Weise an: Ein Punkt allgemeiner Lage, d. h. ein 1-Eck, erhält bei unserer Schaar natürlich mindestens ∞^1 Lagen. Ein 2-Eck muss mindestens ∞^2 Lagen annehmen, sobald $r > 1$ ist, denn andernfalls nähme das 2-Eck gerade ∞^1 Lagen an und das 1-Eck natürlich nicht mehr, sondern eben so viele und nach dem eben gefundenen Satz 7 müsste $r = 1$ sein. Ein 3-Eck erhält mindestens ∞^3 Lagen, sobald $r > 2$ ist. Denn wir wissen, dass ein 2-Eck mindestens ∞^2 Lagen annimmt. Erhielte nun das 3-Eck nur ∞^2 Lagen, so wäre $r = 2$, u. s. w.

In dieser Weise erkennen wir, dass ein q-Eck, sobald nur $q < r$ ist, bei den ∞^r Transformationen $T_a \ldots$ mindestens ∞^q Lagen annehmen muss. Andererseits wissen wir aber, dass es höchstens ∞^r Lagen erhält. Demnach muss es einen Werth m der Zahl q geben, der $\leqq r$ ist, sodass ein m-Eck *gerade* ∞^r Lagen erhält. Alsdann erhält ein $(m+1)$-Eck u. s. w. eben so viele Lagen, also auch ein r-Eck.

Also setzen wir: *Unsere ∞^r Transformationen T_a ertheilen einem r-Eck gerade ∞^r Lagen, ebenso einem $(r+1)$-Eck.*

Wir fragen uns, wann die ∞^r Transformationen $T_a \ldots$ eine r-gliedrige Gruppe bilden. Sie enthalten die identische Transformation und daher kommt diese Frage nach dem in der Einleitung Bemerkten auf die Frage hinaus, wann die Schar von Transformationen $T_a T_b$, die durch successive Ausführung je zweier T entstehen, von gerade r Parametern abhängt.

Fassen wir zu dem Ende ein $(r+1)$-Eck ins Auge und betrachten wir die Lagen, welche ihm von allen Transformationen $T_a T_b$ ertheilt werden. Sind dies ∞^{r+1} oder noch mehr Lagen, so ist natürlich die Zahl der Parameter der Schar der $T_a T_b$ grösser als r und die T_a bilden keine Gruppe. Ertheilen die $T_a T_b$ aber dem $(r+1)$-Eck gerade ∞^r Lagen (weniger können

es nicht sein), so ertheilen sie auch einem r-Eck gerade ∞^r Lagen, denn ein r-Eck erhält ja auch schon bei den T_a selbst ∞^r Lagen. Demnach ertheilt die Schar der Transformationen $T_a T_b$ dem r-Eck und dem $(r+1)$-Eck *gleich viele*, nämlich ∞^r Lagen. Hierauf wenden wir Satz 7 an: An Stelle der T_a sind die $T_a T_b$, an Stelle von q und ϱ ist r getreten. Also folgt: Es müssen gerade auch ∞^r Transformationen $T_a T_b$ vorhanden sein, d. h. die ∞^r Transformationen T_a bilden eine r-gliedrige Gruppe.

Wir bemerken, dass, wenn die $T_a T_b$ einem $(r+1)$-Eck nur ∞^r Lagen ertheilen, dies Factum auch anders ausgesprochen werden kann: Das $(r+1)$-Eck nimmt ja bei Ausführung der T_a selbst ∞^r Lagen an. Da es bei den $T_a T_b$ nicht mehr annimmt, so ist die Schaar der ∞^r $(r+1)$-Ecke, in die es bei den T_a übergeht, gegenüber jeder Transformation T_b invariant. Dies lässt sich auch umkehren, und somit ergiebt sich der

Satz 8. *Eine Schar von ∞^r Transformationen T_a bildet eine r-gliedrige Gruppe dann und nur dann, wenn alle $(r+1)$-Ecke sich in Scharen von je ∞^r $(r+1)$-Ecken in solcher Weise vertheilen, dass jede dieser Scharen für sich bei allen Transformationen T_a invariant bleibt.*

Dies begriffliche Kriterium soll nun ins analytische übertragen werden.

Seien also r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen $X_1 f \dots X_r f$ in n Veränderlichen $x_1 \dots x_n$ vorgelegt. Die endlichen Gleichungen der allgemeinen eingliedrigen Gruppe $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ seien:

$$(1) \qquad y_i = f_i(x_1 \dots x_n,\ e_1 \dots e_r) \qquad (i = 1, 2 \dots r) \ .$$

Sie enthalten r wesentliche Constanten.

Nun mögen $x_1^1 \dots x_n^1,\ x_1^2 \dots x_n^2,\ \dots,\ x_1^{r+1} \dots x_n^{r+1}$ die $(r+1)\,n$ Coordinaten der Punkt eines $(r+1)$-Ecks sein und $X_k^1 f, \dots X_k^{r+1} f$ bedeuten wieder wie früher die $X_k f$, aber geschrieben in den $x_i^1, \dots x_i^{r+1}$. Alsdann werden die Ecken des $(r+1)$-Ecks bei der Transformation (1) durch die Gleichungen:

$$(2) \quad y_i^1 = f_i(x_1^1 \dots x_n^1, e_1 \dots e_r), \dots y_i^{r+1} = f_i(x_1^{r+1} \dots x_n^{r+1}, e_1 \dots e_r) \qquad (i = 1, 2 \dots r)$$

in die Ecken $y_i^1, \dots y_i^{r+1}$ übergeführt und die $(r+1)\,n$ Glei-

Digitized by Google

chungen (2) sind die endlichen Gleichungen der allgemeinen eingliedrigen Gruppe

$$\sum_1^r{}_k \, e_k \, (X_k{}^1 f + X_k{}^2 f + \cdots + X_k{}^{r+1} f)$$

oder, wenn wie früher

$$U_k f \equiv X_k{}^1 f + \cdots + X_k{}^{r+1} f$$

gesetzt wird, der eingliedrigen Gruppe $e_1 U_1 f + \cdots + e_n U_n f$.

Jedes $(r+1)$-Eck $x_i{}^1, \ldots x_i{}^{r+1}$ ist nunmehr abgebildet in einen Punkt eines Raumes von $(r+1)\,n$ Dimensionen mit den Coordinaten $x_1{}^1 \ldots x_n{}^1, x_1{}^2 \ldots x_n{}^2, \ldots, x_1{}^{r+1} \ldots x_n{}^{r+1}$. Die invariante Zerlegung der $(r+1)$-Ecke in Schaaren von ∞^r $(r+1)$-Ecken, von der Satz 7 spricht, stellt sich in diesem Raume dar als eine gegenüber den $U_1 f \ldots U_r f$ invariante Zerlegung des Raumes in Mannigfaltigkeiten von r Dimensionen. Eine solche Zerlegung wird durch $(r+1)\,n - r$ Gleichungen von der Form

$$\varphi_j (x_1{}^1 \ldots x_n{}^{r+1}) = \text{Const.}$$

dargestellt und es muss, da sie den $U_k f$ gegenüber invariant ist, jedes $U_k \varphi_j = 0$ sein, d. h.: Die Gleichuugen (1) unserer ∞^r Transformationen stellen dann und nur dann eine q-gliedrige Gruppe dar, wenn die r linearen partiellen Differentialgleichungen

$$U_1 f = 0\,, \quad U_2 f = 0\,, \quad \ldots \quad U_r f = 0$$

oder also diese:

$$X_k{}^1 f + X_k{}^2 f + \cdots + X_k{}^{r+1} f = 0$$
$$(k = 1, 2 \ldots r)$$

gerade $(r+1)\,n - r$ gemeinsame von einander unabhängige Lösungen besitzen. Nun aber enthalten diese sicher unabhängigen Gleichungen $(r+1)n$ unabhängige Veränderliche und die Zahl der Gleichungen ist r. Sie haben also überhaupt $(r+1)\,n - r$ gemeinsame Lösungen dann und nur dann, wenn sie ein vollständiges System bilden, d. h. wenn jedes

$$(U_i U_k) \equiv \sum_1^r{}_s \, \varphi_{iks} U_s f$$

ist. Dies aber liefert:

$$(X_i^1 X_k^1) + \cdots + (X_i^{r+1} X_k^{r+1}) = \sum_1^r{}_s \omega_{iks}(X_s^1 f + \cdots + X_s^{r+1} f)$$

und zerfällt in die einzelnen Forderungen:

$$(X_i^j X_k^j) = \sum_1^r{}_s \omega_{iks} X_s^j f$$

$$(i,k = 1,2 \ldots r;\ j = 1,2 \ldots r+1) \ .$$

Dieselben sagen, wie wir schon in § 1 bemerkten, aus, dass die ω_{iks} nur Constanten sind:

$$\omega_{iks} \equiv c_{iks} \ ,$$

und somit folgt als nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Gleichungen (1) eine r-gliedrige Gruppe bilden: Es müssen die Xf paarweis Relationen erfüllen von der Form

$$(X_i X_k) = \sum_1^r{}_s c_{iks} X_s f \ .$$

Also ist bewiesen:

Theorem 3. *r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen $X_1 f \ldots X_r f$ erzeugen dann und nur dann eine r-gliedrige Gruppe, wenn die Xf paarweis Relationen von der Form*

$$(X_i X_k) = \sum_1^r{}_s c_{iks} X_s f$$

mit constanten Coefficienten c_{iks} erfüllen.

Dieses wichtige Theorem bezeichne ich gern als den *zweiten Fundamentalsatz* in meiner Theorie der Transformationsgruppen. Als den *ersten Fundamentalsatz* bezeichne ich das Theorem:[1] *Stellen r Gleichungen $x_i' = f_i(x_1 \ldots x_r, a_1 \ldots a_r)$ eine r-gliedrige Gruppe dar, so bestehen Gleichungen von der Form*

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum\nolimits_j \psi_{jk}(a) \cdot \xi_{ji}(x') \ ; \quad \xi_{ji}(x') = \sum\nolimits_k \alpha_{jk}(a) \cdot \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} \ .$$

Endlich als den dritten Fundamentalsatz bezeichne ich das

1) Theorie der Transformationsgruppen (Leipzig 1888), Seite 33.

Theorem: *r^3 Constante c_{iks} bestimmen die Zusammensetzung einer r-gliedrigen Gruppe dann und nur dann, wenn die Relationen*

$$c_{ikt} + c_{kit} = 0 ,$$

$$\sum_1^r{}_s \{c_{iks} c_{sjt} + c_{kjs} c_{sit} + c_{jis} c_{skt}\} = 0$$

bestehen.

Ich bezeichne diese Sätze als Fundamentalsätze, da sie die Grundlage für meine sämmtlichen gruppentheoretischen Untersuchungen sowie für die Arbeiten meiner Nachfolger bilden. Herr KILLING, der mit grossem Erfolge meine Untersuchungen über die *Zusammensetzung* der Gruppen weiter geführt hat, bezeichnet irrthümlicher Weise meinen dritten Fundamentalsatz als *Jacobi'sche Identität* oder *Jacobi'sche Relationen*. Ich finde mich dazu veranlasst, ausdrücklich diesen Irrthum zu berichtigen, obgleich Herr KILLING in liebenswürdigster Weise anerkannt hat, dass dieser tiefliegende Satz von mir herrührt.

Schliesslich kann ich nicht unterlassen, an die werthvollen functionentheoretischen Untersuchungen zu erinnern, durch welche Herr SCHUR die Richtigkeit von meinen Fundamentalsätzen bestätigt hat. Es war vorauszusehen, dass die Behandlung dieser bekannten Theorien nach *neuen Methoden* auch zu neuen *Resultaten* führen würde. In der That ist SCHUR besonders in seiner letzten Note (diese Berichte) zu wichtigen neuen Resultaten gekommen.

Digitized by Google

Sophus Lie, *Bestimmung aller r-gliedrigen transitiven Transformationsgruppen durch ausführbare Operationen.*

Die Aufgabe, alle Transformationsgruppen mit r Parametern (und in n Veränderlichen) zu bestimmen, findet zunächst ihren analytischen Ausdruck in mehreren complicirten Functionalgleichungen, die einer directen Behandlung kaum zugänglich sein dürften. Es war daher eine überraschende Entdeckung, als ich seinerzeit fand, dass die Erledigung dieser Functionalgleichungen sich auf die Integration von *gewöhnlichen* Differentialgleichungen zurückführen lässt. Nach meiner Auffassung ist diese Bemerkung ebenso wichtig wie PFAFF's Entdeckung, dass alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung sich auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurückführen lassen.

Indem ich nun versuchte, *alle Transformationsgruppen der geraden Linie, der Ebene und des Raumes* zu bestimmen, ergab es sich *dass diese Bestimmung sich vollständig durchführen liess*, dass sich also die betreffenden Differentialgleichungen sämmtlich integriren liessen. Dabei gelang es immer durch passende Wahl der unabhängigen Veränderlichen *die infinitesimalen Transformationen jeder hierher gehörigen transitiven Gruppe als ganze Functionen von den unabhängigen Veränderlichen und gewissen Expontialgrössen darzustellen*[1]).

---

1) Dass ein so einfaches Gesetz nicht für alle *intransitiven* Gruppen gelten kann, folgt schon daraus, dass dieselben *arbiträre Functionen* von den *Invarianten* der Gruppe enthalten können. Dagegen leuchtet ein, dass alle inf. Transformationen einer intransitiven Gruppe der Ebene oder des Raumes sich als ganze Functionen von den unabhängigen Veränderlichen, gewissen Exponentialgrössen und gewissen Invarianten der Gruppe darstellen lassen.

Digitized by Google

Da schon in der Ebene und umsomehr im dreifachen Raume unendlich viele wesentlich verschiedene Transformationsgruppen vorhanden sind, müssen die beiden gefundenen Gesetze als bemerkenswerth betrachtet werden. Durch verschiedenartige Ueberlegungen wurde ich auf die Vermuthung geführt, dass diese Gesetze für jeden n-fach ausgedehnten Raum Gültigkeit besitzen. Schon in meiner Arbeit in den Mathematischen Annalen Bd. 25 (1885) kündigte ich an, dass das erste Gesetz auch für n Dimensionen Gültigkeit besitzt, dass also *alle r-gliedrigen Gruppen in n Veränderlichen durch ausführbare Operationen bestimmt werden können*. In einer späteren Note in diesen Berichten präcisirte ich diese Behauptung dahin, dass für alle Gruppen ohne ausgezeichnete infinitesimale Trausformationen der Beweis des angekündigten Theorems ganz einfach war, während für Gruppen mit ausgezeichneten inf. Transformationen mein Beweis so complicirt war, dass ich denselben nicht als definitiv zu betrachten wagte; wenngleich derselbe mir absolut streng schien.

In der vorliegenden Note werde ich durch einfache Betrachtungen zeigen, dass das erste Gesetz wirklich allgemeine Gültigkeit besitzt. Hierzu füge ich mehrere andere wichtige Bemerkungen.

Wende ich diese meine allgemeine Methode auf specielle Beispiele an, so erscheinen die infinitesimalen Transformationen der betreffenden Gruppen als *rationale* Functionen von gewissen Exponentialgrössen, deren Exponenten algebraische Functionen von den Veränderlichen sind; ebenfalls sind die im Zähler und Nenner eingehenden Coefficienten algebraische Functionen von den unabhängigen Veränderlichen. Hiermit wäre also ein bemerkenswerthes Gesetz gefunden, welches mit dem oben als Vermuthung aufgestellten zweiten Gesetz eine gewisse Aehnlichkeit besitzt, wenn es auch complicirter ist. Doch halte ich an der Ueberzeugung fest, dass auch das zweite aufgestellte Gesetz allgemeine Gültigkeit besitzt.

Gelingt es einmal auch die Richtigkeit dieser Vermuthung nachzuweisen, so ist es wahrscheinlich, dass man gleichzeitig für jedes n alle transitiven (sowie intransitiven) Gruppen aufstellen kann. So kühn auch diese Vermuthung erscheinen mag, so geben doch meine ausgedehnten Untersuchungen mir ein gewisses Recht dazu, dieselbe zu formuliren.

1. Um alle r-gliedrigen Gruppen zu bestimmen, suche ich zuerst die *Zusammensetzung* von allen r-gliedrigen Gruppen. Dieses Problem ist ein rein *algebraisches* und verlangt also nach meiner gewöhnlichen Ausdrucksweise nur ausführbare Operationen; mein *drittes Fundamentalgesetz* sagt ja, dass r^3 Constante c_{iks} dann und nur dann die Zusammensetzung einer r-gliedrigen Gruppe bestimmen, wenn die Formeln

$$\sum_1^r{}_s \{c_{iks}c_{sjt} + c_{kjs}c_{sit} + c_{jis}c_{skt}\} = 0\ ,\quad c_{iks} + c_{kis} = 0$$

bestehen. Ebenfalls verlangt die Bestimmung aller *wesentlich verschiedenen* Zusammensetzungen von r-gliedrigen Gruppen, wie ich an einer anderen Stelle nachgewiesen habe, nur ausführbare Operationen.

Es seien nun

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

die endlichen Gleichungen und $X_1 f \cdots X_r f$ r unabhängige infinitesimale Transformationen einer bekannten oder unbekannten Gruppe mit der gegebenen Zusammensetzung c_{iks}.

Denken wir uns nun ausgeführt zuerst eine Transformation mit den Parametern $a_1 \cdots a_r$, sodann eine mit den Parametern $b_1 \cdots b_r$, so entsteht bekanntlich eine neue Transformation der Gruppe mit den Parametern $c_1 \cdots c_r$ und dabei ist

$$(1) \qquad c_i = \varphi_i(a_1 \cdots a_r,\ b_1 \cdots b_r) \qquad (i = 1 \cdots r)\ .$$

Diese letzten Gleichungen bestimmen nun, wenn die a_i und c_k als Veränderliche, die b_j als Parameter betrachtet werden, meine *erste Parametergruppe*; dagegen liefern dieselben Gleichungen, wenn die b_i und c_j als Veränderliche, dagegen die a_j als Parameter aufgefasst werden, meine *zweite Parametergruppe*.

Im Folgenden spielen die infinitesimalen Transformationen der beiden Parametergruppen eine wesentliche Rolle.

Um die infinitesimalen Transformationen der ersten Parametergruppe zu finden setzen wir, wenn a_k^0 die Parameterwerthe der identischen Transformation sind:

$$b_k = a_k^0 + \omega_k \quad (k = 1 \cdots r)$$

Digitized by Google

und lassen dabei ω_k unendlich kleine Grössen bezeichnen. Dann werden die c_k unendlich wenig von den a_k verschieden:

$$c_k = a_k + \delta a_k \ ,$$

und dabei haben die δa_k die Werthe:

$$\delta a_k = \sum_1^r{}_\nu \frac{\partial \varphi_k (a_1^0 \cdots a_r^0)}{\partial a_\nu^0} \omega_\nu \ .$$

Diese Gleichungen liefern die allgemeinste infinitesimale Transformation der ersten Parametergruppe. Setzen wir daher

$$\frac{\partial \varphi_k(a_1 \cdots a_r, a_1^0 \cdots a_r^0)}{\partial a_\nu^0} = \alpha_{\nu k}(a_1 \cdots a_r) \ ,$$

so liefern die r Gleichungssysteme:

$$\delta a_k = \alpha_{\nu k}(a_1 \cdots a_r)\, \delta t$$
$$(\nu = 1 \cdots r)$$

r unabhängige infinitesimale Transformationen der ersten Parametergruppe.

Zur Bestimmung von den infinitesimalen Transformationen der zweiten Parametergruppe bilden wir die Gleichungen

$$b_k + \delta b_k = \varphi_k (a_1^0 + \omega_1 \cdots a_r^0 + \omega_r b_1 \cdots b_r) \ ,$$

woraus

$$\delta b_k = \sum_1^r{}_\nu \frac{\partial \varphi_k (a_1^0 \cdots b_1 \cdots b_r)}{\partial a_\nu^0} \omega_\nu$$

hervorgeht. Diese Gleichungen liefern die allgemeinste infinitesimale Transformation der zweiten Parametergruppe. Setzen wir

$$\frac{\partial \varphi_k (a_1^0 \cdots b_r)}{\partial a_\nu^0} = \beta_{\nu k}(b_1 \cdots b_r) \ ,$$

so liefern die Gleichungen

$$\delta b_k = \beta_{\nu k}(b_1 \cdots b_r)$$
$$(\nu = 1 \cdots r) \quad (k = 1 \cdots r)$$

Digitized by Google

r unabhängige infinitesimale Transformationen der zweiten Parametergruppe.

Ist nun eine Gruppe

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n\, a_1 \cdots a_r)$$

mit der Zusammensetzung c_{iks} gegeben, so leuchtet ein, dass wir die infinitesimalen Transformationen der beiden Parametergruppen berechnen können.

Es lässt sich aber zeigen, dass es, sobald nur eine Zusammensetzung vorliegt, ohne dass eine Gruppe mit dieser Zusammensetzung bekannt ist, doch immer möglich ist, die infinitesimalen Transformationen der beiden Parametergruppen zu berechnen. Hierzu führt eine Methode, die ich im dritten Bande des norwegischen Archivs (1878) entwickelt habe.

Seien $X_1 f \cdots X_r f$ die infinitesimalen Transformationen einer unbekannten Gruppe von der verlangten Zusammensetzung. Dann ist

$$a_1 X_1 f + \cdots + a_r X_r f$$

das Symbol einer ganz bestimmten endlichen Transformation, nämlich der Transformation:

$$f(x_1' \cdots x_1') = f(x) + \sum_1^r{}_\nu\, a_\nu X_\nu f + \frac{1}{1\cdot 2} \sum_{i,k}^{1\ldots r} a_i a_k X_i X_k f .$$

Bezeichnen $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ unendlich kleine Grössen, so ist

$$\sum_1^r{}_k\, a_k X_k f + \sum_1^r{}_i\, \lambda_i X_i \cdot f$$

das Symbol einer unendlich benachbarten Transformation. Dieselbe lässt sich ersetzen durch die Reihenfolge von der Transformation $\sum a_k X_k f$ und einer gewissen unendlich kleinen Transformation $\sum_1^r{}_k\, \psi_k X_k f$, die wir berechnen können, obgleich wir die Gruppe $X_k f$ nicht kennen.

Um diese Berechnung durchzuführen, denken wir uns statt $x_1 \cdots x_n$ neue Veränderliche $y_1 \cdots y_n$ eingeführt, welche $\sum a_k X_k$ auf die Form $\frac{\partial f}{\partial y_n}$ und andererseits $X_k f$ auf die Form

Digitized by Google

$$\sum_1^r{}_i \eta_{ki}(y_1 \cdots y_n) \frac{\partial f}{\partial y_i}$$

bringen. Alsdann nimmt die eingliedrige Gruppe

$$t\left(\sum a_k X_k f + \sum \lambda_k X_k f\right)$$

die Form an

$$t\frac{\partial f}{\partial y_n} + t\sum \lambda_k X_k f$$

nnd dabei gehen die zugehörigen endlichen Gleichungen hervor durch Integration des simultanen Systems:

$$dy_n' = \left(1 + \sum \lambda_k \eta_{kn}(y' \cdots y_n')\, dt\right),$$

$$dy_i' = \sum \lambda_k \eta_{ki}(y_1' \cdots y_n')\, dt,$$

mit den Anfangswerthen $t = 0$, $y_k' = y_k$ und den Endwerthen $t = t$, $y_k' = y_k'$.

Wir brauchen diese Integration nicht vollständig durchzuführen. Es genügt in den Integralgleichungen, geordnet nach den Potenzen der λ_j die Glieder nullter und erster Ordnung zu berechnen.

Eine erste Annäherung liefern die Gleichungen

$$y_n' = y_n + t,$$
$$y_i' = y_i,$$

sodann eine zweite die Gleichungen

$$(2)\quad \begin{aligned} y_n' &= y_n + t + \int_0^t \sum \lambda_k \eta_{kn}(y_1 \cdots y_{n-1} y_n + t)\, dt, \\ y_i' &= y_i \quad + \int_0^t \sum{}_k \lambda_k \eta_{ki}(y_1 \cdots y_{n-1} y_n + t)\, dt, \end{aligned}$$

welche auch folgendermassen geschrieben werden können:

$$y_n' = y_n + t + \sum_1^r{}_k \lambda_k \int_0^t \eta_{kn}(y_1 \cdots y_{n-1} y_n + t)\, dt,$$

$$y_i' = y_i \quad + \sum_1^r \lambda_k \int_0^t \eta_{ki}(y_1 \cdots y_{n-1} y_n + t)\, dt.$$

Diese Gleichungen liefern von den Reihenentwickelungen der gesuchten Integralgleichungen nach den λ_j die Glieder nullter und erster Ordnung.

Es ist jetzt möglich, die in den Gleichungen (2) eingehenden bestimmten Integrale exact zu berechnen. Es ist nämlich, wie wir jetzt zeigen, möglich, solche Grössen $\varphi_k(t)$ zu finden, dass Gleichungen:

$$\sum \lambda_k \eta_{ki}(y_1 \cdots y_{n-1} y_n + t) = \sum \varphi_k(t) \cdot \eta_{ki}(y_1 \cdots y_{n-1} y_n)$$

bestehen. Setzen wir

$$y_n + t = \bar{y}_n ,$$

so handelt es sich darum nachzuweisen, dass Grössen $\varphi_k(t)$ vorhanden sind, welche die Gleichungen:

$$\sum \lambda_k \eta_{ki}(y_1 \cdots y_{n-1} \bar{y}_n) = \sum \varphi_k(t) \eta_{ki}(y_1 \cdots y_{n-1} \bar{y}_n - t)$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \sum_1^r \varphi_k(t) \cdot \eta_{ki}(y_1 \cdots y_{n-1} \bar{y}_n - t) = 0$$

für jedes t erfüllen. Diese Forderung erhält durch Ausführung die Gestalt:

$$(3) \qquad \sum \frac{d\varphi_k}{dt} \eta_{kj}(y_1 \cdots y_{n-1} \bar{y}_n - t) + \sum \varphi_\sigma(t) \frac{d\eta_{\sigma j}(y_1 \cdots y_{n-1} y_n - t)}{dt} .$$

Nun aber ist

$$\left(\sum a_i X_i, X_\sigma\right) = \sum a_i \sum c_{i\sigma s} X_s f$$

und dementsprechend

$$\sum \frac{\partial \eta_{\sigma j}(y_1 \cdots y_n)}{\partial y_n} \frac{\partial f}{\partial y_j} = \sum a_i \sum c_{i\sigma s} \sum \eta_{sj}(y) \frac{\partial f}{\partial y_j}$$

oder

$$\frac{d\eta_{\sigma j}(y)}{\partial y_n} = \sum a_i \sum c_{i\sigma s} \eta_{sj}(y) ,$$

Unsere Gleichung (3) erhält folglich die Form

$$0 = \sum^s \frac{d\varphi_s}{dt} \eta_{sj}(y_1 \cdots y_{n-1} \overline{y}_n - t)$$
$$- \sum^\sigma \varphi_\sigma(t) \sum^i \alpha_i \sum^s c_{i\sigma s} \eta_{sj}(y_1 \cdots y_{n-1} \overline{y}_n - t)$$

und zerlegt sich somit in die äquivalenten Gleichungen:

$$\frac{d\varphi_s}{dt} - \sum^\sigma \varphi_\sigma(t) \sum^i \alpha_i c_{i\sigma s} = 0 \;.$$

Dieses simultane System von linearen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten können wir nun immer durch Auflösung einer algebraischen Gleichung integriren.

Zu diesem Zwecke multipliciren wir nach der bekannten Regel die vorangehenden Gleichungen mit Constanten f_s, addiren:

$$\frac{d \sum^s f_s \varphi_s}{dt} = \sum_{\sigma, i, s} \varphi_\sigma \alpha_i f_s c_{i\sigma s}$$

und versuchen endlich die Grössen f_s in solcher Weise zu wählen, dass die letzte Gleichung die Form

$$\frac{d\left(\sum^s f_s \varphi_s\right)}{dt} = \omega \sum^s f_s \varphi_s$$

annimmt. Dies giebt uns zur Bestimmung von den Constanten $f_1 \ldots f_r$ und ω die Relation

$$\sum_{\sigma, i, s} c_{i\sigma s} \alpha_i \varphi_\sigma f_s = \omega \sum^s \varphi_s f_s \;,$$

die sich in die folgenden zerlegt:

$$\sum_{\sigma, i}^{1, \ldots r} c_{i\sigma s} \alpha_i \varphi_\sigma = \omega \varphi_s$$
$$(s = 1 \ldots r) \;.$$

Diese letzten Gleichungen können folgendermassen geschrieben werden:

$$\left(\sum^i c_{i11} \alpha_i - \omega\right) \varphi_1 + \left(\sum^i c_{i21} \alpha_i\right) \varphi_2 + \cdots + \left(\sum^i c_{ir1} \alpha_i\right) \varphi_r = 0 \;,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left(\sum^i c_{i1r} \alpha_i\right) \varphi_1 + \cdots\cdots\cdots\cdots + \left(\sum^i c_{irr} - \omega\right) \varphi_r = 0 \,.$$

Zur Auflösung derselben bildet man bekanntlich die algebraische Gleichung

$$(5) \qquad 0 = \begin{vmatrix} \sum^i c_{i11} \alpha_i - \omega & \sum^i c_{i21} \alpha_i \cdots & \sum^i c_{ir1} \alpha_i \\ \sum^i c_{i1r} \alpha_i & \cdots\cdots\cdots\cdots & \sum^i c_{irr} \alpha_i \end{vmatrix} \,.$$

Digitized by Google

Sind $\nu_1, \nu_2 \ldots$ die verschiedenen Wurzeln dieser Gleichung, so sind die gesuchten Grössen $\varphi_k(t)$ bekanntlich ganze Functionen von

$$t,\ e^{\nu_1 t},\ e^{\nu_2 t} \ldots\ldots$$

Dabei sind die ν_k algebraische Functionen von $\alpha_1 \ldots\ldots \alpha_r$.

Auf die Gleichungen (4) sowie auf die Gleichungen (5) kommt man auch in anderer Weise.

Gesetzt wir wollen zu einer gegebenen inf. Transformation $\alpha_1 X_1 f + \cdots + \alpha_r X_r f$ in allgemeinster Weise eine solche weiter $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ hinzufügen, dass die beiden eine zweigliedrige Gruppe bilden, und dabei insbesondere die Relation

$$\left(\sum \alpha X,\ \sum e X\right) = \omega \sum e X$$

und also auch die Gleichung

$$\sum_{i,k}^{1 \ldots r} a_i e_k \sum_s c_{iks} X_s = \omega \sum e_s X_s f$$

besteht. Diese Gleichung zerlegt sich in die folgenden

$$\sum_{i,k} a_i e_k c_{iks} = \omega e_s \qquad (s = 1 \cdots r)$$

oder ausführlich geschrieben:

$$\left(\sum a_i c_{i11} - \omega\right) e_1 + \cdots + \left(\sum a_i c_{ir1}\right) e_r = 0\ ,$$

$$\sum a_i c_{i1r} e_1 + \cdots\cdots + \left(\sum a_i c_{irr} - \omega\right) e_r = 0\ ,$$

welche in bekannter Weise auf die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \sum a_i c_{i11} - \omega \cdots \sum a_i c_{ir1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum a_i c_{i1r} \cdots\cdots \sum a_i c_{irr} - \omega \end{vmatrix} = 0$$

führen. Von derselben hat bekanntlich KILLING grossen Nutzen gezogen.

Dabei wählen wir die Integrationsconstanten in solcher Weise, dass die φ_s für $t=0$ die Werthe λ_k annehmen. Die hiermit bestimmten Grössen $\varphi_s(t)$ erfüllen die Gleichung

$$\sum \lambda_k \eta_{ki}(y_1 \cdots y_{n-1}\, y_n + t) = \sum \varphi_k(t) \cdot \eta_{ki}(y_1 \cdots y_{n-1} y_n)\ .$$

In Folge dessen erhalten die Gleichungen (A) die Gestalt:

$$y_n' = y_n + t + \int_0^t \sum_k \varphi_k(t)\, \eta_{kn}(y_1 \cdots y_{n-1} y_n)\, dt\ ,$$

$$y_i' = y_i \qquad + \int_0^t \sum_k \varphi(t) \cdot \eta_{ki}(y_1 \cdots y_{n-1} y_n)\, dt\ ,$$

Digitized by Google

oder

$$y_n' = y_n + t + \sum^k \eta_{kn}(y_1 \cdots y_{n-1}\, y_n) \int_0^t \varphi_k(t)\, dt \ ,$$

$$y_i' = y_i \qquad + \sum^k \eta_{ki}(y_1 \cdots y_{n-1}\, y_n) \int_0^t \varphi_k(t)\, dt \ ,$$

oder endlich, wenn wir

$$\int_0^t \varphi_k(t)\, dt = \psi_k(t)$$

setzen,

$$(7) \qquad \begin{cases} y_n' = y_n + t + \sum^k \eta_{kn}(y_1 \cdots y_n) \cdot \psi_k(t) \ , \\ y_i' = y_i \qquad + \sum^k \eta_{ki}(y_1 \cdots y_n) \cdot \psi_k(t) \ . \end{cases}$$

Hiermit ist ein wichtiges Resultat gewonnen.

Führen wir zuerst die unendlich kleine Transformation

$$\bar{y}_i = y_i + \sum^k \eta_{ki}(y_1 \cdots y_n)\, \psi_k(t) \qquad (i = 1 \cdots n) \ ,$$

darnach die endliche Transformation aus

$$y_r' = y_n + t \ , \quad y_1' = y_1 \cdots y_{n-1}' = y_{n-1} \ ,$$

so entsteht die Transformation (7), *oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Transformation*

$$t\left(\frac{\partial f}{\partial y_n} + \sum \lambda_k X_k f\right) \ ,$$

die sich in den alten Veränderlichen folgendermassen schreiben lässt:

$$t\left\{\sum a_k X_k f + \sum \lambda_k X_k f\right\} .$$

Um die Bedeutung des gewonnenen Resultates klar zu machen, fügen wir noch die folgenden Bemerkungen hinzu.

Die $\varphi_k(t)$ sind ganze Functionen von t, $e^{\nu_1(t)}$, $e^{\nu_2(t)}$ ..., wo ν_1, ν_2 . . . die Wurzeln der früher besprochenen algebraischen Gleichung sind und somit algebraische Functionen von $a_1 \ldots a_r$ darstellen. Im Uebrigen hängen die φ_k von den λ ab und zwar sind sie lineare homogene Functionen erster Ordnung von den λ_i, etwa $\varphi_k = \sum \omega_{ki}(t)\, \lambda_i$. Hieraus geht nun hervor, dass die Quadraturen

$$\psi_k = \int_0^t \varphi_k(t)\,dt$$

wirklich durchgeführt werden können. Dabei erscheinen die ψ_k als ganze Functionen von t, $\nu_1, \nu_2, \ldots e^{\nu_1 t}, e^{\nu_2 t} \ldots$. Wir erhalten in dieser Weise gewisse Ausdrücke von der Form

$$\psi_k = \sum_1^r \vartheta_{ki}(t)\,\lambda_i$$

und durch Auflösung nach $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ ergiebt sich, dass die λ_i lineare homogene Functionen erster Ordnung von den ψ sind:

$$\lambda_i = \sum \Theta_{ij}(t)\,\psi_j\ ,$$

während die Coefficienten Θ rationale Functionen von t, ν_1, ν_2, $\ldots e^{\nu_1 t}$, $e^{\nu_2 t} \ldots$ sind.

Indem wir nun die vorangehenden Ergebnisse zusammenhalten, erkennen wir, dass

$$\delta(a_i t) = \sum \Theta_{ij}(t\,a_1 \cdots a_r)\,\psi_j$$

die allgemeinste infinitesimale Transformation der zweiten Parametergruppe ist. Es stellen daher

$$\sum \Theta_{ij}(t\,a_1 \cdots a_r)\,\frac{df}{da_i} \qquad (j = 1 \cdots r)$$

r unabhängige infinitesimale Transformationen der zweiten Parametergruppe dar.

Jetzt findet man auch leicht in expliciter Form die infinitesimalen Transformationen der ersten Parametergruppe.

Wir suchen r Grössen $\chi_1 \ldots \chi_r$, welche die Gleichungen

$$\sum \psi_k\,\eta_{ki}(y_1 \cdots y_n) = \sum \chi_k\,\eta_{ki}(y_1 \cdots y_{n-1}\,y_n + t)$$

erfüllen. Es leuchtet dabei ein, dass die χ_k ganz ebenso von der ψ_i abhängen, wie die alten λ_k von den φ_i. Ueberdies erkennt man unmittelbar, dass man zur Bestimmung von den χ_k (resp. λ_k) als Functionen von den ψ_i (resp. φ_i) ein System linearer Differentialgleichungen von der bekannten Form

$$\frac{d\chi_s}{dt} + \sum_\sigma \chi_\sigma\,(-t \sum_i a_i\,c_{i\sigma s} = 0$$

Digitized by Google

zu integriren hat. Es besitzen daher die χ_k die Form:

$$\chi_k = \sum_i \omega_{ki}(-t)\,\psi_i .$$

Unsere Integralgleichungen (7) können daher, wenn von Gliedern zweiter Ordnung in den λ_j abgesehen wird, auch in der Form

$$y_n' = y_n + t + \sum_k \eta_{kn}(y_1 \cdots y_{n-1}\, y_n + t)\cdot \chi_k ,$$
$$y_i' = y_i \qquad + \sum_k \eta_{ki}(y_1 \cdots y_{n-1}\, y_n + t)\cdot \chi_k$$

dargestellt werden.

Führt man daher zuerst die endliche Transformation

$$y_1' = y_1 , \cdots y_{n-1}' = y_{n-1} , \quad y_n' = y_n + t$$

und darnach die infinitesimale Transformation

$$\delta y_i' = \sum_k \chi_k \eta_{ki}(y_1' \cdots y_n')$$

aus, so entsteht die endliche Transformation:

$$t\left\{\frac{df}{dy_n} + \sum_k \lambda_k X_k f\right\},$$

die in den alten Veränderlichen die Form

$$t\left\{\sum a_k X_k f + \sum_k \lambda_k X_k f\right\}$$

besitzt. Nun bestehen die Formeln

$$\chi_k = \sum_i \omega_{ki}(-t)\,\psi_i ,$$
$$\psi_i = \sum_j \vartheta_{ij}(t)\,\lambda_j ,$$

also wird

$$\chi_k = \sum_{i,j} \omega_{ki}(-t)\,\vartheta_{ij}(t)\,\lambda_j ,$$

woraus durch Auflösung

$$\lambda_i = \sum w_{ik}(t\,a_1 \cdots a_r)\,\chi_k .$$

Die allgemeinste inf. Transformation der ersten Parametergruppe hat somit die Form:

$$\sum_{i,k} \chi_k \cdot w_{ik}(t\,a_1 \cdots a_r)\,\frac{df}{da_r} ;$$

Digitized by Google

insbesondere sind

$$\sum w_{ik}(t\, a_1 \cdots a_r) \frac{df}{da_i}$$

r unabhängige infinitesimale Transformationen der zweiten Parametergruppe[1]. *Am besten ertheilt man t den Werth 1.*

Aus dem Vorangehenden fliesst nun unmittelbar das folgende äusserst wichtige Theorem:

Theorem. *Ist die Zusammensetzung einer r-gliedrigen Gruppe, dagegen keine Gruppe von dieser Zusammensetzung bekannt, so ist es immer möglich, durch ausführbare Operationen die infinitesimalen Transformationen der beiden zugehörigen Parametergruppen in endlicher Form zu berechnen. Dabei erscheinen die Coefficienten dieser infinitesimalen Transformationen als rationale Functionen von gewissen algebraischen Functionen der unabhängigen Veränderlichen, sowie von gewissen Exponentialgrössen e^{v_1}, e^{v_2} ...*

Nachdem hiermit die inf. Transformationen der beiden Parametergruppen ohne Integration in *endlicher* Form gefunden sind, bestimmt man durch Quadratur die endlichen Gleichungen der beiden Parametergruppen[2]. Sodann liefert meine alte Theorie ohne Quadratur die endlichen Gleichungen jeder gleichzusammengesetzten transitiven Gruppe.

Theorem. *Kennt man die Zusammensetzung einer r-gliedrigen Gruppe, so findet man durch ausführbare Operationen die endlichen Gleichungen einer jeden gleichzusammengesetzten transitiven Gruppe.*

Verbinde ich hiermit eine wichtige Bemerkung SCHUR's in seiner neuerdings in diesen Berichten erschienenen Note[3], so können die im Vorangehenden besprochenen Quadraturen vermieden werden.

---

1) Ich erinnere an die wichtige, in dieser Arbeit allerdings nicht benutzte Bemerkung ENGEL's, dass die beiden Parametergruppen in meinem Sinne reciproke Gruppen sind.

2) Diese Berichte: Reduct. einer Gruppe auf ihre kan. Form.

3) In dieser Note zeigt SCHUR, dass jede transitive Gruppe eine solche Form erhalten kann, dass ihre infinitesimalen Transformationen als Quotienten von beständig convergenten Potenzreihen erscheinen.

Digitized by Google

A. Mayer, *Allgemeine integrirbare Formen von Differentialgleichungen erster Ordnung und ihre Kriterien.*

Im Folgenden soll der Versuch gemacht werden, Kriterien zu finden, an denen sich erkennen lässt, ob gegebene allgemeine Formen von Differentialgleichungen 1. O. in endlicher Form integrirbar sind, oder nicht. Es handelt sich also um Differentialgleichungen von der Gestalt:

$$Z = \varphi(X) \quad , \tag{1}$$

in denen X und Z irgend zwei gegebene, von einander unabhängige Functionen der drei Argumente

$$x,\ y \text{ und } p \equiv \frac{dy}{dx} \ ,$$

und selbstverständlich nicht beide zugleich frei von p sind, φ aber eine *willkürliche* Function bezeichnet.

Dabei gehe ich von dem Erfahrungssatze aus, *dass alle allgemeinen Formen von Differentialgleichungen 1. O., die man mittelst blosser Quadraturen hat integriren können, solche sind, die schliesslich auf die lineare Differentialgleichung zurückkommen*, wobei natürlich die separirte Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = (x)$$

als ein specieller Fall der linearen betrachtet wird. In einer jedenfalls sehr wichtigen Abhandlung scheint es Herrn W. Maximowitsch sogar gelungen zu sein, streng zu beweisen, dass jede

Digitized by Google

allgemeine Differentialgleichung 1. O., die sich durch eine endliche Anzahl von Quadraturen integriren lässt, nothwendig in eine lineare Differentialgleichung transformirbar sein muss. Der Beweis ist aber bisher leider nur in Russischer Sprache veröffentlicht worden, so dass man vorläufig auf die kurzen Angaben des Verfassers in den *Comptes Rendus* CI p. 809 und auf ein, zum Theil erst durch diese Angaben verständliches Referat in den *Fortschritten der Mathematik*, 1885, p. 305 angewiesen ist.

Durch diesen Satz kommt die aufgeworfene Frage (wenn man von einem in § 1 angegebenen besonderen Falle absieht) darauf zurück, wann eine Differentialgleichung von der oben angegebenen Form auf eine lineare Differentialgleichung 1. O. zurückführbar ist.

Die allgemeinsten Transformationen aber, welche eine Differentialgleichung 1. O. wiederum in eine Differentialgleichung 1. O. überführen, sind die *Berührungs-Transformationen* der Ebene. Um daher allgemein verständlich zu sein, schicke ich zunächst in § 1 diejenigen Sätze aus der Theorie dieser Berührungs-Transformationen voraus, welche im Folgenden benutzt werden. In § 2 folgt dann die Reduction des allgemeinen Problems auf eine bestimmte Form und seine Specialisirung für einen besonderen Fall. Die beiden hieraus entspringenden Aufgaben werden in den §§ 3 und 4 gelöst, während der letzte §, um den Vergleich mit den Angaben von Herrn Maximowitsch zu ermöglichen, auch noch eine andere Lösung des zweiten specielleren Problems auseinandersetzt.

§ 1.

Berührungs- und Punkttransformationen.

Es sei $X(x, y, p)$ eine gegebene Function, welche p wirklich enthält.

Damit dann die drei Gleichungen

$$(1) \quad x' = X(x, y, p) \ , \quad y' = Y(x, y, p) \ , \quad p' = P(x, y, p)$$

eine *Berührungstransformation* bilden, ist nothwendig und hinreichend, dass $F = Y$ irgend eine, von X unabhängige Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung

$$(2) \quad [X, F] \equiv \left(\frac{\partial X}{\partial x} + p\frac{\partial X}{\partial y}\right)\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial X}{\partial p}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial y}\right) = 0 \ ,$$

Digitized by Google

und:

$$P \equiv \frac{\frac{\partial Y}{\partial p}}{\frac{\partial X}{\partial p}} \tag{3}$$

sei, oder nur anders ausgedrückt, es muss, sobald man eben y als unbestimmte Function von x auffasst und $p \equiv \frac{dy}{dx}$ nimmt, bei von X unabhängigem Y aus den Gleichungen (1) folgen:

$$p' = \frac{dy'}{dx'} ,$$

also:

$$\frac{dY}{dX} \equiv P \tag{4}$$

und damit wiederum eine blosse Function von x, y, p sein.

Ist $F = U$ irgend eine von X unabhängige Lösung der Gleichung (2), so ist hiernach bei willkürlichem F:

$$Y = F(X, U) \tag{5}$$

der allgemeinste Werth von Y, während andrerseits die Forderung, dass $F = U$ irgend eine von X unabhängige Lösung der Gleichung (2) sein soll, sich auch so aussprechen lässt: Die Gleichung

$$U = \text{const.} = b$$

muss ein Integral der Differentialgleichung 1. O.

$$X = \text{const.} = a \tag{6}$$

in dem Sinne bilden, dass die beiden Differentialgleichungen 1.O.

$$X = a \quad \text{und} \quad U = b$$

eine gemeinsame Lösung y zulassen. Man findet daher die Function U entweder direct durch Anwendung der Methode der Integration durch Differentiation auf die gegebene Differentialgleichung (6), oder, wenn diese Methode nicht zum Ziele führt, dagegen die Integration dieser Gleichung gelingt, nachdem man sie durch Auflösung nach p auf die Form:

$$p = \psi(x, y, a) \tag{7}$$

Digitized by Google

gebracht hat, indirect dadurch, dass man mittelst der Gleichung (7) aus ihrem Integrale:

$$f(x, y, a) = \text{const.}$$

die Constante a eliminirt. Auf jeden Fall erfordert die Auffindung von U stets eine Integration.

Aus (4) ergiebt sich sofort der eine, bereits von Lagrange hervorgehobene Fall, in welchem eine gegebene Differentialgleichung von der Form:

$$Z = \varphi(X) \tag{8}$$

einer *rein algebraischen Integration* fähig ist. Wenn nämlich für die beiden gegebenen, von einander unabhängigen Functionen X und Z von x, y, p das Differentialverhältniss

$$\frac{dZ}{dX}$$

sich wiederum auf eine blosse Function von x, y, p reducirt, wenn also $[X, Z] \equiv 0$ ist, oder die beiden Gleichungen $x' = X$, $y' = Z$ selbst schon eine Berührungstransformation bestimmen, so erhält man die allgemeine Integralgleichung der Differentialgleichung (8) einfach dadurch, dass man p aus den beiden Gleichungen:

$$X = a \ , \quad Z = b$$

eliminirt, und im Eliminationsresultate $b = \varphi(a)$ setzt. Diesen besonderen Fall schliesse ich daher im Folgenden immer von der Betrachtung aus.

Man erkennt leicht, dass in den Gleichungen (1) einer Berührungstransformation die drei Functionen X, Y, P stets von einander unabhängig sind. Ueberdies folgt unmittelbar aus (2) oder (4), dass mit X zugleich auch Y stets die Variable p enthält.

Ist dagegen X frei von p, so verlangt die Bedingung (2) oder (4), dass auch Y unabhängig von p sei, und die Berührungstransformation (1) reducirt sich auf eine blosse *Punkttransformation*

$$x' = X(x, y) \ , \quad y' = Y(x, y) \ , \quad p' = P(x, y, p) \ ,$$

in der Y jede beliebige, von X unabhängige Function sein kann, und

Digitized by Google

$$P \equiv \frac{\frac{\partial Y}{\partial x} + p\frac{\partial Y}{\partial y}}{\frac{\partial X}{\partial x} + p\frac{\partial X}{\partial y}} \tag{10}$$

ist. Nach (2) und (3) gilt die letzte Formel im Allgemeinen auch für eine wirkliche Berührungstransformation (1); für eine solche wird sie jedoch illusorisch, wenn X und damit auch Y eine blosse Function von p und $xp - y$ ist.

§ 2.

Reduction des Problems auf eine bestimmte Form.

Es seien nun X und Z zwei gegebene, von einander unabhängige Functionen von x, y, p, und so beschaffen, dass $[X, Z]$ nicht Null ist.

Soll sich dann bei willkürlichem φ die Differentialgleichung

$$Z = \varphi(X) \tag{1}$$

mittelst blosser Quadraturen integriren lassen, so können diese Quadraturen nur nach X genommen sein, und es kann folglich die Zurückführung auf eine integrirbare Form nur durch eine solche Berührungs- (oder Punkt-) Transformation

$$x' = L\ ,\quad y' = M\ ,\quad p' = N \tag{A}$$

bewirkt werden, in der L, oder M, oder $N \equiv X$ (resp. wenn man die gegebene Gleichung (1) in der Form $X = \psi(Z)$ zu Grunde legt, $\equiv Z$) ist.

Nun führen aber einerseits die beiden Berührungstransformationen (A) und:

$$x' = M\ ,\quad y' = L\ ,\quad p' = \frac{1}{N} \tag{B}$$

die Gleichung (1) in Differentialgleichungen über, die sich lediglich durch die Bezeichnung der Variabeln von einander unterscheiden. Andrerseits, wenn die Gleichung (1) durch die Berührungstransformation

$$x' = L\ ,\quad y' = M\ ,\quad p' = N \tag{C}$$

übergeht in:

$$Z'(x', y', p') = \varphi(p')\ , \tag{1'}$$

so wird sie durch die aus der Verbindung der beiden Berührungstransformationen (C) und

(C) $$x'' = p' \ , \quad y'' = x'p' - y' \ , \quad p'' = x'$$

entspringende Berührungstransformation:

$$x'' = X \ , \quad y'' = LX - M \ , \quad p'' = L$$

übergeführt in:

(1'') $$Z'(p'', x''p'' - y'', x'') = \varphi(x'') \ .$$

Kann man daher die Gleichung (1') integriren, so gilt immer auch dasselbe von der Gleichung (1'').

Man sieht somit: Ist die gegebene Differentialgleichung (1) überhaupt durch blosse Quadraturen integrirbar, so muss sich dies stets durch eine Berührungstransformation von der Form erreichen lassen:

(2) $$x' = X \ , \quad y' = Y \ , \quad p' = P \ ,$$

in der X eben diejenige gegebene Function ist, welche das Argument der willkürlichen Function φ bildet.

Nach unserer Grundhypothese werden wir also dann und nur dann erwarten dürfen, die Gleichung (1) in endlicher Form integriren zu können, wenn dieselbe durch eine Berührungstransformation von der Form (2) auf eine lineare Differentialgleichung zurückführbar ist.

Wird nun durch Substitution der Werthe von x, y, p, die sich aus der Berührungstransformation (2) ergeben,

$$Z(x, y, p) = Z'(x', y', p') \ ,$$

so dass umgekehrt:

(D) $$Z'(X, Y, P) \equiv Z(x, y, p)$$

ist, so führt diese Berührungstransformation die Gleichung (1) über in:

$$Z'(x', y', p') = \varphi(x') \ .$$

Soll sich aber diese Gleichung für jedes φ auf eine lineare Differentialgleichung reduciren, so muss ihre Auflösung nach $p' \equiv \frac{dy'}{dx'}$ nothwendig die Form besitzen:

$$p' = y' \Phi(x', \varphi(x')) + \Psi(x', \varphi(x')) \ ,$$

und dann ist:

$$P = Y\Phi(X, Z) + \Psi(X, Z)$$

die Auflösung der Identität (D) nach P.

Digitized by Google

Damit also die gegebene Gleichung (1) *für jede willkürliche Function* φ auf eine lineare Differentialgleichung zurückführbar sei, ist nothwendig und hinreichend, *dass eine Berührungstransformation von der Form existire:*

$$(3)\quad x' = X\ ,\quad y' = Y\ ,\quad p' = P \equiv Y\Phi(X, Z) + \Psi(X, Z)\ ,$$

und es kommt nunmehr darauf an, die Bedingungen zu entdecken, unter denen sich eine solche Berührungstransformation aus den beiden gegebenen Functionen X und Z zusammensetzen lässt, und zugleich aus diesen Bedingungen die drei Unbekannten Y, $\Phi(X, Z)$ und $\Psi(X, Z)$ der Transformation zu berechnen.

Sei nun zunächst X nicht frei von p. Dann ist die fragliche Transformation (3) nothwendig eine wirkliche *Berührungstransformation*, und wenn man *durch Integration der Differentialgleichung*

$$X = \text{const.}$$

irgend eine von X unabhängige Lösung $F = U$ der Gleichung $[XF] = 0$ gefunden hat, so weiss man, dass Y die Form haben muss

$$(4)\qquad Y = F(X, U)$$

und dabei nicht frei von U sein darf. Aus (4) folgt zugleich:

$$(5)\qquad P \equiv \frac{\dfrac{\partial Y}{\partial p}}{\dfrac{\partial X}{\partial p}} = \frac{\partial F}{\partial X} + \frac{\partial F}{\partial U}\,\frac{\dfrac{\partial U}{\partial p}}{\dfrac{\partial X}{\partial p}}\ .$$

Nun kann Z keine blosse Function von X und U sein, da sonst gegen die Voraussetzung $[XZ] \equiv 0$ wäre. Mit der Auffindung von U hat man daher drei unabhängige Functionen von x, y, p gewonnen, die Functionen X, Z, U. Man kann also durch bloss algebraische Operationen, die ich hier als wirklich ausführbar voraussetze, umgekehrt x, y, p durch X, U, Z ausdrücken, und damit auch:

$$(6)\qquad R \equiv \frac{\dfrac{\partial U}{\partial p}}{\dfrac{\partial X}{\partial p}}$$

Digitized by Google

als Function von X, U, Z berechnen, so dass im Folgenden R als eine gegebene Function von X, U, Z betrachtet werden darf. Und zwar ist, weil die Gleichungen:

$$x' = X \ , \quad y' = U \ , \quad p' = R$$

selbst eine Berührungstransformation bilden, *diese Function R keinesfalls frei von Z.*

Nach (3) und (5) ist hiermit unsere Frage auf die folgende zurückgeführt:

I. *Unter welchen Bedingungen und auf welche Weise lassen sich die drei Functionen $F(X, U)$, $\Phi(X, Z)$, $\Psi(X, Z)$, die von den drei unabhängigen Variabeln X, U, Z je nur die beiden als Argumente angegebenen enthalten dürfen, so bestimmen, dass identisch:*

$$\frac{\partial F}{\partial X} + R(X, U, Z)\frac{\partial F}{\partial U} = F(X, U)\,\Phi(X, Z) + \Psi(X, Z)$$

und dabei die rechte Seite weder von U noch von Z frei wird.

Die letzte Forderung fasst die beiden, dass die Variable U in der Function F, und die Variable Z wenigstens in einer der beiden Functionen Φ und Ψ wirklich vorkommen muss, in eine zusammen.

Jedes Tripel von Functionen F, Φ, Ψ, welches den angegebenen Forderungen genügt, liefert eine Berührungstransformation:

$$x' = X \ , \quad y' = F(X, U) \ , \quad p' = F(X, U)\,\Phi(X, Z) + \Psi(X, Z) \ ,$$

welche die gegebene Gleichung (1) in die lineare Differentialgleichung transformirt:

$$\frac{dy'}{dx'} = y'\Phi(x', \varphi(x')) + \Psi(x', \varphi(x')) \ .$$

In dem Integrale dieser transformirten Differentialgleichung braucht man daher nur noch

$$x' = X \ , \quad y' = F(X, U)$$

zu setzen, um ein Integral der gegebenen Gleichung (1), d. h. eine solche Differentialgleichung 1. O. mit einer willkürlichen Constante zu erhalten, die mit der gegebenen eine Lösung y gemein hat. Ist im Besondern $\Phi \equiv 0$, so reducirt sich dieses Integral einfach auf

Digitized by Google

$$(7) \qquad F(X, U) - \int \Psi(X, \varphi(X))\, dX = \text{const.}$$

Ist dagegen zweitens X eine blosse Function von x und y, so kann die verlangte Transformation (3) nur eine *Punkttransformation* sein. Wir können dann irgend eine willkürlich gewählte, von X unabhängige Function der Variabeln x, y für U nehmen, damit Y die Form (4) geben und wieder uns x, y, p durch X, U, Z ausgedrückt denken. Es ändert sich dann nur das, dass nunmehr in den Gleichungen (3)

$$P \equiv \frac{\frac{\partial Y}{\partial x} + p \frac{\partial Y}{\partial y}}{\frac{\partial X}{\partial x} + p \frac{\partial X}{\partial y}}$$

wird, und daher die Formel (6) zu ersetzen ist durch die

$$(7') \qquad R \equiv \frac{\frac{\partial U}{\partial x} + p \frac{\partial U}{\partial y}}{\frac{\partial X}{\partial x} + p \frac{\partial X}{\partial y}} .$$

Sonst aber führt die Forderung einer Punkttransformation von der Form (3) genau wieder auf dasselbe Problem I und der einzige wesentliche Unterschied ist der, dass man die Function U jetzt willkürlich wählen kann und *nicht mehr erst durch eine Integration zu bestimmen braucht.*

Das dürfte wohl Alles sein, was sich über den Fall, wo X nur von x und y abhängt, sagen lässt, solange man über die Form der Function Z keine besonderen Voraussetzungen macht. Nimmt man aber an, was in diesem Falle gerade sehr häufig vorkommt, dass Z eine linear gebrochene Function von p sei, also die Form habe:

$$(E) \qquad Z \equiv \frac{X_1 p - Y_1}{X_2 p - Y_2} ,$$

wo X_1, Y_1, X_2, Y_2 gegebene Functionen von x, y sind, deren Determinante

$$X_1 Y_2 - X_2 Y_1 \not\equiv 0$$

ist, so erhält auch die Frage, ob eine Punkttransformation von der Form (3) existirt, ob es also eine von X unabhängige Function Y giebt, welche die Forderung:

$$\text{(F)} \qquad \frac{dY}{dX} \equiv \frac{\frac{\partial Y}{\partial x} + p\frac{\partial Y}{\partial y}}{\frac{\partial X}{\partial x} + p\frac{\partial X}{\partial y}} = Y\Phi(X, Z) + \Psi(X, Z)$$

identisch erfüllt, eine besondere Form; eine Form, welche zwar die theoretische Lösung etwas erschwert, dafür aber zu Formeln führt, die für die Anwendungen weit bequemer und geeigneter sind.

Nach (E) ist nämlich dann:

$$p \equiv \frac{Y_1 - Y_2 Z}{X_1 - X_2 Z},$$

daher wird:

$$\text{(G)} \qquad \frac{dY}{dX} \equiv \frac{\mu_1 - \mu_2 Z}{\lambda_1 - \lambda_2 Z},$$

wo:

$$\lambda_1 \equiv X_1\frac{\partial X}{\partial x} + Y_1\frac{\partial X}{\partial y}, \quad \lambda_2 \equiv X_2\frac{\partial X}{\partial x} + Y_2\frac{\partial X}{\partial y},$$

$$\mu_1 \equiv X_1\frac{\partial Y}{\partial x} + Y_1\frac{\partial Y}{\partial y}, \quad \mu_2 \equiv X_2\frac{\partial Y}{\partial x} + Y_2\frac{\partial Y}{\partial y},$$

also:

$$\mu_1\lambda_2 - \mu_2\lambda_1 \equiv (X_1 Y_2 - X_2 Y_1)\left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}\right) \not\equiv 0$$

ist, und im Besonderen λ_1 und λ_2 nicht beide gleichzeitig Null sein können. Man kann daher unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, dass $\lambda_1 \not\equiv 0$ sei, oder $X =$ const. kein Integral der Differentialgleichung $X_1 p - Y_1 = 0$ sei, und kann folglich die Formel (G) einfacher so schreiben:

$$\text{(H)} \qquad \frac{dY}{dX} \equiv \frac{m_1 - m_2 Z}{1 - l_2 Z} \equiv M,$$

wo:

$$m_1 \equiv \frac{\mu_1}{\lambda_1}, \quad m_2 \equiv \frac{\mu_2}{\lambda_1}, \quad l_2 \equiv \frac{\lambda_2}{\lambda_1},$$

$$\text{also} \quad m_2 - m_1 l_2 \not\equiv 0 \quad \text{ist.}$$

Soll nun, nachdem man x und y durch die beiden unabhängigen Functionen X und Y ausgedrückt hat, die Forderung (F) erfüllt

Digitized by Google

werden, so muss sich M auf eine lineare Function von Y reduciren, also für jedes Z

$$\frac{\partial^2 M}{\partial Y^2} \equiv 0$$

sein, woraus leicht folgt, dass m_1, m_2, l_2 die Form haben müssen:

$$\text{(J)} \qquad \begin{cases} m_1 \equiv Y\vartheta_1(X) + \zeta_1(X) \ , \\ m_2 \equiv Y\vartheta_2(X) + \zeta_2(X) \ , \\ l_2 \equiv f(X) \ . \end{cases}$$

Die Identität (H) aber ergiebt:

$$Z \equiv \frac{dY - m_1\,dX}{l_2\,dY - m_2\,dX} \ ,$$

und wenn man hierin die Werthe (J) einsetzt und sich der Grundvoraussetzung (E) erinnert, so sieht man, dass die Differentialgleichung:

$$\text{(8)} \qquad \frac{X_1\,dy - Y_1\,dx}{X_2\,dy - Y_2\,dx} = \varphi(X) \ ,$$

in der $X =$ const. kein Integral der Differentialgleichung:

$$X_1\,dy - Y_1\,dx = 0$$

ist [1]), bei willkürlichem φ dann und nur dann durch eine Punkttransformation auf die lineare Form gebracht werden kann, wenn die Transformation möglich ist:

$$\text{(K)} \qquad \frac{X_1\,dy - Y_1\,dx}{X_2\,dy - Y_2\,dx} \equiv \frac{dY - [Y\vartheta_1(X) + \zeta_1(X)]\,dX}{f(X)\,dY - [Y\vartheta_2(X) + \zeta_2(X)]\,dX} \ .$$

Während aber das allgemeine Problem I nur drei Unbekannte enthält, treten hier dagegen fünf Unbekannte auf, nämlich Y, $f(X)$, $\vartheta_1(X)$, $\zeta_1(X)$, $\vartheta_2(X)$ und $\zeta_2(X)$. Dies zeigt unmittelbar an, dass die Forderung (K) noch zu viel Unbekannte, d. h. mehr enthält, als durch sie bestimmt werden können. In der That braucht man auch nur

1) Besässe diese Gleichung zufällig doch das Integral $X =$ const., so hätte man nur die Differentialgleichung (8) in der Form:

$$\frac{X_2\,dy - Y_2\,dx}{X_1\,dy - Y_1\,dx} = \frac{1}{\varphi(X)}$$

zu Grunde zu legen.

$$v = Ye^{-\int \vartheta_1(X)dX} - \int \xi_1(X) e^{-\int \vartheta_1(X)dX} dX$$

an Stelle von Y als neue Variable einzuführen. Dann nimmt, wenn man der Symmetrie halber noch u für X schreibt und zugleich die Coefficienten linker Hand etwas anders bezeichnet, die Transformation (K) die einfachere Form an:

$$\text{II.} \qquad \frac{Xdy - Ydx}{X_1 dy - Y_1 dx} \equiv \frac{dv}{f(u)dv - (v\psi(u) + \chi(u))du},$$

die nur noch drei unbekannte Functionen enthält.

Kann man diese Transformation ausführen, so verwandelt sie die gegebene Differentialgleichung

$$\frac{Xdy - Ydx}{X_1 dy - Y_1 dx} = \varphi(u)$$

in die lineare Gleichung

$$\frac{dv}{du} = \frac{v\psi(u) + \chi(u)}{1 - f(u)\varphi(u)}$$

und gestattet also sofort das Integral der gegebenen Gleichung hinzuschreiben.

Es sind nunmehr die beiden Probleme I und II nach einander zu lösen.

§ 3.

Allgemeine Kriterien der Integrirbarkeit.

Bevor wir an die allgemeine Lösung des Problems I gehen, wird es zweckmässig sein, zuerst denjenigen speciellen Fall desselben zu erledigen, der der Annahme $\Phi \equiv 0$ entspricht, weil dieser im allgemeinen Probleme gewissermassen als Ausnahmefall auftritt.

Es fragt sich also zuerst, *wann und wie lassen sich die beiden Functionen* $F(X, U)$ *und* $\Psi(X, Z)$ *so bestimmen, dass identisch:*

$$(1) \qquad \frac{\partial F(X, U)}{\partial X} + R(X, U, Z)\frac{\partial F(X, U)}{\partial U} = \Psi(X, Z)$$

und zugleich weder F *von* U, *noch* Ψ *von* Z *frei wird?*

Digitized by Google

Damit es nun eine von U freie Function Ψ gebe, für welche die Gleichung (1) eine Identität wird, ist nothwendig und hinreichend, dass identisch:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial X\,\partial U} + R\frac{\partial^2 F}{\partial U^2} + \frac{\partial R}{\partial U}\frac{\partial F}{\partial U} = 0 \ ,$$

oder, wenn man:

$$\log\frac{\partial F}{\partial U} = V \tag{2}$$

setzt, dass:

$$\frac{\partial V}{\partial X} + R\frac{\partial V}{\partial U} + \frac{\partial R}{\partial U} = 0 \tag{3}$$

sei. Damit ferner der hierdurch bestimmte Werth von $\frac{\partial V}{\partial X}$ frei von Z werde, ist nothwendig und hinreichend, dass $\frac{\partial V}{\partial U}$ frei von Z, und

$$\frac{\partial R}{\partial Z}\frac{\partial V}{\partial U} + \frac{\partial^2 R}{\partial U\,\partial Z} = 0 \ ,$$

d. h. weil $\frac{\partial R}{\partial Z} \not\equiv 0$ ist, dass

$$\frac{\partial V}{\partial U} = -\frac{\partial \log\frac{\partial R}{\partial Z}}{\partial U} \tag{4}$$

und:

$$\frac{\partial^2 \log\frac{\partial R}{\partial Z}}{\partial U\,\partial Z} \equiv 0 \tag{5}$$

sei. So oft also die Bedingung (5) erfüllt ist, sind die rechten Seiten der Gleichung (4) und der aus (3) und (4) folgenden Gleichung:

$$\frac{\partial V}{\partial X} = -\frac{\partial R}{\partial U} + R\frac{\partial \log\frac{\partial R}{\partial X}}{\partial U} \tag{6}$$

frei von Z. Damit es aber eine Function V gebe, welche diese beiden Gleichungen erfüllt, müssen dieselben überdies noch der Bedingung:

Digitized by Google

$$\frac{\partial^2 V}{\partial U\,\partial X} = \frac{\partial^2 V}{\partial X\,\partial U}$$

genügen, muss also

$$(7)\qquad \frac{\partial}{\partial U}\left\{\frac{\partial \log \frac{\partial R}{\partial Z}}{\partial X} + R\,\frac{\partial \log \frac{\partial R}{\partial Z}}{\partial U} - \frac{\partial R}{\partial U}\right\} \equiv 0$$

sein.

Sind die beiden Bedingungen (5) und (7) erfüllt, so bestimmt sich V durch eine Quadratur aus (4) und (6), worauf F selbst durch eine zweite Quadratur aus (2) erhalten wird, und zwar als eine Function, die niemals frei von U sein kann. Da endlich der aus (4) und (6) gewonnene Werth von V die Bedingung (3) erfüllt, so wird für den aus ihm erhaltenen Werth von F die linke Seite der Gleichung (1) frei von U und diese Gleichung bestimmt also unmittelbar die Unbekannte ${}^1\!\Psi(X, Z)$. Sie ergiebt überdies, nach Z differentiirt,

$$\frac{\partial\,{}^1\!\Psi}{\partial Z} = \frac{\partial R}{\partial Z}\,\frac{\partial F}{\partial U}\,,$$

also enthält ${}^1\!\Psi$ stets die Variable Z.

Die beiden Bedingungen (5) *und* (7) *sind demnach gleichzeitig nothwendig und hinreichend für die Möglichkeit unseres Problems.*

Da es für unsern Zweck genügt, nicht die allgemeinsten, sondern nur irgend zwei Functionen F und ${}^1\!\Psi$ zu kennen, welche die Forderung (1) erfüllen, so wird man die willkürliche Constante, die bei der Berechnung von V, und die willkürliche Function von X, die bei der Berechnung von F additiv hinzugefügt werden kann, einfach weglassen. —

Kommen wir nunmehr zu dem allgemeinen Probleme, *die drei Functionen* $F(X, U)$, $\Phi(X, Z)$ *und* ${}^1\!\Psi(X, Z)$ *so zu bestimmen, dass identisch:*

$$(8)\qquad \frac{\partial F}{\partial X} + R(X, U, Z)\,\frac{\partial F}{\partial U} = F(X, U)\,\Phi(X, Z) + {}^1\!\Psi(X, Z)$$

und dabei die rechte Seite weder von U *noch von* Z *frei werde!*

Zur Identität (8) ist zunächst nothwendig und hinreichend, dass Φ frei von U, und identisch:

Digitized by Google

$$\frac{\partial^2 F}{\partial X \partial U} + R\frac{\partial^2 F}{\partial U^2} + \frac{\partial R}{\partial U}\frac{\partial F}{\partial U} = \Phi\frac{\partial F}{\partial U} .$$

oder:

$$\frac{\partial \log \frac{\partial F}{\partial U}}{\partial X} + R\frac{\partial \log \frac{\partial F}{\partial U}}{\partial U} + \frac{\partial R}{\partial U} = \Phi \tag{9}$$

sei, und hierzu wieder ist die Bedingung

$$\frac{\partial^2 \log \frac{\partial F}{\partial U}}{\partial X \partial U} + \frac{\partial}{\partial U}\left(R\frac{\partial \log \frac{\partial F}{\partial U}}{\partial U} + \frac{\partial R}{\partial U}\right) = 0 ,$$

oder:

$$\frac{\partial \log \frac{\partial F}{\partial U}}{\partial U} = V \tag{10}$$

gesetzt:

$$\frac{\partial V}{\partial X} = -R\frac{\partial V}{\partial U} - \frac{\partial R}{\partial U}V - \frac{\partial^2 R}{\partial U^2} \tag{11}$$

nothwendig und hinreichend. Damit weiter dieser Werth von $\frac{\partial V}{\partial X}$ frei von Z sei, ist nothwendig und hinreichend, dass $\frac{\partial V}{\partial U}$ und V frei von Z, und

$$\frac{\partial R}{\partial Z}\frac{\partial V}{\partial U} + \frac{\partial^2 R}{\partial U \partial Z}V + \frac{\partial^3 R}{\partial U^2 \partial Z} = 0 ,$$

also:

$$\frac{\partial V}{\partial U} = -\frac{1}{\frac{\partial R}{\partial Z}}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial U \partial Z}V + \frac{\partial^3 R}{\partial U^2 \partial Z}\right) \tag{12}$$

sei, und dieser Ausdruck endlich ist frei von Z, sobald V selbst frei von Z ist und die Relation besteht:

$$V\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{1}{\frac{\partial R}{\partial Z}}\frac{\partial^2 R}{\partial U \partial Z}\right) + \frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{1}{\frac{\partial R}{\partial Z}}\frac{\partial^3 R}{\partial U^2 \partial Z}\right) = 0 . \tag{13}$$

Nehmen wir nun zunächst an, dass

$$(14) \qquad \frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{1}{\frac{\partial R}{\partial Z}}\,\frac{\partial^2 R}{\partial U\,\partial Z}\right) \equiv \frac{\partial^2 \log \frac{\partial R}{\partial Z}}{\partial U\,\partial Z} \not\equiv 0$$

sei. Dann ergiebt die Bedingung (13)

$$(15) \quad V = -\,\frac{\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{1}{\frac{\partial R}{\partial Z}}\,\frac{\partial^3 R}{\partial U^2\,\partial Z}\right)}{\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{1}{\frac{\partial R}{\partial Z}}\,\frac{\partial^2 R}{\partial U\,\partial Z}\right)} \equiv -\,\frac{\partial \log\left\{\left(\frac{\partial R}{\partial Z}\right)^2 \frac{\partial^2 \log \frac{\partial R}{\partial Z}}{\partial U\,\partial Z}\right\}}{\partial U}\,.$$

Die Forderung, dass V selbst frei von Z sei, verlangt daher:

$$(16) \qquad \frac{\partial^2}{\partial U\,\partial Z} \log\left\{\left(\frac{\partial R}{\partial Z}\right)^2 \frac{\partial^2 \log \frac{\partial R}{\partial Z}}{\partial U\,\partial Z}\right\} \equiv 0\,.$$

Ueberdies muss aber der Werth (15) *von* V *den beiden Gleichungen* (12) *und* (11) *identisch genügen.* Dies giebt zusammen *drei Bedingungen, die bei der Voraussetzung* (14) *nothwendig und hinreichend sind für die Möglichkeit unseres Problems.*

Sind sie erfüllt, so liefert die Gleichung (15) unmittelbar V. Durch eine erste Quadratur erhält man hierauf $\log \frac{\partial F}{\partial U}$ aus (10) und damit zugleich Φ aus (9). Eine zweite Quadratur führt dann von $\log \frac{\partial F}{\partial U}$ zu F selbst, worauf schliesslich die Gleichung (8) die Function Ψ unmittelbar bestimmt. Dabei kann nach (10) F sich niemals auf eine blosse Function von X reduciren, und da aus (8)

$$F\,\frac{\partial \Phi}{\partial Z} + \frac{\partial \Psi}{\partial Z} = \frac{\partial R}{\partial Z}\,\frac{\partial F}{\partial U}$$

folgt, so muss auch von den beiden Functionen Φ und Ψ wenigstens eine die Variable Z wirklich enthalten.

Die additiven willkürlichen Functionen von X, die man jeder der beiden Quadraturen hinzufügen kann, können wieder $= 0$ gesetzt werden.

Digitized by Google

Ist dagegen:

$$\frac{\partial^2 \log \frac{\partial R}{\partial Z}}{\partial U \partial Z} \equiv 0 \quad , \tag{5}$$

hat also R die Form:

$$R = \vartheta(X, Z)\Theta(X, U) + \Theta_1(X, U) \quad , \tag{5'}$$

so wird die Gleichung (13) für jedes V eine Identität. Die Werthe (12) und (11) der partiellen Differentialquotienten von V werden also jetzt frei von Z, sobald V selbst frei von Z ist. Setzt man aber für den Augenblick:

$$R\frac{\partial^2 R}{\partial U \partial Z} - \frac{\partial R}{\partial Z}\frac{\partial R}{\partial U} = Q \quad ,$$

so geben die Gleichungen (12) und (11):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial Z}\dfrac{\partial V}{\partial U} + \dfrac{\partial^2 R}{\partial Z \partial U} V + \dfrac{\partial^3 R}{\partial Z \partial U^2} = 0 \quad , \\ \dfrac{\partial R}{\partial Z}\dfrac{\partial V}{\partial X} - QV - \dfrac{\partial Q}{\partial U} = 0 \quad . \end{cases} \tag{17}$$

Daraus folgt durch Differentiation nach X und U:

$$\frac{\partial R}{\partial Z}\frac{\partial^2 V}{\partial U \partial X} + \frac{\partial^2 R}{\partial Z \partial U}\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial^2 R}{\partial Z \partial X}\frac{\partial V}{\partial U} + \frac{\partial^3 R}{\partial Z \partial U \partial X} V + \frac{\partial^4 R}{\partial Z \partial U^2 \partial X} = 0 \, ,$$

$$\frac{\partial R}{\partial Z}\frac{\partial^2 V}{\partial X \partial U} + \frac{\partial^2 R}{\partial Z \partial U}\frac{\partial V}{\partial X} - Q\frac{\partial V}{\partial U} - \frac{\partial Q}{\partial U} V - \frac{\partial^2 Q}{\partial U^2} = 0 \quad ,$$

und wenn man diese beiden Gleichungen von einander abzieht:

$$\left(\frac{\partial^2 R}{\partial Z \partial X} + Q\right)\frac{\partial V}{\partial U} + \left(\frac{\partial^3 R}{\partial Z \partial X \partial U} + \frac{\partial Q}{\partial U}\right)V + \frac{\partial^4 R}{\partial Z \partial X \partial U^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial U^2} = 0 \, .$$

Führt man also noch die weiteren Abkürzungen ein:

$$\frac{\partial \log \frac{\partial R}{\partial Z}}{\partial X} + R\frac{\partial \log \frac{\partial R}{\partial Z}}{\partial U} - \frac{\partial R}{\partial U} = P$$

und:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial Z \partial X} + Q = S \ ,$$

aus denen sich ergiebt:

$$(18) \qquad S = \frac{\partial^2 R}{\partial Z \partial X} + R \frac{\partial^2 R}{\partial Z \partial U} - \frac{\partial R}{\partial Z} \frac{\partial R}{\partial U} \equiv \frac{\partial R}{\partial Z} P \ ,$$

so erhält man:

$$S \frac{\partial V}{\partial U} + \frac{\partial S}{\partial U} V + \frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = 0 \ ,$$

und wenn man hieraus mit Hülfe der ersten Gleichung (17) $\frac{\partial V}{\partial U}$ eliminirt:

$$\left(\frac{\partial R}{\partial Z} \frac{\partial S}{\partial U} - S \frac{\partial^2 R}{\partial Z \partial U} \right) V + \frac{\partial R}{\partial Z} \frac{\partial^2 S}{\partial U^2} - S \frac{\partial^3 U}{\partial Z \partial U^2} = 0 \ .$$

Nach (18) aber ist:

$$\frac{\partial R}{\partial Z} \frac{\partial S}{\partial U} - S \frac{\partial^2 R}{\partial Z \partial U} \equiv \left(\frac{\partial R}{\partial Z} \right)^2 \frac{\partial P}{\partial U} \ .$$

Wäre also der Factor von V in der letzten Gleichung Null, so wäre nothwendig auch

$$\frac{\partial P}{\partial U} \equiv 0 \ ,$$

d. h. aber nach der Definition von P, es würde mit der Bedingung (5) zugleich die frühere Bedingung (7) erfüllt sein, und man könnte daher die erste Methode dieses § anwenden. Wir können daher annehmen, dass jener Factor nicht Null ist, und dann ergiebt die letzte Gleichung

$$V = - \frac{\partial}{\partial U} \log \left(\frac{\partial R}{\partial Z} \frac{\partial S}{\partial U} - S \frac{\partial^2 R}{\partial Z \partial U} \right) \ , \quad \text{d. i.}$$

$$(19) \quad V = - 2 \frac{\partial \log \frac{\partial R}{\partial Z}}{\partial U} - \frac{\partial}{\partial U} \log \left\{ \frac{\partial \log \frac{\partial R}{\partial Z}}{\partial X} + R \frac{\partial \log \frac{\partial R}{\partial Z}}{\partial U} - \frac{\partial R}{\partial U} \right\} .$$

Man erkennt, und zwar wohl am Leichtesten aus der Form (5′) von R, dass in Folge der Voraussetzung (5) dieser Werth von V

Digitized by Google

frei von Z ist. Daher ist *im Falle* (5) nur noch erforderlich, *dass der Werth* (19) *von* V *den beiden Gleichungen* (17) *oder also den Gleichungen* (12) *und* (14) *identisch genüge.* Auch jetzt wieder sind also *drei Bedingungen* nothwendig und hinreichend für die Lösbarkeit des Problems. Sind sie erfüllt, so ergiebt sich die Lösung ganz auf dem früheren Wege.

Damit ist die allgemeine Frage, wann und wie sich die gegebene Differentialgleichung

$$Z = \varphi(X) \quad , \tag{20}$$

in welcher $[X, Z] \not\equiv 0$ ist, bei willkürlichem φ auf eine (separirte oder) lineare Differentialgleichung 1. O. zurückführen lässt, vollständig erledigt.

Allerdings verlangt die gewonnene Methode, sobald man sie auf einen solchen gegebenen Fall anwenden will, in welchem X nicht frei von p ist, zunächst die Auffindung einer von X unabhängigen Lösung $F = U$ der Gleichung $[X, F] = 0$, d. h. die Integration der Differentialgleichung 1. O.

$$X = \text{const.}$$

Nur in dem Falle, wo X eine blosse Function von x und y ist, kann man jede willkürlich gewählte Function dieser beiden Variabeln, sobald sie nur unabhängig von X ist, für U nehmen.

Hat man aber U, so kommt es, um zunächst die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Zurückführung zu erkennen, nur darauf an:

$$R \equiv \frac{\frac{\partial U}{\partial p}}{\frac{\partial X}{\partial p}} \quad ,$$

resp., wenn X und also auch U frei von p ist:

$$R \equiv \frac{\frac{\partial U}{\partial x} + p \frac{\partial U}{\partial y}}{\frac{\partial X}{\partial x} + p \frac{\partial X}{\partial y}}$$

als Function von X, U, Z zu berechnen. Ist dies bewirkt, so wird man zunächst zusehen, ob der erhaltene Werth von R den

Digitized by Google

Bedingungen (5) und (7) genügt. Erfüllt er diese Bedingungen, so bestimmt man auf dem, im Anfange dieses § auseinandergesetzten Wege durch zwei successive Quadraturen die beiden Functionen $F(X, U)$ und $\Psi(X, Z)$, und hat nach der Formel (7) des vorigen § damit zugleich in:

$$F(X, U) - \int \Psi(X, \varphi(X))\, dX = \text{const.}$$

das Integral der vorgelegten Differentialgleichung gewonnen. —

Differentialgleichungen, welche sich durch diese Methode integriren lassen, sind z. B. die folgenden:

$$\frac{xp - y}{\sqrt{1 + p^2}} = \varphi(y\sqrt{1 + p^2}) \ ,$$

$$xp + \alpha y + \beta = \varphi(x \cdot p^n) \ ,$$

$$xp - ny = y^m \varphi(p^n \cdot y^{1-n}) \ ,$$

sind merkwürdiger Weise überhaupt alle diejenigen Differentialgleichungen 1. O., welche Malmsten in seinem *Mémoire sur l'intégration des équations différentielles, Liouville J.* 1862 auf einem ganz andern, höchst sinnreichen Wege integrirt hat, der aber den grossen Nachtheil besitzt, dass er in jedem einzelnen Beispiele besondere Kunstgriffe erfordert. —

Genügt aber der erhaltene Werth von R nicht den beiden Bedingungen (5) und (7), so wird man, je nachdem er der Bedingung (5) widerspricht, oder dieselbe erfüllt, untersuchen, ob er der Bedingung (16) und den beiden, aus (15), (12') und (11) entspringenden Bedingungen Genüge leistet, oder ob er die beiden, aus (19), (12) und (11) hervorgehenden Bedingungen erfüllt. Ist das eine oder andere der Fall, so bestimmt man nach der im Anschluss an die Gleichung (15) auseinandergesetzten Methode wiederum mittelst zweier successiver Quadraturen die drei Functionen $F(X, U)$, $\Phi(X, Z)$, $\Psi(X, Z)$, und braucht dann nur noch in dem Integrale der linearen Differentialgleichung

$$\frac{dy'}{dx'} = y' \Phi(x', \varphi(x')) + \Psi(x', \varphi(x'))$$

für x' und y' zu setzen X und $F(X, U)$, um ein Integral der gegebenen Differentialgleichung zu erhalten.

Erfüllt dagegen der erhaltene Werth von R weder die einen, noch die andern Bedingungen, so bleibt immerhin noch die Mög-

Digitized by Google

lichkeit, dass die Methode nach Vertauschung von X und Z, d. h. dann zum Ziele führen könnte, wenn man die gegebene Gleichung in der Form

$$X = \psi(Z)$$

zu Grunde legt. Ist aber auch dieses nicht der Fall, so ist es überhaupt unmöglich, bei willkürlichem φ oder ψ die gegebene Gleichung auf eine lineare Differentialgleichung 1. O. zurückzuführen.

§ 4.

Kriterien der Integrirbarkeit für Differentialgleichungen von der Form:

$$\frac{X\,dy - Y\,dx}{X_1\,dy - Y_1\,dx} = \varphi(u)\,.$$

Wir kommen nun an die zweite, speciellere Aufgabe von § 2: zu untersuchen, welche Bedingungen zwischen den fünf gegebenen Functionen X, Y, X_1, Y_1 und u von x, y bestehen müssen damit die Transformation:

$$\text{II.} \qquad \frac{X\,dy - Y\,dx}{X_1\,dy - Y_1\,dx} \equiv \frac{dv}{f(u)\,dv - (v\psi(u) + \chi(u))\,du}$$

möglich werde. Dabei ist $XY_1 - X_1 Y \not\equiv 0$ und es irwd vorausgesetzt, dass

$$X\frac{\partial u}{\partial x} + Y\frac{\partial u}{\partial y} \not\equiv 0\,,$$

oder $u =$ const. kein Integral der Differentialgleichung sei:

$$X\,dy - Y\,dx = 0\,.$$

Auch hier wieder ist es vortheilhaft, zuerst den Fall $\psi(u) \equiv 0$ besonders zu behandeln, also mit der einfacheren Transformation:

$$(1 \qquad \frac{X\,dy - Y\,dx}{X_1\,dy - Y_1\,dx} \equiv \frac{dv}{f(u)\,dv - \chi(u)\,du}$$

zu beginnen.

Die Forderung (1) verlangt, dass identisch:

$$(2) \qquad dv = L\,(X\,dy - Y\,dx)$$

und

$$f(u)\,dv - \chi(u)\,du = L\,(X_1\,dy - Y_1\,dx)$$

sei. Die zweite Bedingung aber verwandelt sich, wenn man dv mittelst der ersten aus ihr wegschafft, in:

$$\chi(u)\,du = L\,\{(Xf(u) - X_1)\,dy - (Yf(u) - Y_1)\,dx\} \tag{3}$$

und zerfällt demnach in die beiden:

$$\chi(u)\frac{\partial u}{\partial y} = \quad L(Xf(u) - X_1)\ .$$

$$\chi(u)\frac{\partial u}{\partial x} = -L(Yf(u) - Y_1)\ .$$

Eliminirt man hieraus einmal $\chi(u)$ und einmal $f(u)$, so erhält man die folgenden beiden, zum identischen Bestehen der Relation (3) nothwendigen und hinreichenden Bedingungen:

$$f(u) = \frac{X_1\frac{\partial u}{\partial x} + Y_1\frac{\partial u}{\partial y}}{X\frac{\partial u}{\partial x} + Y\frac{\partial u}{\partial y}} \equiv l\ , \tag{4}$$

$$L = P\chi(u)\ , \tag{5}$$

wo

$$P \equiv \frac{X\frac{\partial u}{\partial x} + Y\frac{\partial u}{\partial y}}{XY_1 - X_1Y}\ , \tag{6}$$

von denen die erste bereits in den Bedingungen (J) des § 2 enthalten ist.

Die Forderung (2) ferner verlangt, dass L der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$X\frac{\partial \log L}{\partial x} + Y\frac{\partial \log L}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0 \tag{7}$$

genüge. Substituirt man aber hierin den Werth (5) von L, so folgt

$$-\frac{d\log\chi(u)}{du} = \frac{X\frac{\partial \log P}{\partial x} + Y\frac{\partial \log P}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}}{X\frac{\partial u}{\partial x} + Y\frac{\partial u}{\partial y}} \equiv Q\ . \tag{8}$$

Digitized by Google

Die Möglichkeit der Transformation (1) *ist also an die beiden Bedingungen gebunden, dass die beiden, durch* (4), (6), (8) *definirten Ausdrücke* l *und* Q *sich auf blosse Functionen von* u *reduciren*, oder also die beiden Functionaldeterminanten

$$\frac{\partial l}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial l}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}$$

identisch verschwinden müssen. Diese beiden Bedingungen sind aber auch *hinreichend*. Denn hat man l und Q mit Hülfe der gegebenen Gleichung $u(x,y) = u$ als Function von u berechnet, so liefert die Gleichung (4) unmittelbar $f(u)$, während $\chi(u)$ sich aus (8) durch eine Quadratur bestimmt. Mit $\chi(u)$ ist aber nach (5) zugleich auch L bestimmt und zwar so, dass es der Bedingung (7) identisch genügt. Für den erhaltenen Werth von L wird daher die rechte Seite der Formel (2) ein vollständiges Differential und man erhält somit die Unbekannte v durch eine zweite Quadratur aus (2). Willkürliche Constanten den Quadraturen hinzuzufügen, ist unnöthig. —

Nachdem somit das einfachere Problem (1) absolvirt ist, wenden wir uns nunmehr zu der *allgemeinen Transformation II.*[1])

Wir zerfällen dieselbe zunächst ganz analog wie oben in die beiden:

$$dv = L(X\,dy - Y\,dx)\,, \tag{2}$$

$$(v\psi(u) + \chi(u))\,du = L\{(Xf(u) - X_1)\,dy - (Yf(u) - Y_1)\,dx\}\,, \tag{9}$$

und erfüllen die letzte wieder durch (4) und durch die Formel:

$$L = P(v\,\psi(u) + \chi(u))\,.$$

Schreibt man nun die letzte Formel in der Form:

$$\frac{\chi(u)}{\psi(u)} = \frac{L}{P\psi(u)} - v\,, \tag{10}$$

so sieht man, dass sie sich ersetzen lässt durch die Bedingung:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{L}{P\psi(u)} - v\right) - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{L}{P\psi(u)} - v\right) = 0\,,$$

---

1) Die folgende einfache Lösung verdanke ich im Wesentlichen einer Seminararbeit von Herrn F. HAUSDORFF. Ich selbst hatte (vgl. § 5) das Problem ursprünglich weit umständlicher gelöst.

Digitized by Google

oder:

$$(10') \qquad \frac{1}{\psi(u)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \frac{L}{P}}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \frac{L}{P}}{\partial x}\right)=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\ .$$

Die Forderung (2) aber ergiebt:

$$\frac{\partial v}{\partial y}=LX\ ,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-LY\ .$$

Daher kann man die letzte Bedingung so schreiben:

$$(11) \quad -\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \log\frac{L}{P}}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \log\frac{L}{P}}{\partial y}=P\left(X\frac{\partial u}{\partial x}+Y\frac{\partial u}{\partial y}\right)\psi(u)\ .$$

Andrerseits ist es, damit (2) ein vollständiges Differential sei, nothwendig und hinreichend, dass L der Gleichung

$$(7) \qquad X\frac{\partial \log L}{\partial x}+Y\frac{\partial \log L}{\partial y}+\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=0$$

genüge, und wenn man von dieser die, nach der Definition (8) von Q, identische Gleichung abzieht:

$$X\frac{\partial \log P}{\partial x}+Y\frac{\partial \log P}{\partial y}+\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=Q\left(X\frac{\partial u}{\partial x}+Y\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

so erkennt man, dass die Bedingung (7) sich ersetzen lässt durch die:

$$(12) \qquad X\frac{\partial \log\frac{L}{P}}{\partial x}+Y\frac{\partial \log\frac{L}{P}}{\partial y}=-Q\left(X\frac{\partial u}{\partial x}+Y\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Das Problem ist also gelöst, *sobald man die Unbekannte $\psi(u)$ so bestimmen kann, dass die beiden linearen partiellen Differentialgleichungen* (11) *und* (12) *eine gemeinsame Lösung* $\log\frac{L}{P}$ *erhalten.*

Denn für den durch diese gemeinsame Lösung bestimmten Werth von L wird die rechte Seite der Formel (2) ein vollständiges Differential und man erhält daher aus dieser Formel v durch eine Quadratur. Die so erhaltenen Werthe von L und v genügen

Digitized by Google

zugleich der Bedingung (10'), daher ergiebt sich schliesslich $\chi(u)$ unmittelbar aus (10).

Die Gleichungen (11) und (12) liefern nun:

$$(13)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial \log \dfrac{L}{P}}{\partial x} = PY\psi(u) + Q\dfrac{\partial u}{\partial x}\ , \\ +\dfrac{\partial \log \dfrac{L}{P}}{\partial y} = PX\psi(u) - Q\dfrac{\partial u}{\partial y}\ . \end{cases}$$

Damit sie also eine gemeinsame Lösung zulassen, ist nothwendig und hinreichend, dass

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{PX\psi(u) - Q\frac{\partial u}{\partial y}\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{PY\psi(u) + Q\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = 0$$

oder:

$$P\left(X\frac{\partial u}{\partial x} + Y\frac{\partial u}{\partial y}\right)\psi' u$$
$$+\left(\frac{\partial PX}{\partial x} + \frac{\partial PY}{\partial y}\right)\psi(u) + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

sei. Bemerkt man aber, dass nach der Definition (8)

$$\frac{\dfrac{\partial PX}{\partial x} + \dfrac{\partial PY}{\partial y}}{P\left(X\dfrac{\partial u}{\partial x} + Y\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)} \equiv Q$$

ist, und setzt noch zur Abkürzung:

$$(14)\qquad \frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial y}\dfrac{\partial u}{\partial x}}{P\left(X\dfrac{\partial u}{\partial x} + Y\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)} \equiv S\ ,$$

so wird diese Bedingung:

$$(15)\qquad \psi' u + Q\psi(u) = S\ .$$

Wäre nun Q eine blosse Function von u, so würde $S \equiv 0$ sein und (15) sich erfüllen lassen durch $\psi(u) \equiv 0$, wodurch wir

wieder zu der einfacheren Transformation (1) zurückkämen. Wir nehmen daher an, *dass Q sich nicht auf eine blosse Function von u reducire.*

Dann ergiebt die aus (15) folgende Bedingung:

$$\frac{\partial (Q\psi(u) - S)}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial (Q\psi(u) - S)}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

sofort:

$$\psi(u) = \frac{\frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial S}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}} \equiv T , \tag{16}$$

und hieraus endlich folgt:

$$\psi' u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} , \qquad \psi' u \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} ,$$

also:

$$\psi'(u) = \frac{X\frac{\partial T}{\partial x} + Y\frac{\partial T}{\partial y}}{X\frac{\partial u}{\partial x} + Y\frac{\partial u}{\partial y}} \equiv T_1 . \tag{17}$$

Für das allgemeine Transformationsproblem II sind demnach bei der über Q gemachten Voraussetzung nothwendig und hinreichend die folgenden *drei* Bedingungen:

Es müssen die durch (4), (6), (8), (14) *und* (16) *definirten Ausdrücke l und T sich auf blosse Functionen von u reduciren, und überdies muss die Gleichung* (15) *identisch erfüllt werden durch die Werthe* (16) *und* (17) *von* $\psi(u)$ *und* $\psi' u$.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so erhält man $f(u)$ und $\psi(u)$ unmittelbar aus (4) und (16), hierauf findet man L mittelst einer Quadratur aus den beiden Gleichungen (13) und schliesslich v und damit nach (10) zugleich $\chi(u)$ durch eine zweite Quadratur aus dem vollständigen Differentiale (2), sodass also, um alle Unbekannten zu bestimmen, nach einander zwei vollständige Differentiale zu integriren sind. Wiederum kann man alle Integrationsconstanten weglassen.

Hiermit haben wir zur Entscheidung der Frage, ob bei willkürlichem $\varphi(u)$ die gegebene Differentialgleichung:

Digitized by Google

$$\frac{X\,dy - Y\,dx}{X_1\,dy - Y_1\,dx} = \varphi(u) \tag{18}$$

durch eine Punkttransformation auf eine (separirte oder) lineare Differentialgleichung 1. O. zurückführbar ist, das folgende Kriterium gewonnen.

Wir bilden zunächst nach der Formel (4) den Ausdruck l. Reducirt sich derselbe nicht auf eine blosse Function von u, so ist die verlangte Reduction unmöglich. Ist aber

$$\frac{\partial l}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial l}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0 \ ,$$

so berechnen wir weiter P und Q aus den Formeln (6) und (8). Wird auch Q eine blosse Function von u, so bestimmen wir auf dem, im Anschlusse an die Gleichung (8) auseinandergesetzten Wege $f(u)$, $\chi(u)$, L und v aus den Formeln (4), (8), (5) und (2) und haben damit nach (1) zugleich das Integral:

$$v - \int \frac{\varphi(u)\,\chi(u)\,du}{\varphi(u)\,f(u) - 1} = \text{const.}$$

der gegebenen Differentialgleichung (18) gewonnen.

Reducirt sich dagegen Q nicht auf eine blosse Function von u, so sind weiter die Ausdrücke S, T und T_1 aus ihren Definitionen (14), (16) und (17) zu berechnen. Wird T eine blosse Function von u und zugleich der Bedingung (15) entsprechend:

$$T_1 + Q\,T \equiv S \ ,$$

so ist wiederum die Gleichung (18) integrirbar, indem sie sich in die lineare Differentialgleichung transformirt:

$$\frac{dv}{du} = \frac{v\,\psi(u) + \chi(u)}{1 - \varphi(u)\,f(u)} \ .$$

deren Functionen auf die eben vorhin angegebene zweite Art zu berechnen sind.

Genügt die vorgelegte Differentialgleichung (18) weder den einen noch den anderen Bedingungen, so bleibt noch zu untersuchen, ob nicht vielleicht die äquivalente Gleichung

$$\frac{X_1\,dy - Y_1\,dx}{X\,dy - Y\,dx} = \frac{1}{\varphi(u)} \tag{18'}$$

sich diesen Bedingungen fügt; im Besonderen muss von vornherein die gegebene Gleichung durch die Gleichung (18′) ersetzt werden, wenn zufällig $u = \text{const.}$ das Integral der Gleichung

$$X dy - Y dx = 0$$

sein sollte.

Entziehen sich aber beide Formen der gegebenen Differentialgleichung unseren Bedingungen, so ist es bei willkürlichem $\varphi(u)$ überhaupt unmöglich, dieselbe auf die lineare Form zu bringen.

§ 5.

Andere Lösung des Problems II.

Die eben gewonnene Lösung des Problems:

$$\text{II.} \qquad \frac{X dy - Y dx}{X_1 dy - Y_1 dx} \equiv \frac{dv}{f(u)\, dv - (v\psi(u) + \chi(u))\, du}$$

gestattet noch keinen unmittelbaren Vergleich mit den Angaben von Herrn Maximowitsch. Zu dem Ende müssten vielmehr die Bedingungen des Problems wenigstens theilweise erst noch umgeformt werden. Dies aber durch directe Rechnung zu erreichen, ist jedenfalls gar nicht leicht. Aus diesem Grunde, und um damit zugleich zu zeigen, dass man, obgleich zwei verschiedene Lösungen sich nur durch die Werthe der Integrationsconstanten von einander unterscheiden können, die Lösung doch in Art und Form noch ganz anders gestalten kann, lasse ich hier noch eine zweite Lösung des Problems für den allgemeinen *Fall* folgen, in welchem der Ausdruck Q sich nicht auf eine blosse Function von u reducirt.

Ich schicke voraus, dass sich die Aufgabe sehr einfach lösen lässt, wenn man voraussetzt, dass man die Differentialgleichung

$$X dy - Y dx = 0$$

bereits integrirt habe, dass also ihr Integral $w = \text{const.}$ bekannt sei, und sich dann x und y durch die beiden unabhängigen Functionen u und w ausgedrückt denkt, und dass sich auf diesem Wege sofort ergiebt, dass zur Möglichkeit der Transformation II drei und nur drei Bedingungen nothwendig und hinreichend

sind. Sobald man daher bei irgend einer andern Lösungsart der Aufgabe zu drei solchen Bedingungen gelangt ist, deren Bestehen die vollständige Bestimmung aller Unbekannten der Transformation ermöglicht, so braucht man sich um die Bedingungen, die sich etwa sonst noch ergeben sollten, nicht weiter zu kümmern, weil es klar ist, dass dieselben blosse Folgen der drei früheren Bedingungen sein müssen.

Nun sahen wir bereits, dass die Forderung II sich in die vier Bedingungen auflöst:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -LY \ , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = LX \ , \tag{1}$$

$$f(u) = \frac{X_1 \frac{\partial u}{\partial x} + Y_1 \frac{\partial u}{\partial y}}{X \frac{\partial u}{\partial x} + Y \frac{\partial u}{\partial y}} \equiv l \ , \tag{2}$$

und

$$L = P(v\psi(u) + \chi(u)) \ , \tag{3}$$

wo P durch § 4, (6) definirt ist.

Die Bedingungen (1) lassen sich nun ersetzen durch die beiden:

$$\begin{cases} X \frac{\partial v}{\partial x} + Y \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \ , \\ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = L \left(X \frac{\partial u}{\partial x} + Y \frac{\partial u}{\partial y} \right) . \end{cases} \tag{4}$$

Ueberdies folgt aus (1) wieder:

$$X \frac{\partial \log L}{\partial x} + Y \frac{\partial \log L}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0 \ , \tag{5}$$

und indem man hierin für L seinen Werth (3) substituirt, erhält man

$$-\frac{v\psi' u + \chi' u}{v\psi(u) + \chi(u)} = \frac{X \frac{\partial \log P}{\partial x} + Y \frac{\partial \log P}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}}{X \frac{\partial u}{\partial x} + Y \frac{\partial u}{\partial y}} \equiv Q . \tag{6}$$

Ist nun Q keine blosse Function von u, so kann

$$\psi' u + Q\psi(u) \equiv 0$$

sein, und (6) ergiebt daher:

$$(7) \qquad v = -\frac{\chi' u + Q\chi(u)}{\psi' u + Q\psi(u)} .$$

Führt man jetzt die Abkürzungen ein:

$$(8) \qquad \begin{cases} \psi(u)\chi' u - \chi(u)\psi' u \equiv f_1(u) , \\ \psi' u \chi'' u - \chi' u \psi'' u \equiv f_2(u) , \end{cases}$$

so darf zunächst $f_1(u) \not\equiv 0$ sein, da sonst $\chi(u) \equiv c\psi(u)$ und nach (7) also $v \equiv$ const. wäre.

Berechnet man daher aus (7) $\frac{\partial v}{\partial x}$ und $\frac{\partial v}{\partial y}$, und substituirt ihre Werthe nebst dem aus (3) und (7) folgenden Werth von L in die Gleichungen (4), so kann man im Resultat durch $f_1(u)$ dividiren und erhält auf diese Weise die beiden Bedingungen:

$$X\frac{\partial Q}{\partial x} + Y\frac{\partial Q}{\partial y}$$

$$-\left(\frac{f_2(u)}{f_1(u)} + Q\frac{d\log f_1(u)}{du} + Q^2\right)\left(X\frac{\partial u}{\partial x} + Y\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 ,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = -P\left(X\frac{\partial u}{\partial x} + Y\frac{\partial u}{\partial y}\right)(\psi' u + Q\psi(u)) .$$

Führt man aber neben dem, durch § 4, (14) definirten S noch die folgende Abkürzung ein:

$$(9) \qquad \frac{X\frac{\partial Q}{\partial x} + Y\frac{\partial Q}{\partial y}}{X\frac{\partial u}{\partial x} + Y\frac{\partial u}{\partial y}} \equiv R ,$$

so ergeben diese beiden Gleichungen:

$$(10) \qquad \frac{f_2(u)}{f_1(u)} + Q\frac{d\log f_1(u)}{du} = R - Q^2 ,$$

$$(11) \qquad \psi' u + Q\psi(u) = S .$$

Digitized by Google

die letzte Gleichung ist die bereits im vorigen § unter (15) gefundene.

Behandelt man nun diese beiden Gleichungen auf dieselbe Weise wie dort die Gleichung (15), so erhält man aus ihnen:

$$\psi(u) = \frac{\frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial S}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}} \equiv T\,, \tag{12}$$

$$\frac{d\log f_1(u)}{du} = \frac{\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}} - 2Q \equiv U\,. \tag{13}$$

Hiermit haben sich für unsere Transformation II jetzt als nothwendig ergeben die *drei* Bedingungen, *dass die Ausdrücke* l, T, U *sich auf blosse Functionen von* u *reduciren müssen.* Ueberdies bestimmen sich, sobald diese drei Bedingungen erfüllt sind, alle Unbekannten des Problems, nämlich $f(u)$ und $\psi(u)$ unmittelbar aus (2) und (12), $f_1(u)$ durch eine Quadratur aus (13) und hierauf $\chi(u)$ durch eine zweite Quadratur aus der Formel:

$$d\frac{\chi(u)}{\psi(u)} \equiv \frac{f_1(u)}{(\psi(u))^2}\,du\,,$$

womit nach (7) zugleich auch der Werth von v gewonnen ist.

Die beiden Bedingungen, welche jetzt noch daraus entspringen, dass der Werth (12) von $\psi(u)$ der Bedingung (11), und der Werth (13) von $\frac{d\log f_1(u)}{du}$, verbunden mit dem, durch ihn und durch $\psi(u)$ bestimmten Werthe von

$$\frac{f_2(u)}{f_1(u)} \equiv \frac{\psi' u}{\psi(u)}\,\frac{d\log f_1(u)}{du} - \frac{\psi'' u}{(\psi(u))^2}$$

der Bedingung (10) identisch genügen muss, müssen also nothwendig blosse Folgen der drei oben angegebenen Bedingungen sein und kommen daher nicht weiter in Betracht.

Wie man sieht, unterscheidet sich diese zweite Lösung des Problems nicht nur in der Art der Bestimmung der Unbekannten, sondern namentlich auch in der Form der dritten Bedingung sehr wesentlich von der ersten Lösung, während die beiden ersten Bedingungen beiden Lösungen gemein sind.

In den *Comptes rendus* hat nun Herr Maximowitsch Kriterien der Integrirbarkeit nur angegeben für Differentialgleichungen von der Form:

$$X\frac{dy}{dx} - Y = f(x) \quad . \tag{14}$$

Hier ist:

$$X_1 = 0 \ , \quad Y_1 = -1 \ , \quad u = x$$

(also $u =$ const. das Integral von $X_1\,dy - Y_1\,dx = 0$, sodass die Gleichung (14) nicht durch die

$$\frac{dx}{Xdy - Ydx} = \frac{1}{f(x)}$$

ersetzt werden darf), nach (2) wird also $l = 0$; die *erste* Bedingung der Integrirbarkeit ist also stets erfüllt. Weiter wird nach den Formeln (6) und (14) des vorigen §

$$P = -1 \ , \quad S = \frac{1}{X}\frac{\partial Q}{\partial y} \ ,$$

und daher nach den Definitionen 6), (9), (12), (13) dieses §:

$$Q = \frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) , \tag{15}$$

$$R = \frac{1}{X}\left(X\frac{\partial Q}{\partial x} + Y\frac{\partial Q}{\partial y}\right) ,$$

$$\left\{\begin{aligned} T &= \frac{\frac{\partial S}{\partial y}}{\frac{\partial Q}{\partial y}} \equiv \frac{1}{Q'y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{X}Q'y\right) \equiv \frac{1}{X}\,\frac{\partial \log\left(\frac{1}{X}Q'y\right)}{\partial y} \ , \\ U &= \frac{\frac{\partial R}{\partial y}}{\frac{\partial Q}{\partial y}} - 2Q \equiv \frac{1}{Q'y}\frac{\partial}{\partial y}\left(Q'x + \frac{Y}{X}Q'y\right) - 2Q \ . \end{aligned}\right. \tag{16}$$

igitized by Google

Die Gleichung (14) ist daher *erstens* stets integrirbar, wenn der Ausdruck (15) sich auf eine blosse Function von x reducirt. Das ist der wohlbekannte Fall, in welchem die Gleichung

$$X dy - Y dx = 0 \tag{17}$$

einen von y unabhängigen Multiplicator zulässt.

Ist aber Q keine blosse Function von x, so ist die Gleichung (14) *zweitens* gleichfalls noch integrirbar, wenn die beiden Ausdrücke (16) frei von y werden.

Von diesen beiden Bedingungen lässt sich die zweite noch anders aussprechen. Nach (16) und (15) ist nämlich:

$$U \equiv \frac{1}{Q'y}\left\{Q''xy + \frac{Y}{X}Q''yy - \frac{1}{X^2}\left(X\frac{\partial Y}{\partial y} - Y\frac{\partial X}{\partial y}\right)Q'y\right\} - \frac{2}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

und das kann so geschrieben werden:

$$U \equiv -\frac{1}{X^2}Q'y\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{X^2}{Q'y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{XY}{Q'y}\right)\right\}.$$

Die Gleichung:

$$\frac{X}{Q'y}\left(X\frac{\partial \log M}{\partial x} + Y\frac{\partial \log M}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{X^2}{Q'y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{XY}{Q'y}\right) = 0,$$

welche den Multiplicator M des Ausdruckes:

$$\frac{X(X dy - Y dx)}{Q'y} \tag{18}$$

definirt, lässt sich daher also darstellen:

$$\frac{\partial \log M}{\partial x} + \frac{Y}{X}\frac{\partial \log M}{\partial y} = U,$$

und die Forderung, dass U frei von y sein soll, fällt somit mit der zusammen, dass der Ausdruck (18) eine blosse Function von x als Multiplicator zulasse.

Herr Maximowitsch, dessen Hauptzweck in diesem Theile seiner Arbeit entschieden darin besteht, streng nachzuweisen, dass die allgemeine lineare Differentialgleichung 2. O.

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{dz}{dx}\varphi(x) + zf(x) = 0$$

nicht in endlicher Form integrirbar ist, beschäftigt sich nun, wie es scheint, mit der Gleichung (14) nur unter der Annahme, dass Y selbst noch eine zweite willkürliche Function von x in linearer Weise enthält, also die Form besitzt

$$Y \equiv Y_1 \varphi(x) - X_1 \,. \tag{19}$$

Dann müssen, falls die Gleichung integrirbar sein soll, unsere Kriterien im Besonderen auch für $\varphi(x) \equiv 0$ erfüllt sein. Wenn daher bei der Annahme (19) die Gleichung (14) mit ihren beiden willkürlichen Functionen $\varphi(x)$ und $f(x)$ durch blosse Quadraturen integrirbar sein soll, so muss zunächst, nachdem man $Y = -X_1$ gesetzt hat, entweder die Gleichung (17) oder aber der Ausdruck (18) einen von y unabhängigen Multiplicator zulassen. Und das sind eben auch die beiden nothwendigen, aber nicht hinreichenden Bedingungen, welche Herr MAXIMOWITSCH in der Selbstanzeige seiner Arbeit mittheilt.—

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

Digitized by Google

UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06450 5723

Digitized by Google